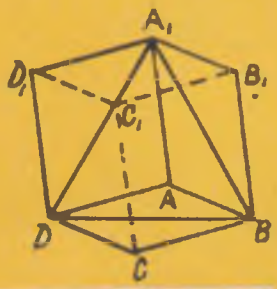
А. Б. ВАСИЛЕВСКИЙ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ



513 (07)
В 19
УДК 513.3.(07.07)

Василевский А. Б.

В 19 Параллельные проекции и решение задач по стереометрии.— Мн.: Нар. асвета, 1978.—104 с., ил.

В пособии все построения рассматриваются на проекционном чертеже, что является органической частью решения всякой пространственной задачи. Раскрывается методика комплексного использования построений, вычислений и измерений в процессе решения стереометрических задач, даются оригинальные системы упражнений и методы решения пространственных задач с элементами построений. Предназначается для учителей математики IX—X классов.

В $\frac{60601-096}{М\ 303(05)-78}$ 105—78 513 (07)

© Издательство «Народная асвета», 1978.

Научно-исследовательский институт педагогики Министерства просвещения БССР

А. Б. ВАСИЛЕВСКИЙ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Минск
«Народная асвета»
1978

Задача 5. Положение полуокружности радиуса r относительно a показано на рисунке 225. $|AA_0| = h$. Найдите площадь поверхности, образованной вращением этой полуокружности вокруг a.

Решение. Очевидно, $l = \pi r$. Если $X \in \smile AB$ и $\overline{AX} = x$, то $|XX_0| = h - |XX'| = h - r\sin\frac{x}{r}$ и $C(x) = 2\pi\left(h - r\sin\frac{x}{r}\right)$. Поэтому $S(\Pi) = \int_0^{\pi r} 2\pi\left(h - r\sin\frac{x}{r}\right)dx = 2\pi r(\pi h - r)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I. **Некоторые общие вопросы методики обучения учащихся работе с изображениями пространственных фигур**

1. Основные понятия 9
2. Виды задач на изображениях пространственных фигур и методы их решения 11
3. Требования к изображениям пространственных фигур 15
4. Задачи на готовом чертеже 23
5. Построение сечений многогранников плоскостью . . 29

Глава II. **Изучение свойств параллельных проекций и решение конструктивных задач в IX—X классах** . .

1. Основные понятия стереометрии. Аксиомы . . . 34
2. Применение свойств параллельных проекций в теме «Параллельность в пространстве» 41
3. Некоторые свойства ортогональной проекции и их применение к решению задач 56
4. Упражнения для усвоения нового материала . . 82
5. Обобщенные приемы решения задач по геометрии в десятом классе 88

Александр Борисович Василевский

Параллельные проекции и решение задач по стереометрии

Редактор К. М. Лукашевич. Обложка художника Е. М. Малышевой. Художественный редактор Н. Л. Шавшукова. Технический редактор В. Н. Жук. Корректор В. С. Бабеня.

ИБ № 561

Сдано в набор 27.12.77. Подписано в печать 26.06.78. Формат 84×108 1/32. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,46. Уч.-изд. л. 4,21. Тираж 45 000 экз. Заказ. 874. Цена 10 к.

Издательство «Народная асвета» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600 Минск, Парковая магистраль, 11.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220827 Минск, Красная, 23.

ВВЕДЕНИЕ

Систематическое рассмотрение различных по содержанию и методам решения задач стереометрии способствует созданию у учащихся отчетливых представлений о трехмерном евклидовом пространстве, формирует диалектико-материалистическое мировоззрение. Вообще умение решать пространственные задачи является главным критерием усвоения учащимися всего курса геометрии средней школы.

Эффективным средством, способствующим лучшему усвоению свойств перемещений пространства (параллельного переноса, центральной и осевой симметрий, симметрии относительно плоскости) и отношений между прямыми и плоскостями, является решение задач на построение. В программе по математике для средней школы говорится: «При решении задач на построение преимущественное внимание рекомендуется уделить задачам на проекционном чертеже. Развитию пространственного воображения способствуют и традиционные воображаемые построения. Учащиеся IX класса должны приобрести навыки выполнения простейших стереометрических чертежей на основе свойств параллельного проецирования». В каждой теме курса IX и X классов предполагается рассмотрение задач на вычисление, доказательство и построение.

При решении задач на вычисление и доказательство используются свойства геометрических преобразований и аппарат векторной алгебры. Многие задачи решаются с применением тригонометрических функций.

Значительная часть задач вычислительного характера может быть решена только при помощи чертежа, выполненного с соблюдением всех свойств параллельной проекции. Кроме того, правильно выполненное изображение конкретной пространственной фигуры (куба, правильной треугольной пирамиды и т. п.) облегчает установление зависимости между данными и искомыми ее элементами, помогает расчленить стереометрическую задачу на ряд основных задач из курса планиметрии. Многие задачи на вычисление требуют дополнительных построений (воображаемых или на проекционном чертеже). Поэтому можно утверждать, что построения являются органической частью решения всякой пространственной задачи.

В учебном пособии «Геометрия. 9—10» под редакцией З. А. Скопеца задачам на построение отводится важная роль. Особое значение придается конструктивным задачам при изучении первой главы «Основные понятия стереометрии. Параллельность в пространстве». Задачи на построение точки пересечения прямой и плоскости, прямой пересечения двух плоскостей предназначены для усвоения аксиом стереометрии и основных свойств параллельных прямых и плоскостей.

Ученики IX класса знакомятся со свойствами параллельных проекций, с изображением различных плоских и неплоских фигур. Свойства параллельных проекций используются в дальнейшем при изучении различных преобразований пространства.

Построению сечений многогранников посвящены специальные параграфы учебного пособия «Геометрия. 9—10» (9-й класс). Задачи на построение сечений многогранников с последующим вычислением их площадей богаты по содержанию,

поэтому они занимают особое место при изучении свойств многогранников (10-й класс).

Конструктивные задачи даются и к главе «Перпендикулярность в пространстве. Двугранные и многогранные углы». Это задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей, сечений куба, прямоугольного параллелепипеда, правильных пирамид, общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

Условие стереометрической задачи на построение может быть задано одним из следующих способов: величинами элементов пространственных фигур и отношениями между ними; отрезками и углами, которые являются частями искомой фигуры; разверткой многогранников или тел вращения; проекционным чертежом (изображением) геометрической фигуры; комбинацией указанных способов.

Конструктивные задачи стереометрии решаются двумя принципиально различными методами: в воображении и при помощи выполняемых чертежными инструментами построений на проекционном чертеже, развертке геометрического тела или на каком-либо его сечении. Второй метод называется эффективным.

Решить задачу в воображении — это значит указать последовательность тех логических операций, при помощи которых доказывается существование геометрической фигуры, удовлетворяющей всем условиям задачи. Выполнение каких-либо чертежей при решении задачи в воображении не обязательно. Примером этому может служить такая задача. Дана треугольная пирамида. Построить точку, одинаково удаленную от всех плоскостей, которым принадлежат грани пирамиды.

Учитывая, что задачам, решаемым с помощью изображений пространственных фигур, посвящена вся книга, из эффективных методов здесь мы отметим только метод решения задач на развертках геометрических тел. Сущность его заключается в следующем. Геометрическое тело задается его разверткой или ее частью. С помощью раз-

вертки определяются некоторые элементы этого тела. Рассмотрим пример. Дана часть (основание и две боковые грани) развертки четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 1). Построить полную развертку этой пирамиды.

Строим точку $X = (AB) \cap (CD)$ и $[M_1X]$(рис. 2). Фигура $\Phi = \triangle ADX \cup \triangle ADM_2 \cup AM_1X$ — часть развертки треугольной пирамиды $MADX$. Четвертую ее грань легко построить, так как известны все стороны грани MDX (рис. 3). Строим $[CM]$. Треугольник CDM является третьей боковой гранью пирамиды $MABCD$. Четвертая грань (треугольник M_3BC) строится по известным сторонам BM_1, BC и CM (рис. 3).

Задачи на изображениях пространственных фигур обладают рядом преимуществ по сравнению с другими видами конструктивных задач. При их помощи можно достаточно хорошо развить пространственное воображение школьников. Навыки работы с чертежами необходимы при решении задач на вычисление, доказательстве теорем, а также при изучении школьного курса черчения.

Задачи, приведенные в данном пособии (п 2, гл. II), являются основными метрическими задачами. Поэтому их целесообразно использовать при изучении свойств параллельных проекций.

Система упражнений на готовых изображениях прямоугольного параллелепипеда (п. 4, гл. I) предназначена для повторения темы «Многогранники: виды, зависимость между их элементами, поверхность и объем».

Систему конструктивных упражнений из п. 1 (гл. II) целесообразно использовать при изучении аксиом стереометрии. Эти упражнения можно применить для индивидуальной и дополнительной работы с учениками.

Упражнения 1—15 из п. 2 (гл. II) могут быть использованы (полностью или частично) при изучении свойств взаимного расположения прямых и плоскостей пространства. Упражнения 16—26 этого параграфа (на построение сечений многогранников плоскостью) предназначены для

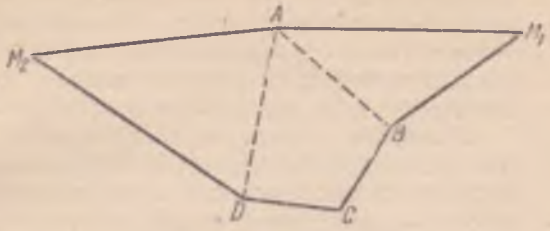


Рис. 1.

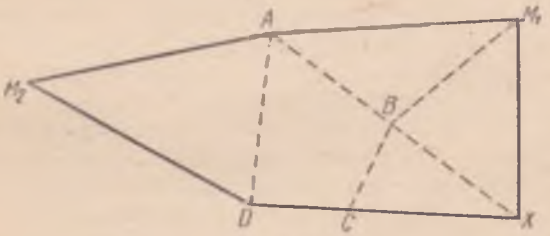


Рис. 2.

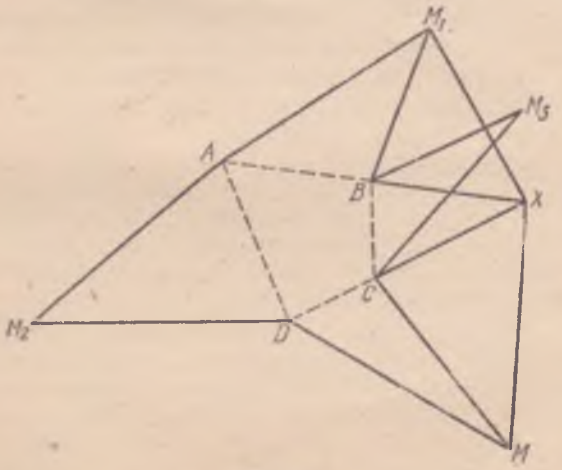


Рис. 3.

повторения всего курса геометрии девятого класса. Главное назначение этих упражнений — обучение учащихся комплексному использованию методов построения сечений, свойств прямых, плоскостей и их параллельных проекций.

С методом решения задач, описанным в п. 3 (гл. II), учащиеся знакомятся постепенно (в процессе изучения площадей поверхностей многогранников и тел вращения, их объемов и других свойств). Эти методы иллюстрируются в основном задачами из различных конкурсных сборников.

Глава I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РАБОТЕ С ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

1. Основные понятия

Пусть даны плоскость α, пересекающая эту плоскость прямая l и точка M (рис. 4). Через точку M проведем прямую m, параллельную l. Получим $M_0 = m \cap \alpha$. Точка M_0 называется параллельной проекцией точки M на плоскость α. Прямая l называется направлением проецирования, плоскость α — плоскостью проекций*.

Очевидно, если $M \in l$, то $M_0 = l \cap \alpha$. Если $M \in \alpha$, то $M_0 = M$.

Если l перпендикулярна плоскости α, то M_0 называется ортогональной проекцией точки M на эту плоскость.

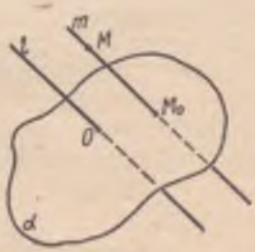


Рис. 4.

Параллельная проекция фигуры, подобной фигуре-оригиналу, называется изображением оригинала.

При полном изображении любая инциденция** на фигуре-оригинале определена также и на изображении. На полном изображении всякая инциденция двух элементов из множества точек, прямых и плоскостей определена однозначно.

---

* Под проекцией фигуры, состоящей больше чем из одной точки, понимается множество проекций всех точек этой фигуры.

** Слово «инцидентность» употребляется для обозначения понятий «лежать на...», «проходить через...». Например, предложения «прямая проходит через точку», «точка принадлежит прямой» можно заменить предложением «точка и прямая инцидентны».

Полное изображение называется проекционным чертежом.

Поясним сказанное примерами.

Образ плоскости α, треугольной пирамиды $DABC$ и точки K (рис. 5) является изображением названных фигур, но это изображение нельзя назвать проекционным чертежом,

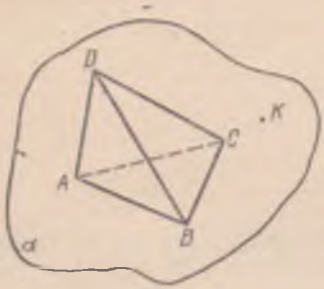


Рис. 5.

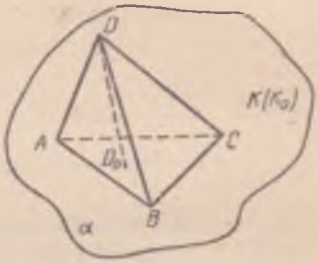


Рис. 6.

потому что положение точки K_0 не определено на нем однозначно.

Изображение тех же фигур на рисунке 6 является проекционным чертежом, так как из него не видно, что точка $K(K_0)$ принадлежит плоскости α.

Показанное на рисунке 7 изображение четырехугольной пирамиды $EABCD$ и прямой MK не является полным, потому что из этого изображения неясно, с какими гранями пирамиды (или плоскостями, определяемыми этими гранями) пересекается прямая MK.

Рис. 7.

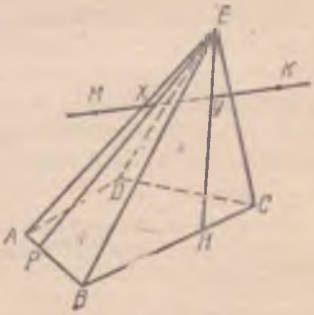


Рис. 8.

Это изображение становится полным, т. е. его можно назвать проекционным чертежом после того, как мы зададим точки X и Y пересечения прямой MK с гранями пирамиды $EABCD$ (рис. 8). Из рисунка 8 ясно, что прямая MK пересекает грани ABE и BCE в точках X и Y.

2. Виды задач на изображениях пространственных фигур и методы их решения

Все конструктивные задачи на изображениях пространственных фигур можно разделить на два вида.

Первый вид составляют задачи на построение изображений пространственных фигур. Задачи второго вида — это построения на данных изображениях геометрических фигур.

В свою очередь задачи второго вида также делятся на две группы: позиционные и метрические.

К позиционным относятся задачи, при решении которых используются только свойства параллельной проекции. Их можно решать, ничего не зная о метрических свойствах тех фигур, на изображении которых мы выполняем построения. Примеры таких задач:

1. Дано изображение $A'B'C'$ треугольника ABC. Постройте его медианы.

Так как при параллельном проецировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой, то середины сторон треугольника $A'B'C'$ будут изображениями оснований медиан треугольника ABC.

2. Дано изображение треугольника. Прямой, проходящей через одну из его вершин, разделите его на два равновеликих треугольника.

Вторую группу составляют задачи, решить которые можно только при известной форме плоской фигуры, на плоскости которой при помощи циркуля и линейки выполняются построения. Обязательными элементами решения этих задач являются построения изображений взаимно перпендикулярных прямых. Такие задачи называются метрическими.

Из решения метрических задач на плоских фигурах, не параллельных плоскости проекций, и складывается решение любой задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей, линейных углов двугранных углов и т. п.

Рассмотрим метрические задачи, которые лежат в основе изображений ортогональных прямых и плоскостей. Каждая задача решается и алгебраическим, и конструктивным методом, чтобы показать преимущества и недостатки каждого из них.

3. Дано изображение $A'B'C'$ прямоугольного треугольника ABC (C — прямой угол), катеты AC и CB которого относятся как $1:3$. Постройте высоту этого треугольника к гипотенузе AB.

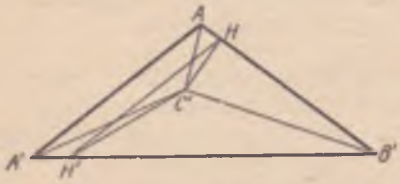


Рис. 9.

Решение. Первый способ (рис. 9). Считаем, что $[C'B'] \cong [CB]$. Через вершину C' проводим $[C'A]$, перпендикулярный $(C'B')$ и равный третьей части $[C'B']$. Строим $(C'H) \perp (AB')$. Точка H — основание высоты $C'H$ треугольника $AC'B'$ (подобного оригиналу ABC). Пусть H' — изображение точки H. Очевидно, что $(HH') \parallel (A'A)$ (при параллельном проецировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой).

Таким образом, H' находится как пересечение прямой $A'B'$ с прямой, проходящей через H и параллельной (AA').

Второй способ. Известно, что высота, опущенная из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC, делит его гипотенузу AB на части $[AH]$ и $[HB]$, пропорциональные квадратам катетов AC и CB. Поэтому положение точки H' на $[A'B']$ находим из пропорции

$$\frac{|A'H'|}{|H'B'|} = \frac{|AH|}{|HB|} = \frac{|AC|^2}{|CB|^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Итак, $|A'H'| = 0{,}1 \cdot |A'B'|$.

Алгебраический способ предпочтительнее в том случае, когда отношение $[A'H']$ и $[H'B']$ выражается рациональным числом.

4. Дано изображение прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как $1:2$. Постройте биссектрису его прямого угла.

Эту задачу также можно решать двумя способами, однако алгебраический проще.

Получаем, что биссектриса делит гипотенузу в отношении $1:2$.

5. Дано изображение $A'B'C'$ равнобедренного треугольника ABC, боковая сторона которого в два раза больше стороны AC основания. Постройте его высоту к стороне $A'B'$.

Решение. Первый способ (рис. 10). Строим треугольник $BA'C'$, у которого $[A'B] \cong [BC']$ и $|A'B| = 2\,|A'C'|$. Этот треугольник подобен оригиналу BAC,

Рис. 10.

Рис. 11.

Рис. 12.

изображением которого является данный треугольник $B'A'C'$.

Строим $(C'H) \perp (A'B)$. Через точку H проводим прямую, параллельную $(B'B)$. Точка H' пересечения этой прямой с $[B'A']$ является изображением точки H. Отрезок $H'C'$ — изображение высоты HC оригинала треугольника ABC.

Второй способ (рис. 11). Пусть треугольник ABC подобен оригиналу. Строим $(BM) \perp (AC)$. Принимаем отрезок AM за единицу длины. Тогда $|AB| = 4$. Из прямоугольного треугольника AMB получаем

$$|BM|^2 = |AB|^2 - |AM|^2 = 16 - 1 = 15.$$

Следовательно, высота KM треугольника AMB делит гипотенузу AB в отношении $1 : 15$, считая от вершины A.

Так как $|AC| = 2 \cdot |AM|$, то $|AH| = |AB| : 8$. Поэтому на стороне треугольника $A'B'C'$ строим точку H' $(\overrightarrow{A'H'} = \frac{1}{8}\overrightarrow{A'B'})$. Строим отрезок $C'H'$, который и является изображением высоты CH треугольника ABC.

6. Дано изображение прямоугольного треугольника ABC, катеты которого $|AC|$ и $|CB|$ относятся как $1:2$. Постройте изображение прямой l, лежащей в плоскости данного треугольника, проходящей через середину O его гипотенузы и перпендикулярной ей.

Решение (рис. 12). Так как две прямые, лежащие в одной плоскости и перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой, то строим $(CH) \perp (AB)$ (см. задачу 5) и через точку O проводим прямую l, параллельную (CH).

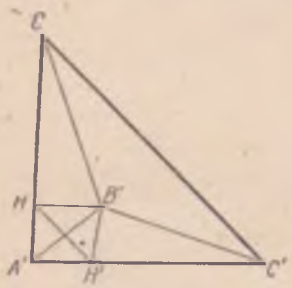


Рис. 13.

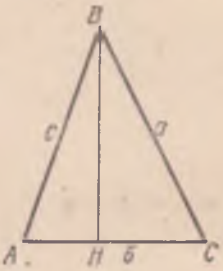


Рис. 14.

Способ решения этой задачи применим для решения всех задач на восстановление перпендикуляра к прямой в данной ее точке.

7. Дано изображение $A'B'C'$ треугольника ABC, стороны AB, BC и CA которого относятся как $2:4:5$. Постройте его высоту $B'H'$ к стороне $A'C'$.

Решение (рис. 13). Строим треугольник $A'B'C$, у которого $|A'B'|:|B'C|:|CA'| = 2:4:5$. Этот треугольник подобен оригиналу ABC. Строим $(B'H) \perp (A'C)$. Через H проводим прямую, параллельную (CC_1). Эта прямая пересекает $[A'C']$ в точке H'. Отрезок $B'H'$ является изображением высоты BH треугольника-оригинала ABC.

Алгебраическое решение этой задачи сложнее конструктивного.

Пусть $(BH) \perp (AC)$ (рис. 14). Обозначим: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AH| = x$. Тогда

$$|HC| = |b - x|. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника AHB получаем

$$|BH|^2 = c^2 - x^2.$$

Из прямоугольного треугольника BHC имеем

$$|BH|^2 = a^2(b - x)^2. \qquad (1')$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$|AH| = x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$|HC| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2b}.$$

Итак,

$$\frac{|AH|}{|HC|} = \left| \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \right|. \qquad (3)$$

Применив формулу (3) для решения рассматриваемой задачи, находим

$$\frac{|AH|}{|HC|} = \left| \frac{-4^2+5^2+2^2}{4^2+5^2-2^2} \right| = \left| -\frac{13}{37} \right|.$$

Так как у данного треугольника ABC

$$c^2 + a^2 > b^2,$$

то точка H лежит между точками A и C.

Из рассмотренных примеров 3—7 видно, что для решения метрических задач используются только основные свойства прямоугольных и косоугольных треугольников, которые изучаются учащимися 7 и 8 классов.

3. Требования к изображениям пространственных фигур

Общие требования к чертежам в педагогической практике сводятся к следующему.

Изображение пространственной фигуры будет верным, если оно получено с соблюдением всех свойств параллельной проекции. Однако не всякий верный чертеж дает нам представление о фигуре, о взаимном расположении ее элементов. Так, например, рисунки 15—18 являются верными изображениями правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$. Но только два последних рисунка дают возможность без затруднений судить о взаимном расположении ребер пирамиды, высоты, ее диагональных сечений и т. п.

Поэтому наглядность верного изображения простран-

ственной фигуры в значительной степени содействует усвоению содержания той задачи, которая решается при помощи этого изображения.

По изображению можно судить не о всех свойствах фигуры. Так, например, рисунок 18 можно принять и за изображение куба, и за изображение любого параллелепипеда.

Рис. 15.

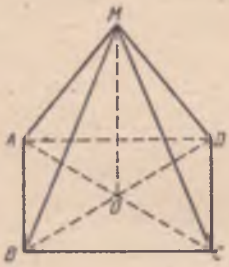


Рис. 16.

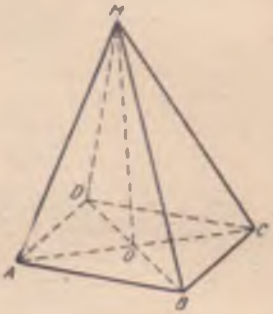


Рис. 17.

Рис. 18.

Рис. 19.

Рисунок 19 можно считать изображением не только правильной четырехугольной пирамиды. Глядя на него, можно только утверждать, что основанием этой пирамиды является параллелограмм. С одной стороны, это плохо, с другой — упрощается техника работы над чертежом, экономится время.

Изображение пространственной фигуры должно быть верным, наглядным и простым в исполнении.

Из этих трех требований для решающего стереометрическую задачу наиболее важным является второе.

Посмотрите еще раз на рисунки 17 и 19. Оба дают достаточно верное представление о форме правильной четырехугольной пирамиды, они остаются равноценными только до тех пор, пока мы не имеем дело с конкретной задачей, связанной с конкретной правильной четырехугольной пирамидой.

Принципиальное отличие неплоской задачи от планиметрической в том, что не все данные и искомые элементы принадлежат одной плоскости. Изображение неплоской фигуры является всего лишь ее плоским образом, поэтому из всех наглядных чертежей данной неплоской фигуры наилучшим будет тот, на котором изображено без искажения формы (величины) наибольшее число данных и искомых ее элементов.

Обратимся к примерам. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равна 40 мм. Определить:

а) радиус шара, вписанного в эту пирамиду, если двугранный угол при ее основании равен 30°;

б) радиус шара, описанного около пирамиды $MABCD$, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 30°;

в) угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ABC, если двугранный угол при этом ребре равен 120°;

г) площадь сечения пирамиды плоскостью α, проходящей через ребро BC и перпендикулярной плоскости ADM, если двугранный угол при ее основании равен 30°.

Вычисления при решении таких задач могут быть сведены к минимуму, если сразу определить, в каких плоскостях расположены данные и искомые элементы пирамиды и какими геометрическими преобразованиями эти элементы можно разместить в одной плоскости.

Прежде всего мы должны решить главный вопрос: как заменить данную неплоскую задачу планиметрической? Решается он параллельно с поисками наиболее наглядного изображения данной пирамиды для решения данной задачи.

Начинать следует с наброска произвольного изображения правильной четырехугольной пирамиды.

Приступаем к первому упражнению. Строим произвольное изображение пирамиды $MABCD$ (рис. 20). Можно ли на этом чертеже выделить треугольник, некоторые элементы которого конгруэнтны данным элементам пирамиды?

Десятиклассники уже привыкли к тому, что линейный

угол при основании пирамиды строится следующим образом.

Отмечается середина F стороны основания BC. Доказывается, что $\angle OFM$ является линейным $\angle(ABC, BCM)$. На чертеже появился треугольник OMF, у которого известны катет $|OF| = |AB| : 2$ и $\widehat{OFM} = 30°$. Теперь ясно,

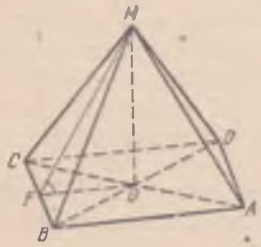


Рис. 20.

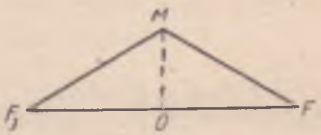


Рис. 21.

что прямоугольный треугольник FOM можно построить, причем будут использованы все данные элементы нашей пирамиды.

Мы еще не знаем, принадлежит ли этому треугольнику искомый элемент пирамиды, но у нас есть достаточно оснований утверждать, что следует аккуратно построить такой проекционный чертеж пирамиды, на котором треугольник MOF изображается в натуральную величину. Для построения такого чертежа нужно представить, чем является сечение пирамиды плоскостью MOF (равнобедренный треугольник F_1MF, где F_1 — середина $[AD]$).

Теперь приступаем к изображению пирамиды. Строим равнобедренный треугольник F_1FM, у которого $|F_1F| = 40$ мм, $\widehat{MF_1F} = \widehat{F_1FM} = 30°$, и его высоту OM (рис. 21). Три точки (F_1, F, M) пирамиды $MABCD$, не лежащие на одной прямой, уже показаны. За изображение четвертой точки X пирамиды, не принадлежащей треугольнику F_1FM, можно взять любую точку чертежа (теорема Польке — Шварца, см. с. 44).

Пусть для простоты дальнейших построений $X = B$ (рис. 22).

Изображение всех остальных вершин пирамиды выполняется только в полном соответствии со свойствами параллельной проекции (см. с. 42).

Еще раз подчеркиваем, что только четыре некомпланарные точки неплоской фигуры можно изобразить любыми точками плоскости чертежа. В противном случае изображение этой фигуры может быть неверным.

Точка O — середина $[BD]$. Поэтому изображением вершины D пирамиды будет точка, симметричная точке B от-

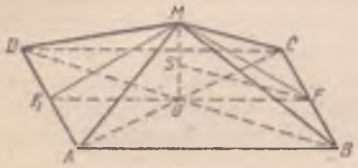


Рис. 22.

Рис. 23.

носительно O (рис. 22). Далее строим точку A, симметричную точке D относительно F_1, и точку C, симметричную точке B относительно F.

Чтобы найти величину радиуса шара, вписанного в пирамиду $MABCD$, нужно знать положение центра и точку его касания с одной из граней пирамиды.

По условию задачи, центр шара одинаково удален от всех граней пирамиды. Поэтому он принадлежит биссекторным плоскостям всех ее двугранных углов.

В правильной пирамиде двугранные углы при основании конгруэнтны, поэтому центр шара S является вершиной правильной пирамиды $SABCD$.

Следовательно, точка S принадлежит $[MO]$. Но как построить точку S? Она принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC. Угол OFM является его линейным углом. Поэтому точка S принадлежит биссектрисе угла OFM.

Итак, $[FS)$ — биссектриса угла OFM. Теперь ясно, что $[SO]$ является радиусом вписанного в пирамиду шара (рис. 22).

Поскольку на рисунке 22 $\triangle F_1MF$ изображен в натуральную величину, то $[SO]$ также показан без искажения. Очевидно, $|SO| = |OF| = \operatorname{tg} 15^\circ = 20 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \approx 20 \cdot 0{,}2679 \approx$ $\approx 5{,}4$ (мм).

Вычисления свелись к минимуму, так как данные и искомые элементы принадлежат одному треугольнику, притом прямоугольному.

Рисунок 22 позволяет избежать ошибок: вычисления можно проверить непосредственным измерением $[SO]$.

Перед выполнением второго упражнения следует с помощью модели показать учащимся, что правильная четырехугольная пирамида имеет ось вращения, проходящую через центр основания пирамиды и ее вершину. Причем наименьший угол, при повороте на который пирамида переходит сама в себя, является прямым. Из этого получаем, что радиус описанного шара равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника AMC. Нам известно, что угол при основании этого треугольника равен 30°. Замечаем, что основание AC является диагональю квадрата $ABCD$ (его сторона 40 мм). Поэтому $|AC| = 40\sqrt{2} \approx 56$ (мм).

Теперь ясно, что из всех наглядных изображений пирамиды $MABCD$ для второго упражнения наиболее подходящим является такое, на котором треугольник AMC изображается без искажения формы (рис. 23).

Выполнение такого изображения начинается с построения треугольника AMC в натуральную величину. На этом изображении легко построить центр O_1 описанного шара. Для этого достаточно через середину K стороны MC треугольника AMC провести прямую, перпендикулярную (MC). Она пересечется с (MO) в точке O_1 (рис. 23). $[O_1M]$ конгруэнтен радиусу шара. Этот отрезок изображен в натуральную величину, а это дает возможность непосредственным измерением найти длину радиуса шара (для проверки результата, полученного вычислением).

Треугольники MOC и MKO_1 изображены без искажения формы, поэтому учащимся легче увидеть, что они подобны. Следовательно, менее вероятна ошибка при определении соответственных сторон этих треугольников и составлении пропорции (эта пропорция нужна для вычисления длины отрезка O_1M). И наконец, из такого изображения ясно, что центр O_1 шара находится вне пирамиды.

Высота всякой правильной пирамиды является ее осью вращения. Поэтому для решения абсолютного большинства школьных и конкурсных задач наиболее наглядным является такое изображение, на котором показано без искажения своей формы одно из диагональных сечений пирамиды или сечение, проходящее через высоту пирамиды и середину одной из сторон основания.

Третье упражнение вызывает серьезные трудности у

учащихся, потому что два данных и искомый элемент не принадлежат одному какому-нибудь треугольнику. Кроме того, можно построить сколько угодно линейных углов данного двугранного угла, но не ясно, какой из них наиболее подходит для решения задачи. Было бы неплохо, если бы этот угол лежал в одной плоскости с одной из сторон основания пирамиды (она известна).

Рис. 24.

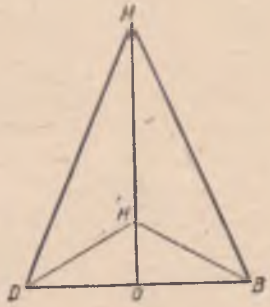


Рис. 25.

Попытки построить такой угол на модели некоторой правильной четырехугольной пирамиды не приносят успеха, однако мы замечаем, что стороны одного из них имеют общие точки с диагональю основания пирамиды.

Теперь остается только доказать, что существует на прямой AM такая точка H, что $\widehat{DHB} = 120°$ (рис. 24). Искомый угол MDB является углом треугольника BMD.

Итак, мы обнаружили, что треугольники BHD и MBD, которым принадлежат данные и искомый элементы, имеют общую сторону DB (мы уже раньше определили ее длину).

Точки B и D симметричны относительно плоскости AMC. Поэтому $|HD| = |HB|$ и $(HO) \perp (DB)$.

Чтобы свести эту задачу к планиметрической, достаточно треугольники HDB и MBD разместить в одной плоскости. Но в какой и как? О плоскости HDB мы знаем только то, что она перпендикулярна (AM). Свойства диагонального сечения BMD нам больше известны, поэтому, кажется, следует повернуть треугольник HBD вокруг (BD) до совпадения с плоскостью BDM.

Теперь нам предстоит разобраться в рисунке 25. Здесь несколько фигур. Нам известно, что $|DB| = 40\sqrt{2}$ мм,

$|DO| = 20\sqrt{2}$, $\widehat{DHB} = 120°$, $\widehat{DHO} = 60°$. Значит, мы можем построить треугольник DOH и определить его катет HO.

Но нам нужно найти $\widehat{MDO}$. А известен только катет $|DO|$. Как использовать $[HO]$? Переходя от изображения пирамиды (рис. 24) к рисунку 25, мы не учли, что $(HO) \perp (AM)$.

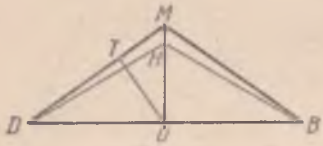


Рис. 26.

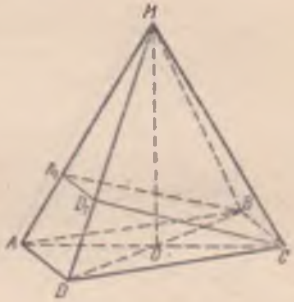


Рис. 27.

Поэтому $[HO]$ конгруэнтен и высоте OT, опущенной из вершины O на гипотенузу DM (рис. 26).

Теперь ясно, что

$$\sin \widehat{MDO} = |TO| : |DO| = |HO| : |DO| = |DO| \cdot \operatorname{tg} 30° : |DO| =$$

$$\operatorname{tg} 30° = \sqrt{3} : 3 \approx 0{,}57 \text{ и } \widehat{MDO} \approx 35°.$$

Рассмотрим четвертое упражнение. Учащиеся с достаточно развитым пространственным воображением правильный ответ могут дать без всяких вычислений и построений: нуль.

Другие же для решения задачи могут выполнить чертеж (рис. 27) без инструментов, после чего им станет ясно, что сечением пирамиды является равнобочная трапеция BA_1D_1C. Запишут $(A_1D_1) \parallel (AD)$. Появятся дополнительные построения (рис. 28) и начнутся вычисления.

Ошибка учащихся заключается в том, что они не учитывают следующего: $l = (ADM) \cap \alpha$ не пересекает сторон треугольника AMD.

Чтобы это обнаружить, нужно предложить учащимся попытаться решать задачу на таком изображении пирамиды,

на котором ответ получается при помощи построений и инструментальных измерений.

Наиболее подходящим для этой задачи является изображение, где без искажения формы показано сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее высоту и середину L ребра BC (рис. 29).

Для того чтобы построить изображение перпендику-

Рис. 28.

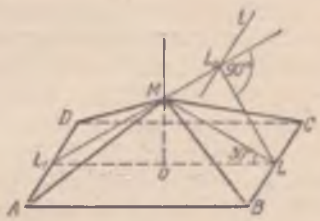


Рис. 29.

ляра LL_0 на плоскость ADM, достаточно провести при помощи угольника $(LL_0) \perp (L_1M)$.

Под сечением понимается множество точек, общих для данной пирамиды и плоскости α. Это множество точек образует отрезок BC, а его площадь равна нулю.

4. Задачи на готовом чертеже

Построение чертежей ко многим стереометрическим задачам отнимает у учащихся много времени. По этой причине некоторые учителя вообще не рассматривают такие задачи на уроках. Однако без систематической и целенаправленной работы над изображением фигур нельзя успешно развивать пространственное воображение учащихся.

В решении этих вопросов важное место принадлежит задачам, решаемым по готовым стереометрическим чертежам.

Работа с готовыми чертежами экономит время. Учащиеся систематически обучаются чтению изображений пространственных фигур. Изображения, выполненные в соответствии со всеми правилами параллельных проекций, являются образцами для подражания.

Обычно чертежи выполняются на плакатах. Вопросы по ним записываются на отдельных плакатах или задаются учителем устно.

Задачи по готовым чертежам можно использовать при изучении любого вопроса стереометрии, но особенно они эффективны при повторении больших разделов курса.

По готовым изображениям пространственных фигур можно предлагать устные упражнения, решать задачи на доказательство и вычисление, на обоснование выполненных построений или их проверку и т. д.

Ниже даются упражнения на готовых изображениях одного прямоугольного параллелепипеда. Они предназначены для повторения темы «Многогранники: виды, зависимость между их элементами, поверхности и объемы».

На двух-трех плакатах размещаются изображения (рис. 30—41) одного и того же прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($|AB| = 2$, $|BC| = 4$, $|AA_1| = 6$). Целесообразно отдельные элементы параллелепипеда изображать различными цветами.

Упражнения достаточно просты и выполняются без помощи моделей параллелепипеда. Однако, если пространственное воображение учащихся развито недостаточно, при выполнении наиболее трудных упражнений следует привлекать наглядные пособия. Никаких записей в тетрадях ученики, как правило, не делают.

Упражнения по рисункам 30—41

1. Докажите, что плоскости ABB_1 и CBA взаимно перпендикулярны (рис. 30, грань $ABCD$ параллельна плоскости чертежа).

2. Устно вычислите тангенс $(\widehat{BD_1, ABB_1})$ (рис. 30).

3. Изображен ли на рисунке 30 угол, конгруэнтный $\angle(BD_1, C_1B_1)$?

4. Докажите, что $\widehat{D_1BB_1} > \widehat{A_1BB_1}$ (рис. 30).

5. Точка T — середина ребра A_1B_1 (рис. 31, без искажения формы показана грань CDD_1C_1). Четырехугольник $CATQ$ — сечение параллелепипеда плоскостью CAT. Расскажите, как строили это сечение.

6. Верно ли, что прямые CQ и AT пересекаются и их общая точка принадлежит прямой B_1B (рис. 31)?

7. Найдите объем фигуры $ABCTB_1Q$ (рис. 31).

8. Назовите фигуру, которая является ортогональной проекцией трапеции $CQTA$ на плоскость AA_1T (рис. 31).

9. Какую часть объема параллелепипеда составляет объем четырехугольной пирамиды O_1ABCD (рис. 32, грань ADD_1A_1 параллельна плоскости чертежа)?

10. Который из углов больше: $(\widehat{O_1AD, BAD})$ или $(\widehat{O_1DC, ABC})$ (рис. 32)?

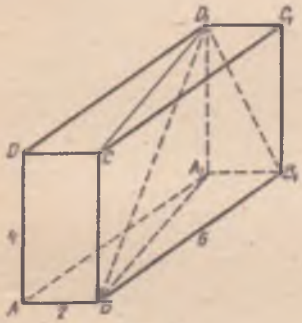


Рис. 30.

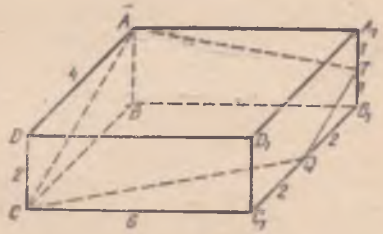


Рис. 31.

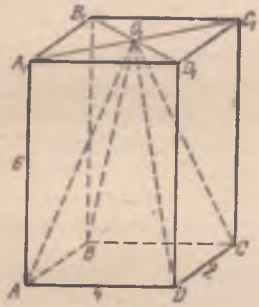


Рис. 32.

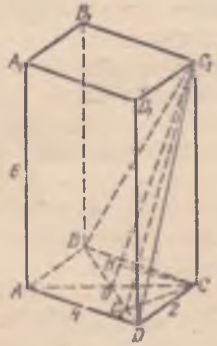


Рис. 33.

11. Докажите, что прямые BB_1 и O_1C скрещивающиеся (рис. 32).

12. Изображен ли на рисунке 32 угол наклона прямой O_1C к плоскости ABC?

13. Который из углов больше: $(\widehat{BCC_1, C_1CD})$ или $(\widehat{BOC_1, OCD})$ (рис. 33, без искажения формы изображен четырехугольник A_1C_1CA)?

14. На рисунке 33 построены взаимно перпендикулярные $[HC]$ и (OC_1). Верно ли утверждение: $(HC) \perp (BC_1D)$?

15. Пусть $(C_0C) \perp (BDC_1)$. Внутри какого из треугольников BOC_1 или C_1OD находится точка C_0 (рис. 33)?

16. Точка C_2 делит $[BD]$ в отношении $4:1$ (рис. 33). Верно ли, что $(C_2C) \perp (BD)$? Верно ли, что $C_0 \in (C_2C_1)$?

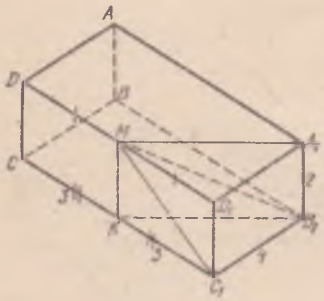


Рис. 34.

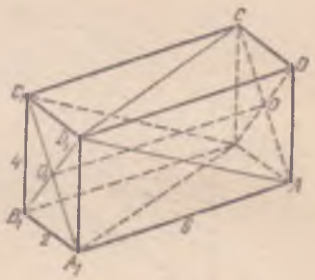


Рис. 35.

17. Точки B, C_1 и D принадлежат ребрам прямого трехгранного угла с вершиной C (рис. 33). Используя теорему о трех перпендикулярах, докажите, что треугольник BDC_1 остроугольный.

Указание. $[C_2C]$ — высота прямоугольного треугольника BCD. Поэтому C_2 находится внутри $[BD]$. По теореме о трех перпендикулярах, $[C_1C_2] \perp [BD]$, т. е. высота C_2C_1 треугольника BDC_1 расположена внутри его. Аналогичные рассуждения применяются и к остальным двум высотам треугольника BDC_1.

18. Найдите одну из тригонометрических функций $(\widehat{D_1C_1B_1, MC_1B_1})$ (рис. 34, четырехугольник MA_1B_1K параллелен плоскости чертежа (M_1K — середины $[DD_1]$ и $[CC_1]$)).

19. Докажите, что $\angle(MB_1A_1,\ C_1MB_1)$ тупой (рис. 34).

20. Определите полную поверхность тела $KC_1B_1MD_1A_1$ (рис. 34).

21. Пересекаются ли плоскости A_1C_1B и D_1CA (рис. 35, без искажения формы изображено диагональное сечение A_1C_1CA)?

22. Точки C_2 и B_2— середины ребер CC_1 и B_1C_1 (рис. 36). Какую часть объема параллелепипеда составляет объем тела $C_2B_2B_1A$?

23. Найдите отношение объемов пирамид $C_2CDA_1B_1$ и $C_2CB_1A_1$ (рис. 36, заштрихованная фигура параллельна плоскости чертежа).

24. Найдите объем тела $CDA_1B_1B_2C_2$ (рис. 36).

25. Точки P и L — середины ребер AD и DC (рис. 37). (Грань CDD_1C_1 параллельна плоскости чертежа.)

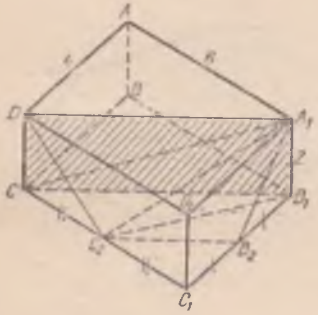


Рис. 36.

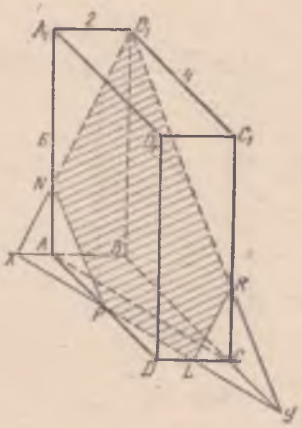


Рис. 37.

Расскажите по рисунку 37, как строилось сечение B_1NPLR параллелепипеда плоскостью B_1PL.

26. Докажите, что все углы пятиугольника B_1NPLR, за исключением $\angle B_1$, тупые (рис. 37).

Указание. См. упражнение 17.

27. Точка D_2 — середина ребра DD_1 (рис. 38, сечение A_1C_1CA параллельно плоскости чертежа); $[DK] \perp (ACC_1)$. В каком отношении точка K делит $[AC]$?

28. Вычислите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и CAD_2 (рис. 38).

Указание. Вычисления ведутся с помощью счетной линейки и таблиц тригонометрических функций.

29. Докажите, что $\angle(A_1C_1D_2,\ D_2AC)$ тупой (рис. 38).

30. Точка E делит $[A_1C_1]$ в отношении 4 : 1 (рис. 39, $\triangle A_1C_1D$ изображен без искажения формы). Показан ли на рисунке линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями C_1A_1D и $C_1A_1D_1$?

31. Докажите, что плоскости A_1C_1D и ED_1D перпендикулярны (рис. 39).

32. $[BH] \perp (C_1A)$ (рис. 40, заштрихованная фигура подобна ее оригиналу). Верно ли, что $[HB]$ перпендикулярна диагональной плоскости B_1C_1DA?

33. Точка K делит $[B_1C]$ в отношении $9:4$ (рис. 41, грань A_1D_1DA параллельна плоскости чертежа). Вычислите величину угла наклона (KA) к плоскости B_1BC.

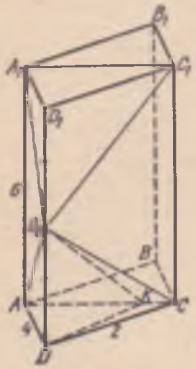


Рис. 38.

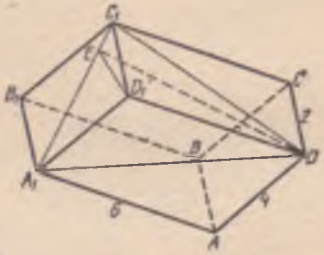


Рис. 39.

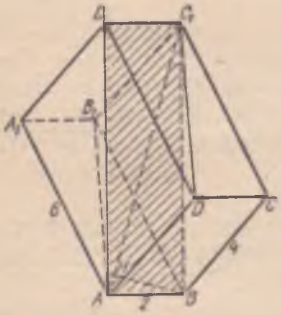


Рис. 40.

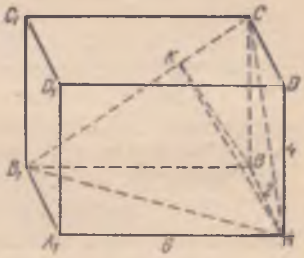


Рис. 41.

Указание. Вычисления ведутся с помощью счетной линейки и таблиц тригонометрических функций.

Ценность рассмотренных упражнений заключается в том, что содержание каждого из них тесно связано с предыдущими и получаемые при их решении результаты облегчают решение последующих; основные понятия и теоремы стереометрии учениками повторяются путем изучения конкретной геометрической фигуры.

5. Построение сечений многогранников плоскостью

В литературе описаны различные конструктивные методы построения сечений многогранников плоскостью. Коротко опишем сущность этих методов.

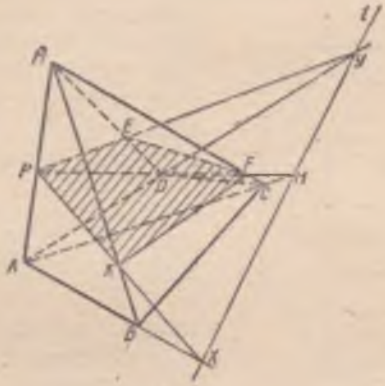


Рис. 42.

Метод следов. Строится прямая l (след) пересечения секущей плоскости с плоскостью основания пирамиды (призмы). Находятся точки пересечения прямой l с плоскостями боковых граней и диагональных сечений пирамиды (призмы). Эти точки вместе с данными точками секущей плоскости определяют прямые, которым принадлежат стороны (диагонали) искомого сечения.

Пример. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABC$ (рис. 42). Точка $P \in [AM]$, $E \in [MD]$, $K \in [MB]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью PKE.

Для построения следа l секущей плоскости PKE с плоскостью основания $ABCD$ пирамиды необходимо найти две точки, принадлежащие плоскостям PKE и ABC.

Строим точки $Y = (PE) \cap (AD)$ и $X = (PK) \cap (AB)$.

Прямая XY является следом l, так как точки X и Y принадлежат плоскостям ABC и PKE.

Для построения точки пересечения секущей плоскости с ребром CM (или его продолжением) найдем точку H пересечения следа l с плоскостью ACM (этой плоскости принадлежит прямая CM).

Очевидно, точка $H = l \cap (AC)$.

Строим точку $F = (PH) \cap (MC)$.

Четырехугольник $PEFK$ — искомое сечение.

Метод деления n-угольной пирамиды (призмы) на треугольные пирамиды (призмы). Из данной n-угольной призмы (пирамиды) выделяется та треугольная призма (пирамида) π, на боковых ребрах которой лежат точки, определяющие искомое сечение. Строится сечение этой треугольной призмы (пирамиды). Строятся сечения тех треугольных призм (пирамид), которые имеют общие части с фигурой π.

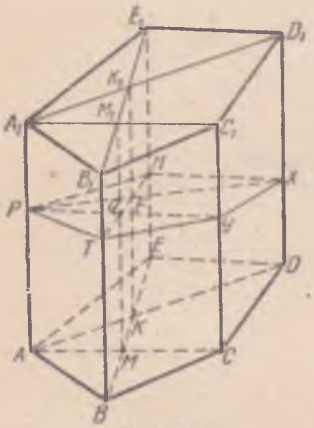


Рис. 43.

Пример. Дано изображение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 43). Точка $P \in [AA_1]$, $H \in [EE_1]$, $T \in [BB_1]$. Постройте сечение призмы плоскостью PHT.

Замечаем, что треугольник PHT является сечением треугольной призмы $ABEA_1B_1E_1$. С этой призмой имеют общие части призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $ADEA_1D_1E_1$.

Обозначим $M = (AC) \cap (BE)$, $K = (AD) \cap (BE)$, $M_1 = (A_1C_1) \cap (B_1E_1)$, $K_1 = (A_1D_1) \cap (B_1E_1)$.

Очевидно, отрезок MM_1 является пересечением боковых граней ACC_1A_1 и BEE_1B_1 призм $ABCA_1B_1C_1$ и $ABEA_1B_1E_1$. Поэтому существует точка $Q = (TH) \cap (MM_1)$.

Теперь понятно, что треугольник PTY ($Y = (PQ) \cap (CC_1)$) является сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью PHT.

На основании аналогичных рассуждений получаем

$$F = (TH) \cap (KK_1) \quad \text{и} \quad X = (PF) \cap (DD_1).$$

Треугольник PHX — сечение призмы $ADEA_1D_1E_1$ плоскостью PTH.

Пятиугольник $PTYXH$ — искомое сечение.

Метод дополнения n-угольной пирамиды (призмы) до треугольной пирамиды (призмы). Данная призма (пирамида) достраивается до треугольной призмы (пирамиды). Строится сечение полученной треугольной призмы (пирамиды). Искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы (пирамиды).

Пример. Дано изображение пятиугольной пирамиды $MABCDE$ (рис. 44). Точка $F \in [AM]$, точка $T \in [MC]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью FBT.

Строим $P = (BC) \cap (DE)$, $K = (AB) \cap (DE)$.

Соединяем отрезками точки M и K, P и M и получаем треугольную пирамиду $MKBP$, частью которой является данная пятиугольная пирамида.

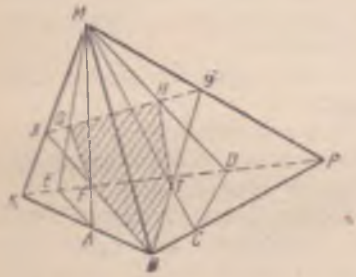


Рис. 44.

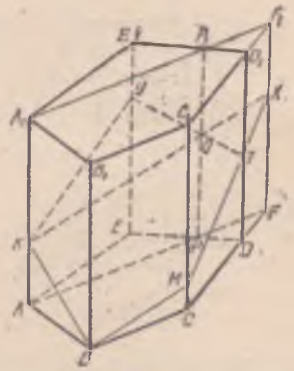


Рис. 45.

Строим сечение пирамиды $MKBP$ плоскостью FBT.

$$X = (FB) \cap (KM),\ Y = (BT) \cap (MP).$$

Треугольник XYB — сечение пирамиды $MKBP$ плоскостью FBT. Получаем $Q = (EM) \cap (XY)$, $H = (MD) \cap (XY)$.

Пятиугольник $QHTBF$ — искомое сечение данной пятиугольной пирамиды.

Метод параллельных прямых. В основу метода положено свойство параллельных плоскостей «Прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельны между собой».

Поясним сущность этого метода примером.

Пример. Дано изображение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 45). Точка $K \in [AA_1]$, точка $M \in [CC_1]$. Постройте сечение призмы плоскостью KBM.

Через ребро AA_1 проводим плоскость α, параллельную грани BCC_1B_1. Получаем

$$P = (ED) \cap \alpha,\ P_1 = (E_1D_1) \cap \alpha,$$
$$F = (CD) \cap \alpha,\ F_1 = (C_1D_1) \cap \alpha.$$

Очевидно, $(A_1F_1) \parallel (B_1C_1)$ и $(AF) \parallel (BC)$.

Так как α параллельна грани BCC_1B_1, то секущая плоскость KBM пересечет плоскость α по прямой $(KX) \parallel (BM)$ $(X \in [FF_1])$. Получаем $O = (PP_1) \cap (KX)$, $T = (MX) \cap \cap (DD_1)$, $Y = (EE_1) \cap (TO)$.

Пятиугольник $KBMTY$ — искомое сечение данной призмы.

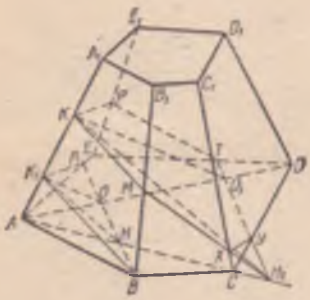


Рис. 46.

Метод переноса секущей плоскости. Сначала строится такое вспомогательное сечение данного многогранника, которое удовлетворяет следующим требованиям:

а) оно параллельно секущей плоскости;

б) в пересечении с поверхностью данного многогранника образует треугольник.

После этого искомое сечение строится на основании свойств прямых, по которым две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью.

Пример. Дано изображение пятиугольной усеченной пирамиды $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 46). Точка $K \in [AA_1]$, $M \in [BB_1]$, $P \in [EE_1]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью KPM.

Строим

$$(BK_1) \parallel (KM), (K_1P_1) \parallel (KP).$$

Получаем треугольник K_1P_1B, который является сечением данной усеченной пирамиды. Причем плоскости K_1P_1B и KPM параллельны. Имеем $O = (AD) \cap (P_1B)$, $H = (P_1B) \cap \cap (AC)$.

Через точку K проводим прямые l и f, соответственно параллельные (K_1O) и (K_1H). Получаем

$$O_1 = l \cap (AD),\ H_1 = f \cap (AC),\ X = (CC_1) \cap (MH_1),$$
$$Y = (CD) \cap (O_1H_1),\ T = (ED) \cap (O_1H_1).$$

Пятиугольник $KMXYTP$ — искомое сечение.

Можно выделить несколько этапов ознакомления учащихся IX—X классов с рассмотренными выше конструктивными задачами.

1. При изучении аксиом стереометрии построение сечений выполняется исключительно на основе этих аксиом. Главное назначение этих построений — развитие пространственного воображения и отработка техники отыскания точки пересечения прямой и плоскости. Система таких упражнений описана в п. 1, гл. II.

2. При повторении темы «Параллельность прямых и плоскостей» сечения строятся на основании свойств параллельных плоскостей. Особенно часто используется теорема о прямых, по которым пересекаются две параллельные плоскости третьей плоскостью. Построения выполняются в основном на изображениях куба и параллелепипеда (у этих многогранников противоположные грани расположены в параллельных плоскостях).

3. Построение сечений при повторении темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» дает возможность учащимся не только глубоко усвоить основные вопросы этой темы, но и ознакомиться со многими важными свойствами призм и пирамид.

При повторении раздела «Параллельные и ортогональные прямые и плоскости» можно использовать упражнения 16—20 (п. 2, гл. II).

4. В теме «Многогранники, их поверхности и объемы» построение сечений выполняется на основании свойств конкретных пирамид и призм. Изображения пространственных и плоских фигур, выполненные по всем правилам параллельной проекции, предостерегают учащихся от серьезных ошибок при решении самых различных задач на вычисление.

2 Зак. 874

Глава II

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ И РЕШЕНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ В IX—X КЛАССАХ

1. Основные понятия стереометрии. Аксиомы

Задачи на построение сечений являются средством развития конструктивного мышления. Мы полностью разделяем мысль А. Фуше* о том, что «... не следует приступать к рассмотрению параллельных прямых, прежде чем ученики не сумеют определить и правильно нарисовать сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, определенной тремя точками K, L, M, соответственно расположенными на трех ребрах AB, BC, CD (рис. 47).

Конструктивные задачи, решение которых основывается только на аксиомах стереометрии, должны предшествовать изучению свойств параллельных прямых и плоскостей. «В самом деле, изучение параллельных прямых требует применения перспективы и бесчисленных теорем со сложными доказательствами, что особенно усугубляет главную трудность, которая заключается в необходимости видеть фигуру в пространстве и строить ее. Кроме того, навыки, приобретаемые решением задач на построение, дают еще то большое преимущество, что ученики начинают отличать различные плоскости, хорошо представлять себе скрещивающиеся прямые, и это очень помогает им ориентироваться в запутанных переплетениях технических доказательств, используемых в курсе»**.

В процессе решения задач на построение сечений можно развивать умение учащихся различать пространственные фигуры по их размерам, форме и взаимному положению.

---

* Фуше А. Педагогика математики. М., 1969, с. 120.

** Там же, с. 120, 121.

Ниже описывается система упражнений на построение сечений, которые целесообразно рассмотреть с учениками сразу же после изучения аксиом стереометрии.

Построение сечений выполняется на знакомых учащимся изображениях куба, прямоугольного параллелепипеда, треугольных и четырехугольных пирамид. Первые восемь задач решаются методом следов, следующие четыре — методом деления четырехугольной пирамиды на треугольные пирамиды, последние три задачи — методом дополнения четырехугольной пирамиды до треугольной пирамиды.

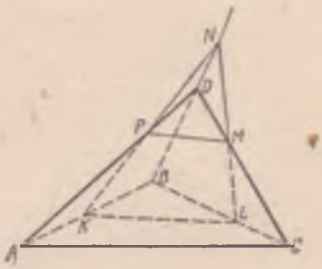


Рис. 47.

1. Дано изображение треугольной пирамиды $DABC$. Положение точек M и K относительно пирамиды показано на рисунке 48. Постройте точку X пересечения прямой MK с плоскостью ABC.

Ответ. Рис. 49, $X = (MK) \cap (AC)$.

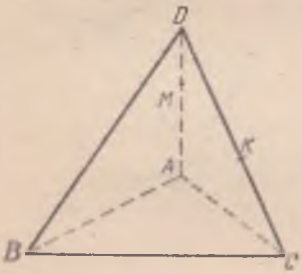


Рис. 48.

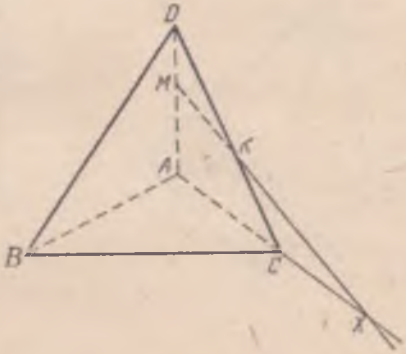


Рис. 49.

2. На рисунке 50 изображена треугольная пирамида $DABC$. Точки K, M и P принадлежат соответственно ребрам AD, DC и CB. Постройте прямую f, по которой пересекаются плоскости ABC и KMP.

Ответ. Рис. 51, $f = (PE)$, где $E = (KM) \cap (AC)$.

3. На изображении треугольной пирамиды $DABC$

(рис. 52) постройте прямую f пересечения плоскости KMP плоскостью DAB.

Ответ. Рис. 53, $f = (XY)$, где $X = (KM) \cap (DA)$, $Y = (KP) \cap (DB)$.

4. Дано изображение треугольной пирамиды $KPMA$ (рис. 54). Точка $X \in (PM)$, $Y \in (PA)$, $B \in [AK]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью BXY.

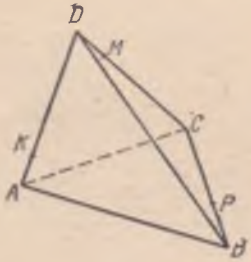


Рис. 50.

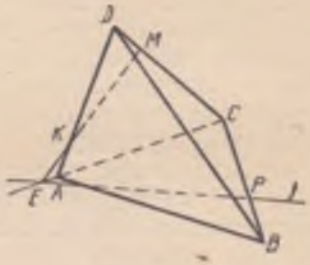


Рис. 51.

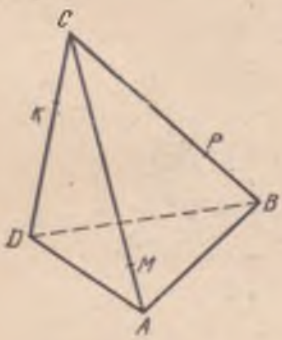


Рис. 52.

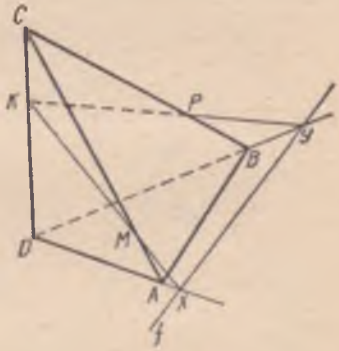


Рис. 53.

Ответ. Треугольник BED (рис. 55), где $E = (PK) \cap \cap (BY)$, $D = (XE) \cap (KM)$.

5. Дано изображение треугольной пирамиды $DABC$ (рис. 56). Точка $M \in [DA)$, $P \in [DC]$, $K \in [DB]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью KPM.

Ответ. Четырехугольник $XKPY$ (рис. 57), где $X = (MK) \cap (AB)$, $Y = (AC) \cap (MP)$.

6. Дано изображение треугольной пирамиды $DABC$ (рис. 58). Точка $K \in (BD)$, $P \in [AD]$, $M \in (DC)$. Постройте сечение пирамиды плоскостью MPK.

Ответ. Треугольник XYP (рис. 59), где $Y = (PK) \cap \cap (AB)$, $X = (AC) \cap (PM)$.

7. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 60).

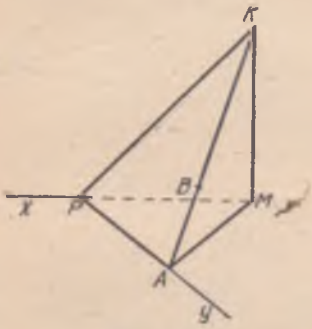


Рис. 54.

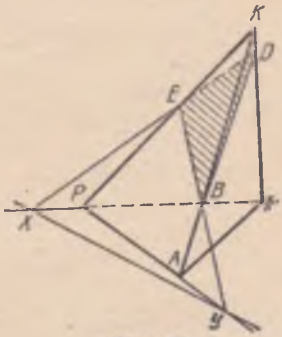


Рис. 55.

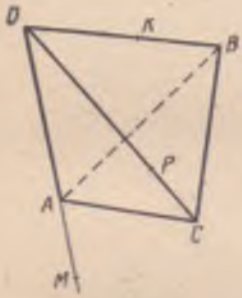


Рис. 56.

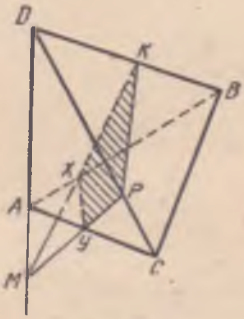


Рис. 57.

Точка $P \in [DC)$, $M \in [D_1C_1]$. Постройте сечение куба плоскостью APM.

Ответ. Пятиугольник $AHMYX$ (рис. 61), где $X = (AP) \cap (BC)$, $Y = (PM) \cap (CC_1)$, $E = (MP) \cap (DD_1)$, $H = (A_1D_1) \cap (EA)$.

8. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 62). Точка $P \in [DB]$, $M \in [D_1B]$. Постройте сечение куба плоскостью AMP.

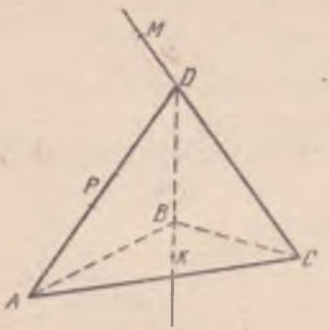


Рис. 58.

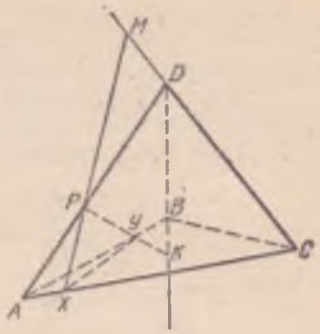


Рис. 59.

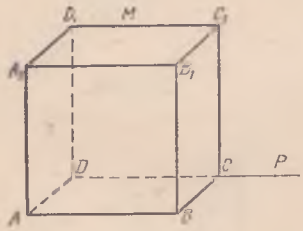


Рис. 60.

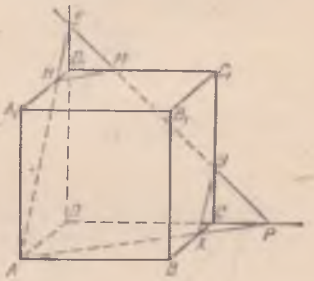


Рис. 61.

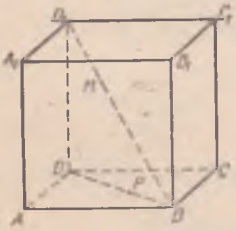


Рис. 62.

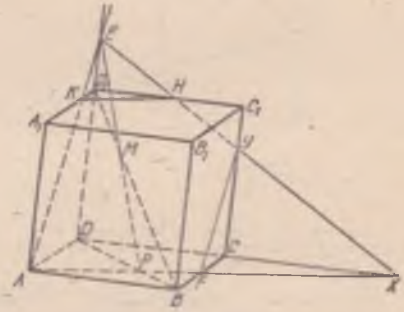


Рис. 63.

Ответ. Пятиугольник $AKHYF$ (рис. 63), где $E = (MP) \cap (DD_1)$, $F = (BC) \cap (AP)$, $X = (AP) \cap (DC)$, $Y = (CC_1) \cap (XE)$, $H = (D_1C_1) \cap (EX)$, $K = (A_1D_1) \cap (AE)$.

9. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 64). Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости AMC и BMD.

10. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 65). Точка $P \in (MO)$, где $(OM)=(AMC) \cap \cap (BMD)$. Постройте сечение пирамиды плоскостью ABP.

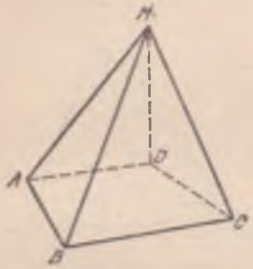


Рис. 64.

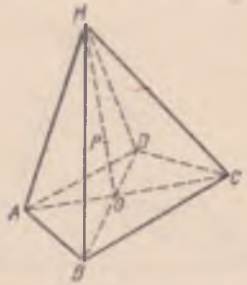


Рис. 65.

Ответ. Четырехугольник $ABYX$ (рис. 66), где $Y = (AP) \cap (MC)$, $X = (BP) \cap (MD)$.

11. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 67). Точка $P \in (AM)$, $K \in (MD)$, $E \in (BM)$;

Рис. 66.

Рис. 67.

а) постройте точку $X = (PKE) \cap (AMC) \cap (MBD)$;

б) постройте сечение пирамиды плоскостью PKE.

Указание. Постройте отрезок, по которому пересекаются диагональные сечения пирамиды. Теперь см. задачу 10.

12. Дано изображение четырехугольной пирамиды

$MABCD$ (рис. 68). Точка $O = (AC) \cap (BD)$, $P \in (CM)$, $E \in (MD)$. Постройте сечение пирамиды плоскостью POE.

Ответ. Четырехугольник $KYEX$ (рис. 69), где $X = (CD) \cap (PE)$, $K = (AB) \cap (OX)$, $Y = (PO) \cap (AM)$.

13. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 70). Постройте прямую f, по которой пересекаются плоскости ADM и BCM.

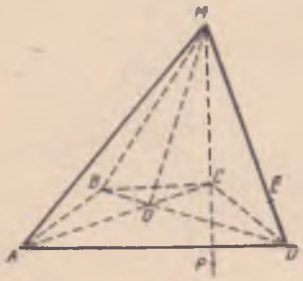


Рис. 68.

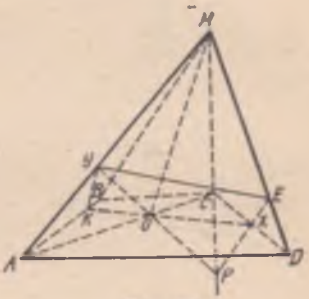


Рис. 69.

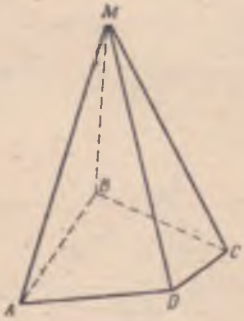


Рис. 70.

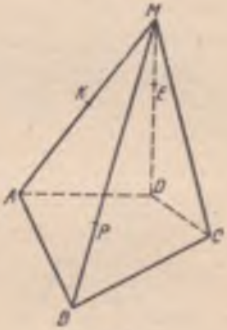


Рис. 71.

Ответ. $f = (MX)$, где $X = (BC) \cap (AD)$.

14. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 71). Точка $K \in (AM)$, $E \in (MD)$, $P \in (BM)$:

а) постройте прямую $f = (ADM) \cap (BCM)$;

б) постройте точку X пересечения прямой f с плоскостью KEP;

в) постройте сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью KPE.

Ответ. Четырехугольник $PKEY$ (рис. 72).

15. Дано изображение пятиугольной пирамиды $MABCDE$ (рис. 73). Точка $P \in (AM)$, $K \in (MC)$. Постройте сечение пирамиды плоскостью BPK.

Ответ. Пятиугольник $BPYLK$ (рис. 74).

Решение. $F = (BC) \cap (DE)$, $H = (AB) \cap (DE)$, $X = (HM) \cap (BP)$, $T = (BK) \cap (MF)$, $Y = (EM) \cap \cap (XT)$, $L = (DM) \cap (XT)$.

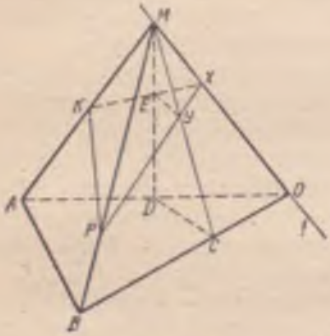


Рис. 72.

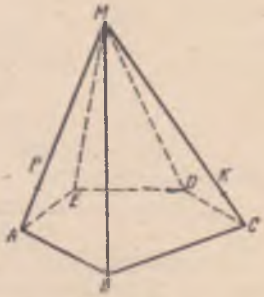


Рис. 73.

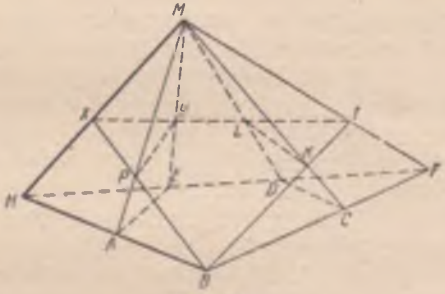


Рис. 74.

2. Применение свойств параллельных проекций в теме «Параллельность в пространстве»

Со свойствами параллельных проекций и правилами изображений пространственных фигур ученики знакомятся после изучения темы «Параллельность в пространстве». Отмеченные свойства обосновываются соответствующими теоремами из этой темы.

На основе этих свойств выполняются все построения на изображениях плоских и неплоских фигур.

Можно утверждать, что для построения проекции любого многогранника достаточно построить проекции его вершин и соединить их отрезками. Но при этом нужно иметь в виду, что проекция не всякого многогранника может уместиться на данном листе бумаги (или на классной доске). Как правило, строят не проекцию многогранника-оригинала, а подобного ему многогранника.

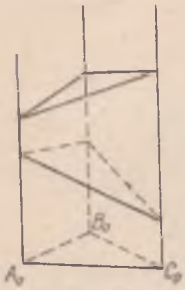


Рис. 75.

Проекция фигуры, подобной фигуре-оригиналу, называется изображением.

Учащиеся часто не различают эти два понятия, поэтому уже при изображении простейших плоских и пространственных фигур следует объяснить им, в чем разница между проекцией и изображением геометрических фигур.

Прежде чем переходить к решению конструктивных задач на проекционном чертеже, нужно ознакомить учащихся с тем, какие плоские фигуры можно принимать за изображение треугольника (в частности, прямоугольного и правильного), правильного шестиугольника, тетраэдра, куба, прямоугольного и наклонного параллелепипедов. Ученики уже знают, что за изображение любого параллелограмма можно принять любой параллелограмм. В дальнейшем, при изучении многогранников и круглых тел, они узнают, как изображаются правильная четырехугольная и шестиугольная пирамиды, шар, конус и цилиндр.

В результате рассмотрения теней модели произвольного треугольника учащиеся приходят к предположению, что его проекцией может быть треугольник любой формы. Но, изучая каркасные модели (рис. 75), можно получить гипотезу, что данный треугольник $A_0B_0C_0$ в плоскости проекций α может служить изображением бесчисленного множества любых по своей форме треугольников (доказательство этого утверждения приведено ниже).

Контрольные вопросы

1. Правильный треугольник расположен в плоскости, параллельной плоскости проекций α. Установите форму треугольника, который является проекцией данного.

2. Стороны треугольника ABC относятся как $3:5:7$. Какой треугольник можно принять за его изображение, если стороны $\triangle ABC$ параллельны плоскости проекций α?

После этого учителем доказывается **теорема**.

Изображением любого треугольника может быть любой треугольник плоскости проекций.

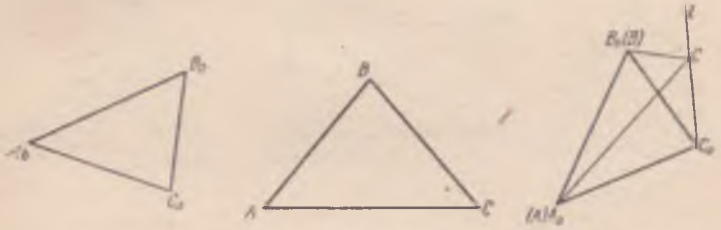


Рис. 76. Рис. 77. Рис. 78.

Доказательство. Пусть на плоскости проекций (рис. 76) изображен некоторый треугольник $A_0B_0C_0$. Пусть дан некоторый треугольник ABC (рис. 77). Возможны два случая.

1. Одна из сторон треугольника ABC (например, AB) равна одной из сторон треугольника $A_0B_0C_0$ (например, A_0B_0). Размещаем в пространстве треугольник ABC так, что его сторона AB совмещается со стороной A_0B_0 треугольника $A_0B_0C_0$, а вершина C не лежит в плоскости проекций α (рис. 78). Соединяем отрезком точки C и C_0. Теперь ясно, что если за направление проецирования (l) принять прямую CC_0, то треугольник $A_0B_0C_0$ будет параллельной проекцией треугольника ABC, причем $A = A_0$ и $B = B_0$.

2. Ни одна из сторон треугольника ABC не равна ни одной стороне треугольника $A_0B_0C_0$. В этом случае преобразовываем треугольник ABC в такой подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы одна из сторон треугольника $A_1B_1C_1$ была бы равна одной из сторон треугольника $A_0B_0C_0$. После этого показывается, что треугольник $A_0B_0C_0$ является проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, изображением треугольника ABC.

Контрольные вопросы

1. На рисунке 79 в натуральную величину показан правильный треугольник ABC. Каждая его сторона точками

P, K, D, E, F и M разделена на три равные части. Какими свойствами обладает шестиугольник $PKDEFM$?

2. Постройте произвольный треугольник $A_0B_0C_0$ и примите его за изображение показанного на рисунке 79 треугольника ABC. Постройте на сторонах треугольника $A_0B_0C_0$ изображение точек P, K, D, E, F, M.

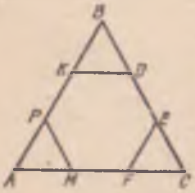


Рис. 79.

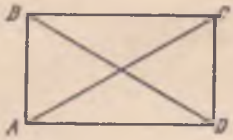


Рис. 80.

Рис. 81.

3. Можно ли принять шестиугольник $P_0K_0D_0E_0F_0M_0$ за изображение правильного шестиугольника $PKDEFM$?

4. Правильный шестиугольник его диагоналями можно разделить на шесть конгруэнтных правильных треугольников. Исходя из этого свойства, предложите другой способ построения изображения правильного шестиугольника.

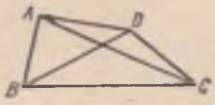


Рис. 82.

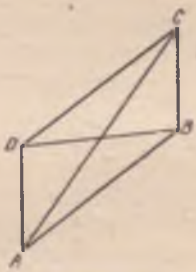


Рис 83.

Теорема Польке — Шварца (за изображение любой наперед заданной треугольной пирамиды можно принять любой четырехугольник вместе с его диагоналями) в школе не доказывается. Она сообщается ученикам без доказательства, а содержание ее раскрывается при помощи каркасной модели треугольной пирамиды и ее теней на некоторую плоскость (рис. 80—83). Для этой цели лучше всего использовать шарнирную модель пирамиды. Меняя положение модели пирамиды относительно плоскости проекции и относитель-

но падающих на нее лучей, можно показать, что проекцией одной и той же треугольной пирамиды могут быть различные четырехугольники (вместе с их диагоналями). Следует также показать, что при определенном положении модели ее проекцией может быть и вырожденный (в треугольник) четырехугольник.

При помощи модели (рис. 84) можно показать, что один и тот же четырехугольник (вместе с его диагоналями) может быть изображением самых различных по форме треугольных пирамид, в том числе и правильных.

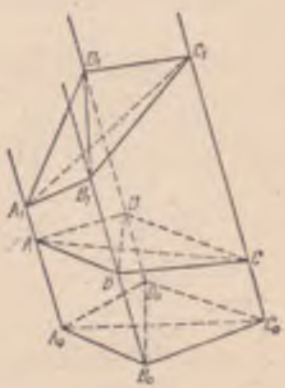


Рис. 84.

С изображениями других плоских и пространственных фигур и построениями на них ученики знакомятся в процессе работы над следующими упражнениями, которые предназначены для повторения свойств параллельных прямых, плоскостей и их проекций.

Теперь переходим к описанию системы конструктивных задач на применение свойств прямых и плоскостей и их параллельных проекций.

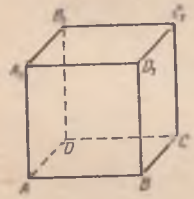


Рис. 85.

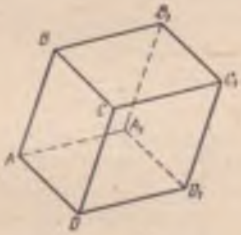


Рис. 86.

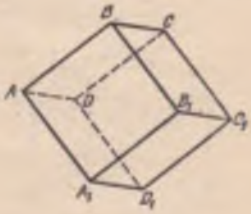


Рис. 87.

1. Дана модель куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 85). Известно, что все грани куба конгруэнтные квадраты. На основании признака параллельности плоскостей докажите, что противоположные грани куба параллельны.

2. Известно, что проекция плоской фигуры на плоскость, параллельную плоскости фигуры, есть фигура, конгруэнтная данной. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 30 мм.

На рисунках 86—97 показаны различные проекции этого куба, по-разному расположенного в пространстве относительно плоскости проекций:

а) назовите изображения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, две грани которого параллельны плоскости проекций;

б) назовите изображения куба, грани которого не параллельны плоскости проекций;

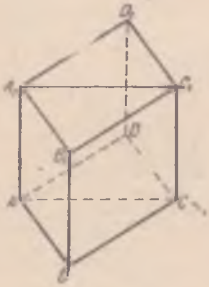


Рис. 88.

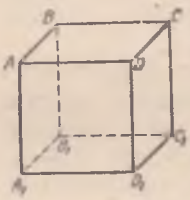


Рис. 89.

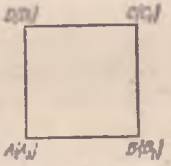


Рис. 90.

в) на рисунке 88 изображен куб, диагональное сечение AA_1C_1C которого параллельно плоскости проекций. Расскажите, как строилось такое изображение куба;

г) каким отрезкам (ребрам, диагоналям и т. п.) параллельно направление проецирования (рис. 90—93, 95, 96)?

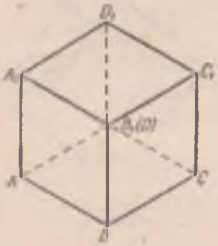


Рис. 91.

Рис. 92.

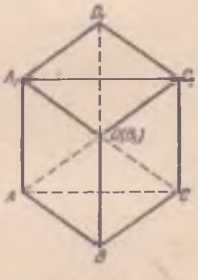


Рис. 93.

3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 30 мм. Постройте его изображение, если плоскость проекции параллельна:

а) грани $ABCD$;

б) треугольнику ABK (K — середина ребра B_1C_1);

в) треугольнику A_1DB;

г) диагональное сечение AA_1C_1C и направление проецирования параллельно прямой MB_1 (точка M принадлежит диагонали A_1C куба и $|A_1M| : |MC| = 4 : 1$);

д) треугольник A_1C_1B и направление проецирования параллельно прямой B_1D.

Ответы на рисунках 98—102.

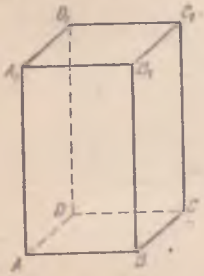


Рис. 94

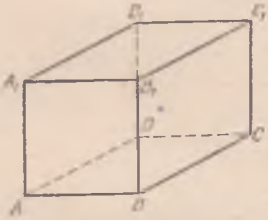


Рис. 95.

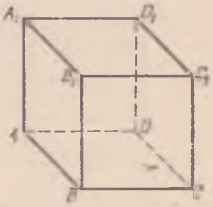


Рис. 96.

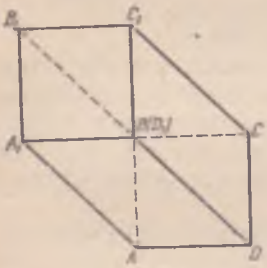


Рис. 97.

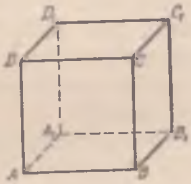


Рис. 98.

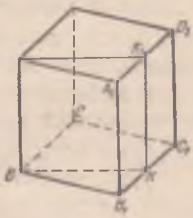


Рис. 99.

Рис. 100.

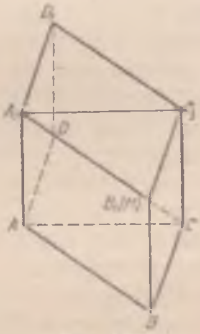


Рис. 101.

Рис. 102.

4. На рисунке 103 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, одна из граней которого параллельна плоскости проекций. Точка F — середина $[A_1B_1]$; E — середина $[B_1C_1]$. Постройте на этом изображении:

а) медиану B_1T треугольника FBB_1;

б) медиану DM треугольника DA_1D_1;

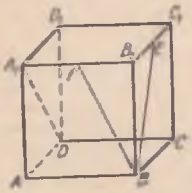


Рис. 103.

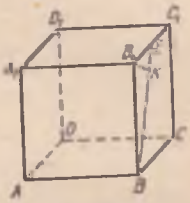


Рис. 104.

в) высоту B_1H треугольника BB_1F;

г) высоту B_1K треугольника BB_1E;

д) биссектрису B_1N треугольника BB_1F;

е) биссектрису B_1L треугольника BB_1E.

Умение выполнять построения основных элементов треугольника (высоты, медианы, биссектрисы) на его проекционном чертеже важно, так как эти конструктивные операции являются составной частью большинства задач на изображениях пространственных фигур (подробно об этом говорится в п. 3 этой главы).

Решая задачу 4, необходимо обратить внимание учащихся на то, что если плоская геометрическая фигура (в данном случае треугольник) расположена параллельно плоскости проекций, и, следовательно, она изображена без искажения своей формы, то построения на ней выполняются по правилам, применяемым и в планиметрии. В нашей задаче так выполняются построения на треугольнике BB_1F. Если плоская фигура (в нашей задаче — треугольники DA_1D_1 и BB_1E) не параллельна плоскости проекций и изображается неподобной ей фигурой, то построения на ней нельзя выполнять так, как это делалось в планиметрии. В этом случае для решения задачи мы должны применить свойства параллельных проекций и некоторые свойства тех элементов, которые нам нужно построить.

Поясним сказанное пунктами в) и г) задачи 4.

Высоту B_1H для треугольника BB_1F можно построить с помощью угольника. Для треугольника BB_1E только

этим инструментом задачу решить нельзя, хотя треугольники BB_1F и BB_1E конгруэнтны. Поэтому, после выполнения учащимися пункта в), следует предложить им путем непосредственных измерений найти отношение отрезков FH и HB и сравнить его с отношением катетов FB_1 и B_1B. Это даст возможность учащимся вспомнить теорему, которая символически записывается так:

$$|FB_1|^2 : |B_1B|^2 = |FH| : |HB|.$$

Некоторые учащиеся пункт г) пытаются выполнять при помощи угольника. Чтобы они убедились в ошибке, можно предложить измерить отрезки EK и KB и найти их отношение.

Таким образом, чтобы построить изображение высоты B_1K треугольника B_1BE, необходимо сначала найти, в каком отношении точка K делит его гипотенузу BE (в нашем случае $|EK| : |KB| = 0{,}5^2 : 1^2 = 1 : 4$). После этого с помощью миллиметровой линейки делим отрезок BE (рис. 104) в отношении 1 : 4. Перед этим нужно напомнить учащимся, что отношение отрезков, расположенных на одной прямой, равно отношению их проекций.

Аналогичным образом ведется работа и над пунктами д) и е). Построения ученики выполнят самостоятельно, нужно только им напомнить о том, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит его противоположную сторону на части, пропорциональные его прилежащим сторонам.

Прежде чем переходить к построению параллельных прямых и плоскостей, нужно отработать с учениками навыки нахождения точки пересечения прямой и плоскости.

В силу недостаточно развитого пространственного воображения девятиклассники допускают частые ошибки. Без построения точки пересечения прямой и плоскости не обходится решение большинства конструктивных задач на проекционном чертеже.

Для того чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости α, нужно построить прямую пересечения произвольной вспомогательной плоскости π, которой принадлежит данная прямая, с плоскостью α. Искомая точка находится как точка пересечения данной прямой с прямой, по которой пересекаются плоскости π и α. Но для определения линии пересечения плоскостей π и α нужно иметь две ее точки.

Отсюда ясно, что обе задачи (построение точки пересе-

чения прямой с плоскостью и построение линии пересечения двух плоскостей) взаимосвязаны. Поэтому:

а) сначала следует решать задачи на построение точки пересечения прямой и плоскости на проекционных чертежах, на которых уже показана линия пересечения данной и вспомогательной плоскостей;

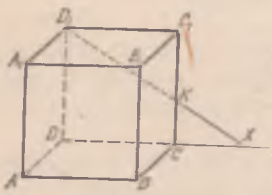


Рис. 105.

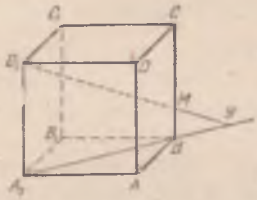


Рис. 106.

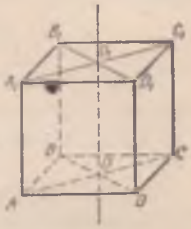


Рис. 107.

б) задачи на построение должны чередоваться с задачами, требующими анализа данного изображения фигуры, установления общих элементов ее составных частей;

в) нужно широко использовать свойства тех фигур, на изображении которых решаются конструктивные задачи.

Исходя из этого и составлена следующая система упражнений на построение общих элементов прямых и плоскостей.

5. На рисунках 105—109 даны изображения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

а) точка $X \in (DC)$ (рис. 105). Назовите те ребра куба, которые пересекает прямая D_1X;

б) точка $Y \in (A_1B)$ (рис. 106). Пересекается ли прямая D_1Y с прямой CB?

в) точки $O = (AC) \cap (BD)$, $O_1 = (A_1C_1) \cap (B_1D_1)$ (рис. 107). Почему $(OO_1) = (ACC_1) \cap (BDD_1)$?

г) есть ли общая точка у прямых CA_1 и AC_1 (рис. 108)?

д) точка F принадлежит грани ABB_1A_1 (рис. 109). Отрезок EE_1 проходит через точку F и параллелен (BB_1). Докажите, что точка H пересечения прямой D_1F с плоскостью грани $ABCD$ лежит на прямой DE.

6. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 110). Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и A_1AC. Постройте точку X пересечения прямой AM (M — середина $[C_1C]$) с плоскостью $A_1B_1C_1$.

7. Точка H — середина ребра C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 111). Нужно построить точку $X = (DC) \cap (BB_1H)$.

Ученик через H провел прямую $h \parallel (CC_1)$ и получил $X = h \cap (DC)$. Какими свойствами куба и параллельных проекций он воспользовался?

8. Точка P принадлежит ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую $f = (A_1B_1C_1) \cap (DBP)$.

9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения прямой D_1B с плоскостью A_1C_1C.

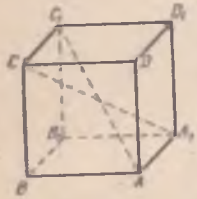


Рис. 108.

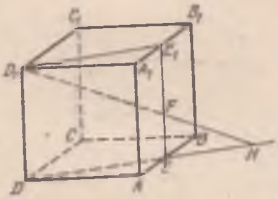


Рис. 109.

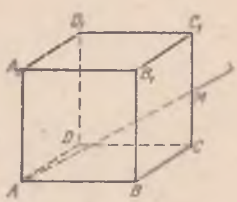


Рис. 110.

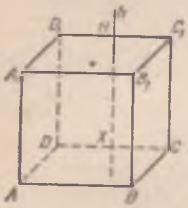


Рис. 111.

Рис. 112.

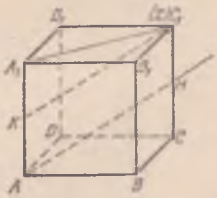


Рис. 113.

10. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$, у которой ребра AD и BC непараллельны (рис. 112). Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости MAD и BCM.

11. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 113). Точка H — середина ребра CC_1, точка $K \in [A_1A]$. Через K проходит прямая $f \parallel (AH)$. Постройте точку $X = f \cap (A_1B_1C_1)$.

12. K — произвольная точка ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и H — середины ребер AB и AD (рис. 114). Постройте прямую k пересечения плоскостей MHK и DBB_1.

13. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$. ($ABCD$ — ее основание). Точка K— середина ребра AM. Через K проходит плоскость β, параллельная

плоскости ABC. Постройте точки пересечения β с ребрами BM, CM и DM этой пирамиды.

14. Взяли произвольный простой четырехугольник $ABCD$. Через вершину A (вне плоскости четырехугольника) провели произвольный луч a. Через точки B, C и D провели лучи b, c, d, сонаправленные a (рис. 115). На этих лучах отложили произвольные,

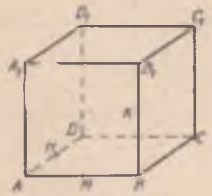


Рис. 114.

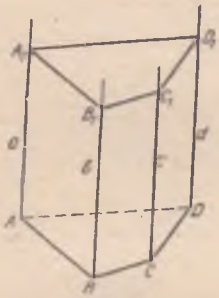


Рис. 115.

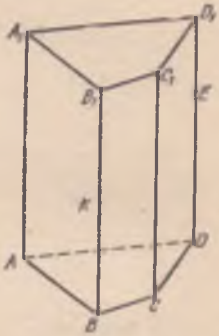


Рис. 116.

Рис. 117.

Рис. 118

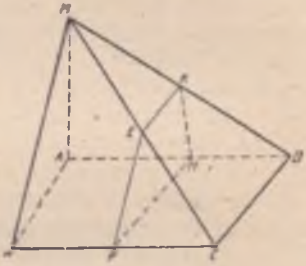


Рис. 119.

но конгруэнтные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Построили отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1D, D_1A_1. Полученная таким образом пространственная фигура называется четырехугольной призмой. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости и что плоскости, в которых находятся четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, параллельны.

15. Дано изображение некоторой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 116). Точка K — середина $[BB_1]$; $|D_1E| = |D_1D| : 3$. Постройте точку $X = (CC_1) \cap \cap (A_1KE)$.

При повторении раздела «Параллельные и ортогональные прямые и плоскости» можно использовать следующие задачи на построение сечений многогранников плоскостью. Главное их назначение — обучение учащихся комплексному использованию методов построения сечений, свойств прямых, плоскостей и их параллельных проекций.

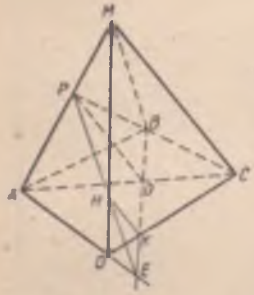


Рис. 120.

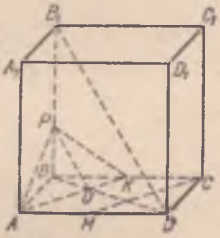


Рис. 121.

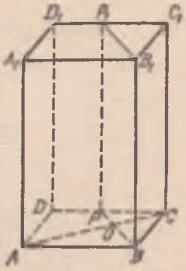


Рис. 122.

16. На рисунке 117 изображена четырехугольная пирамида $MABCD$. Ее основанием является параллелограмм $ABCD$. Точка X — середина $[MC]$. Построено сечение DBX этой пирамиды плоскостью DBX. Докажите, что прямая AM параллельна этому сечению.

17. Дано изображение треугольной пирамиды $DABC$. Точки X и Y середины ее ребер AB и BC. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую XY и параллельную ребру BD. Установите форму полученного в сечении многоугольника.

Ответ. Рис. 118. Параллелограмм $XKPY$.

Построение: $[XK] \parallel [DB]$, $[YP] \parallel [DB]$.

18. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K принадлежит $[AB]$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через K и параллельной ребрам AA_1 и B_1C_1.

19. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$. Ее основанием является трапеция $ABCD$ ($[AD] \parallel [BC]$). Точка E — середина $[MC]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через E и параллельной $[BM]$ и $[CD]$. Установите форму полученного сечения.

Ответ. Рис. 119. Трапеция $KEPH$.

Построение: $(EP) \parallel (BM)$, $(EK) \parallel (CD)$, $(PH) \parallel (CD)$.

20. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$. Четырехугольник $ABCD$ — ее основание. Точка K принадлежит внутренней части $[DC]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, K и параллельной $[MC]$.

Рис. 123.

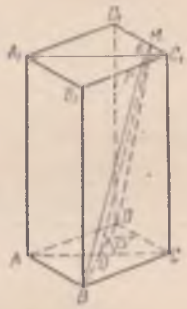


Рис. 124.

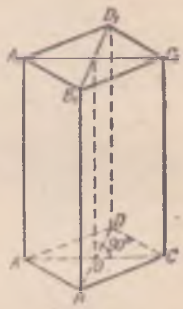


Рис. 125.

Ответ. Рис. 120. Четырехугольник $BPHK$.

Построение: $O = (BK) \cap (AC)$, $(PO) \parallel (MC)$, $E = (BK) \cap (AD)$, $H = (PE) \cap (MD)$.

21. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина $[AD]$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через вершину A и параллельной (MC) и (B_1D).

Ответ. Рис. 121. $\triangle AKP$.

Построение: $(AK) \parallel (MC)$. Точка $O = (AK) \cap \cap (BD)$, $(PO) \parallel (B_1D)$.

22. У прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $|AB| = 5\frac{1}{3}$, $|BC| = 4$, $|BB_1| = 7$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину B и перпендикулярной прямой AC. Определите площадь полученного сечения.

Ответ. Рис. 122. Прямоугольник BPP_1B_1; $[PB] \perp (AC)$. Положение точки P на ребре CD определяется из подобных треугольников ABC и PCB

$$|AB| : |BC| = |BC| : |CP|.$$

Отсюда $|CP| = 3$, $|PB| = 5$.

23. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно единице. Его сечение — треугольник, ортогональными проекциями которого на грани $ABCD$ и ABB_1A_1 являются треугольники ABD и ABA_1. Постройте это сечение. Определите его площадь.

Ответ. A_1BD.

24. Точка X принадлежит диагонали AC основания $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку X, параллельной BD и перпендикулярной плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$. При каком положении точки X на отрезке AC площадь сечения будет наибольшей? Существует ли такое положение точки X, при котором сечением куба будет квадрат?

25. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Причем его диагональное сечение ACC_1A_1 параллельно плоскости проекции (за плоскость проекций принимается плоскость чертежа). $|AB| = 2$, $|BC| = 2$, $|AA_1| = 4$. Плоскость проходит через прямую DB и образует с треугольником BDC двугранный угол α. Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью, если

а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 75°$; в) $\alpha = 90°$.

Ответы. Рис. 123, 124, 125.

26. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3 см. Точки K_1, K, M — середины его ребер A_1D_1, AD, AB;

а) постройте изображение этого куба, на котором четырехугольник CKK_1C_1 был бы показан без искажения своей формы;

б) докажите, что прямые KC и DM перпендикулярны;

в) на этом изображении постройте сечение куба плоскостью, проходящей через (MD) и образующей с треугольником ADM двугранный угол

1) 30°; 2) 120°.

Ответы. а) Рис. 126. Строим в натуральную величину прямоугольник KK_1C_1C, у которого

$$|CC_1| = 3 \text{ см}; \quad |KC| = \sqrt{|DC|^2 + |KD|^2} = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} \approx$$
$$\approx 3{,}3 \text{ (см)}.$$

Отмечаем на плоскости чертежа произвольную точку D. Строим $[DD_1] \parallel [KK_1]$ и $[DD_1] \cong [KK_1]$. На луче $[DK)$ откладываем $[AK] = [KD]$ и т. д.

в′) Строим $\widehat{POK} = 30°$ (рис. 127). Точки M, D, P определяют искомое сечение XMD, где $X = (PD) \cap (AA_1)$.

в″) Строим $\widehat{KOH} = 120°$ (рис. 128). Через H проводим прямую, параллельную (DM). В пересечении с (B_1C_1) и

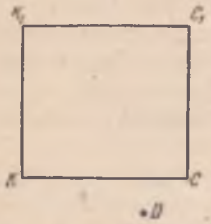


Рис. 126.

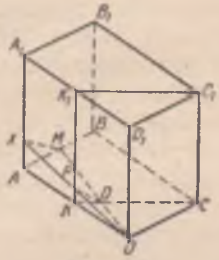


Рис. 127.

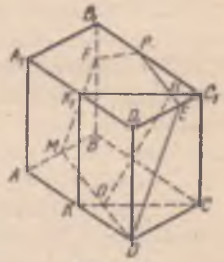


Рис. 128

(D_1C_1) получаем точки P и E. Строим $[MF] \parallel (DE)$. Пятиугольник $DMFPE$ — искомое сечение.

3. Некоторые свойства ортогональной проекции и их применение к решению задач

Если направление проецирования (l) перпендикулярно плоскости проекций α, то такая параллельная проекция называется ортогональной.

Рассмотрим важные свойства ортогональной проекции. Эти свойства находят применение при решении задач на вычисление площадей сечений многогранников плоскостью, определение элементов различных пространственных фигур и других задач.

I. Первое из этих свойств формулируется обычно в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть S — площадь некоторого многоугольника, S_0 — площадь его ортогональной проекции, φ — величина двугранного угла, образованного плоскостью данного многоугольника и плоскостью его проекции. Доказать, что

$$S = S_0 : \cos \varphi \qquad (1)$$

Рассмотрим некоторые примеры применения сформулированного в теореме I свойства ортогональной проекции.

В десятом классе ученики изучают теоремы:

а) боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы;

б) боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему;

в) боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей;

г) боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

Эти четыре теоремы можно объединить в одну, если использовать зависимость

$$S = \frac{S_o}{\cos \varphi}.$$

Объединенная теорема может быть записана в виде формулы

$$S = \frac{S_1 - S_2}{\cos \varphi}, \qquad (2)$$

где φ — угол, образуемый боковой гранью правильной пирамиды (в том числе и усеченной) с плоскостью ее нижнего основания, или угол наклона образующей конуса (в том числе и усеченного) к плоскости его нижнего основания; S_1 и S_2 — площади соответственно нижнего и верхнего оснований правильной усеченной пирамиды (усеченного конуса); для полного конуса и полной правильной пирамиды $S_2 = 0$; S — площадь боковой поверхности конуса (усеченного конуса) или правильной пирамиды (усеченной пирамиды).

С обобщенной формулой (2) учащихся следует ознакомить при повторении темы «Площади поверхностей многогранников и фигур вращения».

Теперь приведем доказательство зависимости (2).

1. Ортогональной проекцией вершины M правильной n-угольной пирамиды на плоскость ее основания $A_1A_2 \ldots A_n$ является центр O окружности, описанной около основания (рис. 129). Все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания (под углом φ). Все боковые грани и их проекции равновелики. Из сказанного непосредственно следует верность формулы (2) при $S_2 = 0$.

2. Основания усеченной пирамиды параллельны. Поэтому площадь S_1 нижнего основания правильной усеченной

пирамиды равна сумме площадей S_0 проекций ее боковых граней (на это основание) и площади S_2 ее верхнего основания (рис. 130). Следовательно,

$$S_0 = S_1 - S_2 \quad \text{и} \quad S = \frac{S_0 - S_2}{\cos \varphi}.$$

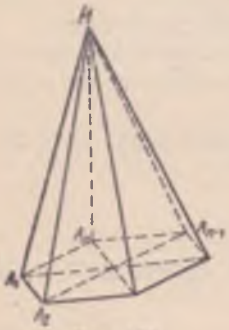


Рис. 129.

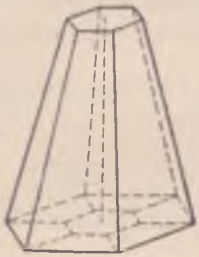


Рис. 130.

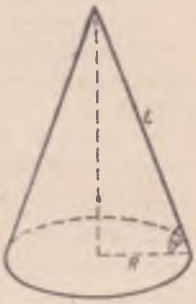


Рис. 131.

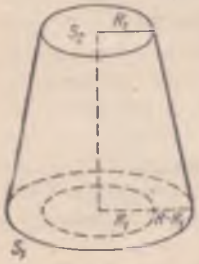


Рис. 132.

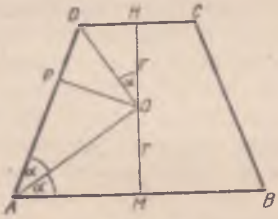


Рис. 133.

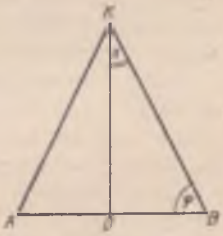


Рис. 134.

3. Площадь S боковой поверхности конуса выражается формулой

$$S = \pi RL, \tag{3}$$

где R — радиус основания конуса, L — его образующая (рис. 131).

Площадь S_0 основания конуса определяется по формуле

$$S_0 = \pi R^2. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) получаем

$$S = \pi RL = \pi R^2 \frac{L}{R} = \frac{S_0}{\cos \varphi}.$$

4. Аналогичным образом доказывается справедливость равенства (2) и для усеченного конуса (рис. 132)

$$S = \pi(R + R_1)L =$$

$$= \frac{\pi(R + R_1)\cdot(R - R_1)}{\cos\varphi} = \frac{\pi(R^2 - R_1^2)}{\cos\varphi} = \frac{\pi R^2 - R_1^2}{\cos\varphi} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi}.$$

Применение формулы (2) существенным образом упрощает решение многих стереометрических задач. Рассмотрим некоторые из них.

З а д а ч а 1. Боковая поверхность конуса равна S, а полная поверхность — P. Определите угол x между высотой и образующей.

Очевидно, $\varphi = 90° - x$, $S_1 = P - S$, $S_2 = 0$.

На основании равенства (2) имеем

$$\cos(90° - x) = \frac{P - S}{S} \text{ или } \sin x = \frac{P - S}{S}.$$

З а д а ч а 2. В усеченный конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к основанию под углом 2α. Определите боковую поверхность усеченного конуса.

На рисунке 133 изображено осевое сечение усеченного конуса и вписанного в него шара. Из чертежа ясно, что

$$R_1 = |AM| = r\,\mathrm{ctg}\alpha,\ R_2 = r\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Поэтому

$$S = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi} = \frac{\pi r^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha - \pi r^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\pi r^2}{\sin^2 2\alpha}.$$

З а д а ч а 3. Определите угол x между осью и образующей такого конуса, у которого полная поверхность P в n раз больше площади M осевого сечения.

На рисунке 134 изображено осевое сечение конуса.

$$M = S_{ABK} = 0{,}5 \cdot |AB| \cdot |OK| = |OB| \cdot |OB| \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = |OB|^2 \cdot \mathrm{tg}\,\varphi. \quad (5)$$

По условию задачи $P : M = n > 1$. (6)

Далее

$$S = P - S_1 \text{ или } P = S + S_1.$$

Но

$$S = \frac{S_1}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad S_1 = \pi\cdot|OB|^2.$$

Следовательно,

$$P = \frac{S_1}{\cos\varphi} + S_1 = S_1\cdot\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi} = \pi\cdot|OB|^2\cdot\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}. \quad (7)$$

Из равенств (5) — (7) получаем

$$n = \frac{\pi \cdot |OB|^2 \cdot \frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}}{|OB|^2 \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \pi \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{n}{\pi}$.

По смыслу задачи $0 < \frac{\varphi}{2} < 45°$.

Поэтому $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > 1$.

Следовательно, $n > \pi$.

Ответ. $x = 90° - \varphi$, где $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{n}{\pi}$ при $n > \pi$ (при $n < \pi$ задача решений не имеет).

Задача 4. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Определите полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

Указанная в задаче пирамида не является правильной, но ее боковые грани равновелики, так как основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей ромба. Поэтому при решении этой задачи может быть применена формула (2). Таким образом, задача свелась только к определению площади основания пирамиды.

Свойство параллельной проекции, записанное равенством (1), применяется и при решении задач на определение площадей сечений многогранников.

II. С зависимостями, которые существуют между острым углом и его ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости, можно ознакомить учащихся в процессе решения следующей серии упражнений*.

Два прямоугольных треугольника OC_1A_1 и OB_1C_1 имеют общую сторону OC_1 и образуют прямой двугранный угол. Причем $\widehat{OC_1A_1} = 90°$, $\widehat{OB_1C_1} = 90°$ (рис. 135). Обозначим $\widehat{A_1OC_1} = \beta$, $\widehat{B_1OC_1} = \alpha$, $\widehat{A_1OB_1} = \gamma$. Пусть A — линейный угол двугранного угла, образованного треугольниками

* Серия этих упражнений взята из работы автора «Задачи для повторения стереометрии в старших классах средней школы». Мн., 1973.

C_1OA_1 и OA_1B_1; B — линейный угол двугранного угла (A_1OB_1, OB_1C_1).

1. Назовите прямоугольные треугольники, изображенные на рисунке 135.

2. Какой из изображенных на рисунке 135 углов конгруэнтен $\angle B$?

3. Докажите, что $\angle A$ и $\angle B$ — острые.

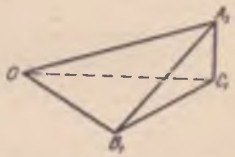


Рис. 135.

4. Обозначим $|OA_1| = a$. Тогда

$$|OB_1| = a \cdot \cos\gamma, \quad |OC_1| = a \times \cos\beta, \qquad (1')$$

$$\cos\alpha = |OB_1| : |OC_1| = \cos\gamma : \cos\beta, \qquad (1'')$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta. \qquad (1)$$

Назовите треугольники, из которых получились равенства (1), (1′), (1″).

5. Равенство (1) выражает зависимость между углами α, β и γ. Это равенство мы получили из прямоугольных треугольников, острыми углами которых являются α, β и γ. Аналогичным образом получите зависимость между углами B, β и γ ($B \cong \angle A_1B_1C_1$).

6. Из прямоугольных треугольников OC_1A_1, OB_1C_1, $A_1C_1B_1$ установите зависимость между углами β, α и B.

7. Из треугольников OB_1A_1, $A_1C_1B_1$ и OB_1C_1 получите равенство, выражающее зависимость между углами B, α и γ.

8. Фигура, образованная острыми углами α, β и γ, является прямоугольным трехгранным углом с вершиной O. Мы уже получили четыре равенства

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta, \qquad (1)$$

$$\sin B = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (4)$$

Каждое из этих равенств дает возможность найти величину одного из входящих в него углов, если известны два других угла. Получим еще две зависимости между

а) A, B, γ; б) A, B, α.

На основании равенства (3)

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta}. \qquad (3')$$

Перемножив почленно равенства (3) и (3′) и использовав зависимость (1), имеем

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = \frac{1}{\cos \gamma}. \qquad (5)$$

На основании равенства (4)

$$\cos A = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}. \qquad (4')$$

Разделив почленно равенства (2) и (4′), получаем

$$\frac{\sin B}{\cos A} = \frac{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}. \qquad (6)$$

Отсюда и из равенства (1) следует

$$\sin B : \cos A = 1 : \cos \alpha. \qquad (6)$$

Сведем полученные зависимости между острыми плоскими и двугранными углами прямоугольного трехгранного угла $OA_1B_1C_1$ в таблицу 1.

Таблица 1

$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$	1
$\sin \beta = \sin B \cdot \sin \gamma$	2
$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} B \cdot \sin \alpha$	3
$\operatorname{tg} \alpha = \cos B \cdot \operatorname{tg} \gamma$	4
$\cos \gamma = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$	5
$\cos A = \sin B \cdot \cos \alpha$	6

9. Пользуясь таблицей 1, определите

а) $\cos \beta$, если $\alpha = 30°$, $\gamma = 60°$;
б) $\cos B$, если $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;
в) $\operatorname{tg} B$, если $A = 60°$, $\alpha = 45°$;
г) $\sin \beta$, если $B = 45°$, $\alpha = 30°$.

10. Существует ли такой прямоугольный трехгранный угол $OABC$, у которого:

а) $\beta = 45°$, $B = 30°$;
б) $\gamma = 60°$, $\alpha = 45°$;
в) $A = 20°$, $B = 20°$;
г) $B = 60°$, $\alpha = 30°$;
д) $\gamma = 30°$, $\alpha = 30°$;
е) $\gamma > \beta$;
ж) $\beta > B$;
з) $A > \alpha$;
и) $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \gamma$;
к) $\cos A > \cos \alpha$.

11. Как изменяется (уменьшается или увеличивается) угол γ с увеличением углов α и β прямоугольного трехгранного угла $OABC$?

12. Верно ли, что угол B уменьшается с уменьшением угла β и увеличением угла γ?

13. Верно ли, что угол γ увеличивается с уменьшением угла α, если угол B остается неизменным?

Равенства (1)—(6) выражают важнейшие свойства ортогональной проекции. С их помощью можно решать прямоугольные трехгранные углы, т. е. готовить учащихся к определению элементов многогранников.

Умелое использование этих свойств позволяет существенным образом упростить решение многих стереометрических задач.

При доказательстве равенств (1) — (6) приходится опираться на многое из того, что ученики усвоили в девятом классе не только по геометрии, но и тригонометрии. Поэтому эти равенства целесообразно рассмотреть в последней учебной четверти девятого класса. При их помощи можно проследить, как меняется величина одних элементов прямоугольных трехгранных углов с изменением других, установить границы этих изменений. Этим мы будем готовить учащихся к самостоятельному определению множества значений параметров, которые входят в различные формулы, получаемые при решении многогранников.

Ниже дается система упражнений, целью которой является обучение учащихся применению формул (1) — (6) для определения элементов многогранников. Эти упражнения полезно использовать при подготовке к экзаменам за курс средней школы.

1. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 136). Используя формулу (4), определите величину угла DB_1B прямоугольного трехгранного угла B_1ABD.

2. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 137). Точка M — середина ребра BC. Определите двугранный угол, образованный плоскостями B_1AM и AMB.

Указание. Примените к прямоугольному трехгранному углу $ABMB_1$ формулу (3), предварительно вычислив

$$\sin \widehat{BAM} = |BM| : |AM| = \frac{0{,}5}{\sqrt{1^2 + 0{,}5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда

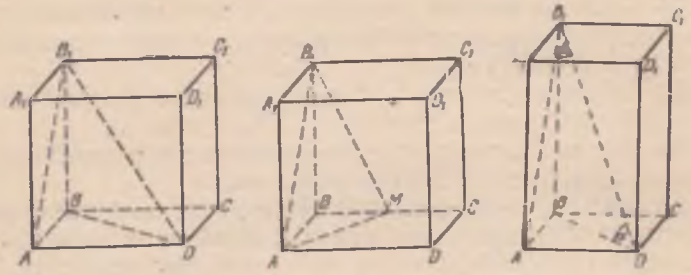


Рис. 136. Рис. 137. Рис. 138.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 138), у которого $\widehat{AB_1D} = \beta$, $\widehat{BDB_1} = \alpha$. Вычислите величину угла ADB. Каким условиям должны удовлетворять углы α и β, чтобы задача имела решение?

Указание. Примените формулу (1) к прямоугольному трехгранному углу $DBAB_1$, имея в виду, что $\widehat{ADB_1} = 90° - \beta$.

4. Дано изображение правильной треугольной пирамиды $DABC$ (рис. 139). Боковое ребро AD наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определите двугранный угол при ребре AD.

Указание. Примените формулу (3) к прямоугольному трехгранному углу $AODB$ (точка O — основание высоты пирамиды).

5. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 140) равен 120°. Назовите прямоугольные трехгранные углы, изображенные на этом рисунке. Вычислите величину угла BMD.

6. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 141), основанием которой является квадрат $ABCD$. Двугранные углы при ребрах AB и BC равны 60° и 45°. Секущая плоскость проходит через ребро BM и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. В сече-

нии получили треугольник MHB. Найдите величину угла HBM.

Указание. Рассмотрите два прямоугольных трехгранных угла $BAHM$ и $BHMC$. Обозначьте $\widehat{ABH} = x$. Тогда $\widehat{HBC} = 90° - x$. Примените формулу (3).

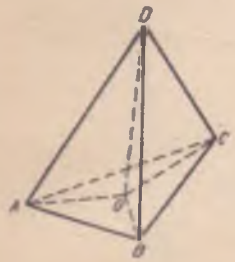


Рис. 139.

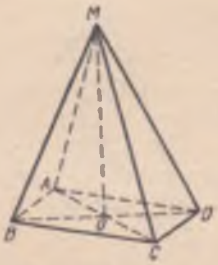


Рис. 140.

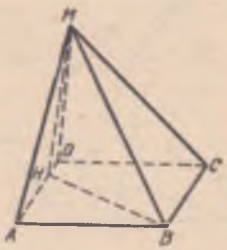


Рис. 141.

7. На рисунке 142 изображена четырехугольная пирамида $MABCD$, основанием которой является прямоугольник $ABCD$; $|AB| = 4$, $\widehat{AMD} = 60°$, $\widehat{DMC} = 45°$; $[DM] \perp (ABC)$. Назовите прямоугольные трехгранные углы, показанные на рисунке 142. Определите объем этой пирамиды.

Указание. $\widehat{DCM} = 45°$, $\widehat{DAM} = 30°$. Поэтому двугранные углы при ребрах AB и BC равны 30° и 45°. Теперь см. задачу 6.

8. На рисунке 143 изображена треугольная пирамида $ABCD$, все плоские углы которой при вершине C прямые; $|AC| = 8$. Двугранный угол при ребре AB равен 60°, $\widehat{CAB} = 60°$. Точка K — середина ребра AB. На рисунке изображен отрезок $[KO] \parallel (CD)$. Докажите, что центр O шара S, описанного около пирамиды $ABCD$, принадлежит прямой KO. Во сколько раз $|KO|$ меньше $|CD|$? Определите длину радиуса шара S.

Теперь покажем, как могут быть использованы свойства ортогональной проекции угла на две взаимно перпендикулярные плоскости, выраженные равенствами (1) — (6), при решении задач повышенной трудности. Все рассмотрен-

ные ниже примеры заимствованы из различных конкурсных сборников.

З а д а ч а 1. Боковое ребро $|AD|$ правильной треугольной пирамиды $DABC$ равно b, а высота $|DO|$ пирамиды — a. Определите двугранный угол φ, образованный плоскостями ABD и ABC (рис. 144).

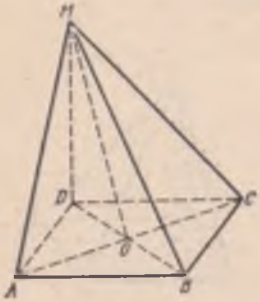


Рис. 142.

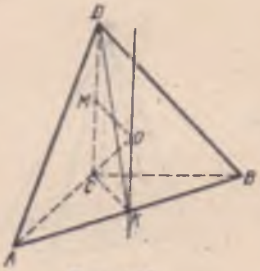


Рис. 143.

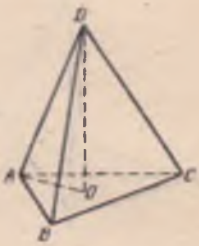


Рис. 144.

Искомый двугранный угол принадлежит трехгранному прямоугольному углу $ABOD$ (A — вершина угла). У этого трехгранного угла известны

$$\sin\alpha = \sin\widehat{OAD} = a : b,\ \beta = \widehat{OAB} = 30^\circ.$$

Теперь ясно, что двугранный угол при ребре AB можно найти, используя равенство (4):

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin 30^\circ} = 2\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= 2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cdot\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 2\cdot\frac{a:b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}} = \frac{2a}{\sqrt{b^2-a^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

З а д а ч а 2. Определите углы α и φ, которые образуются с основанием, боковым ребром и боковой гранью правильной пятиугольной пирамиды, у которой боковые грани равносторонние треугольники (рис. 145).

Пусть O — основание высоты пирамиды. Угол α конгруэнтен углу MAO и принадлежит прямоугольному трехгранному углу $AMOE$ (A—вершина этого угла), у которого

$\widehat{MAE} = 60°$, $\widehat{OAE} = 108° : 2 = 54°$. (Внутренний угол правильного пятиугольника $ABCDEF$ равен $108°$.). Теперь понятно, что угол α можно найти по формуле (1)

$$\cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{\cos 60°}{\cos 54°} = \frac{1}{2\cos 54°}.$$

Рис. 145.

Рис. 146.

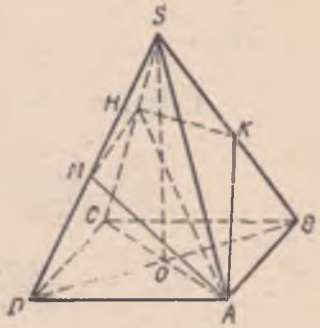


Рис. 147.

Угол φ можно найти из того же трехгранного угла по формуле (3)

$$\cos\varphi = \cos A = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg} 54°}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{\operatorname{tg} 54°}{\sqrt{3}}.$$

З а д а ч а 3. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, двугранный угол при боковом ребре — 2φ. Определите объем этой пирамиды (рис. 146).

Пусть O — основание высоты этой пирамиды. Основание пирамиды состоит из шести конгруэнтных правильных треугольников, стороны которых известны. Поэтому

$$S_{осн.} = 6 \cdot S_{AOB} = 6 \cdot 0{,}5 \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° = 1{,}5a^2\sqrt{3}.$$

Таким образом, главная трудность в решении этой задачи — это определение высоты $|MO|$ пирамиды. Она может быть найдена из прямоугольного треугольника AOM, у которого катет $|AO| = a$. Но для этого нужно знать один из острых углов этого треугольника.

Замечаем, что $\angle MAO$ принадлежит прямоугольному трехгранному углу $AOBM$ (A — его вершина, $[AO]$ — ребро прямого двугранного угла, у которого известен

$\widehat{OAB} = 60°$ и двугранный угол при ребре AM), он равен φ, т. е. половине двугранного угла при боковом ребре пирамиды). Поэтому для определения угла MAO можно применить зависимость (4):

$$\sin \widehat{MAO} = \sin \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{tg} 60°}{\operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} \varphi.$$

Итак,

$$|MO| = |AO| \cdot \operatorname{tg} \widehat{MAO} = a \cdot \frac{\sin \widehat{MAO}}{\cos \widehat{MAO}} =$$

$$= \frac{a \sin \widehat{MAO}}{\sqrt{1 - \sin^2 \angle MAO}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}$$

и

$$V_{\text{пир.}} = \frac{3a^3 \operatorname{ctg} \varphi}{2\sqrt{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = \frac{3a^3}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - 3}}.$$

З а д а ч а 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через вершину A основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру CS. Найдите площадь сечения $AMHK$, если диагональ основания пирамиды равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ ($\varphi > 45°$).

Очевидно, отрезок HA делит сечение на два конгруэнтных треугольника (рис. 147). Поэтому

$$S_{AMHK} = 2S_{AHK}.$$

Из прямоугольного треугольника AHC получаем

$$|HA| = a \cdot \sin \varphi.$$

Теперь встает вопрос, что еще нужно найти для определения площади треугольника AHK: стороны $|HK|$ и $|KA|$, его углы $\widehat{KHA}$ и $\widehat{HAK}$ и т. п.

Замечаем, что $\angle KHA = x$ является линейным двугранного угла, образованного плоскостями ACS и BCS. На основании равенства (4) из трехгранного угла $CSOB$ имеем

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 45° : \sin \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Обозначим $\widehat{HAK} = y$. Угол y можно найти из трехгранного угла $AHSK$, у которого двугранный угол при

ребре AS равен x, а $\widehat{HAS} = 90° - (180° - 2\varphi) = 2\varphi - 90°$. Использовав равенство (4), получаем

$$\operatorname{tg} y = \sin(2\varphi - 90°) \cdot \operatorname{tg} x = -\cos 2\varphi : \sin\varphi.$$

Теперь площадь треугольника HKA можно вычислить по формуле

$$S_{HKA} = \frac{|HA|^2 \cdot \sin x \cdot \sin y}{2\sin(x+y)} = \frac{|HA|^2}{2(\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x)} = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{4\sin\varphi}.$$

Рис. 148.

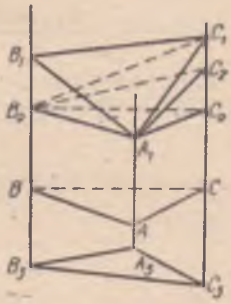


Рис. 149.

Задача 5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ двугранный угол при основании равен φ. Через ребро AB основания, сторона которого равна a, проведена плоскость, составляющая с основанием угол ψ. Определите площадь сечения.

Ортогональной проекцией сечения $ABMK$ на плоскость ABC является равнобочная трапеция ABM_1K_1, угол между диагоналями которой равен 90° (рис. 148). Поэтому

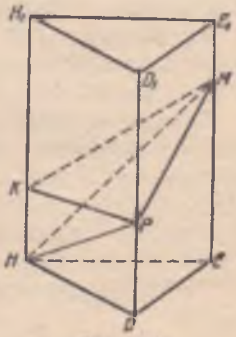


Рис. 150.

$$S_{ABM_1K_1} = 0{,}5\,|AM_1| \cdot |BK_1| = 0{,}5\,|M_1A|^2$$

и $$S_{ABMK} = \frac{S_{ABM_1N_1}}{\cos\psi} = \frac{|AM_1|^2}{2\cos\varphi} = \frac{(|AO| + |OK_1|)^2}{2\cos\psi} =$$
$$= \frac{(|AO| + |AO|\cdot \operatorname{tg} x)^2}{2\cos\psi},$$

где $x = \widehat{OAK_1}$ и $|AO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, задача свелась к определению угла OAK_1. Из прямоугольных трехгранных углов $ADKK_1$ и AKK_1B на основании равенства (4) получаем

$$\operatorname{tg} \widehat{K_1AK} = \sin(45^\circ - x) \operatorname{tg}\varphi$$

и

$$\operatorname{tg} \widehat{K_1AK} = \sin(45^\circ + x) \operatorname{tg}\psi.$$

Из этих равенств следует

$$\sin(45^\circ - x) \operatorname{tg}\varphi = \sin(45^\circ + x) \operatorname{tg}\psi$$

и

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}.$$

III. Рассмотрим еще одно свойство сечений треугольной призматической поверхности, которое можно эффективно использовать при определении объемов самых различных по форме многогранников. Ниже приведены упражнения, раскрывающие сущность этого свойства.

На рисунке 149 изображена фигура $ABCA_1B_1C_1$, которая получена из треугольной призматической поверхности следующим образом.

Плоскость ABC перпендикулярна ребрам призматической поверхности. Кроме того, $|AA_1| \leqslant |BB_1| \leqslant |CC_1|$. Фигура $ABCA_1B_1C_1$ разделена плоскостями на три части: $ABCA_1B_0C_0$ — треугольная призма, $A_1B_0C_0C_1$ и $A_1B_0B_1C_1$ — треугольные пирамиды.

Обозначим $S_{ABC} = s$, $|AA_1| = a$, $|BB_1| = b$, $|CC_1| = c$.

1. Определите вид призмы $ABCA_1B_0C_0$ и ее объем (через s и a).

2. Определите объем пирамиды $C_1B_0A_1C_0$, приняв треугольник $B_0A_1C_0$ за ее основание (через s, c и a).

3. Пусть $[C_0C_2] \cong [B_0B_1]$. Докажите, что пирамиды $A_1B_0B_1C_1$ и $A_1B_0C_2C_0$ равновелики.

4. Определите объем пирамиды $A_1B_0B_1C_1$ (через s, a, b).

5. Получите формулу для вычисления объема тела $ABCA_1B_1C_1$ (через s, a, b, c).

Ответ. $V = \frac{a+b+c}{3} \cdot s$.

6. Примените формулу, полученную в пункте 5, для вычисления объема части $B_3A_3C_3B_1A_1C_1$ треугольного призматического бруса, ограниченного произвольными плоскостями $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ (рис. 149).

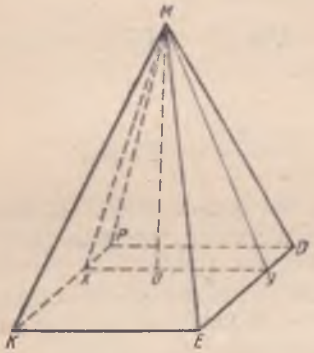


Рис. 151.

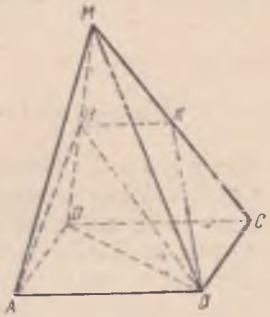


Рис. 152.

Ответ. $V = \frac{|A_1A_3| + |B_1B_3| + |C_1C_3|}{3} \cdot S.$ (7)

С этой формулой следует ознакомить учащихся при повторении темы «Объемы многогранников».

Чтобы научить их активному применению формулы (7), целесообразно решить несколько задач, которые, на первый взгляд, не имеют отношения к ней.

Задача 1. Площадь основания HED прямой треугольной призмы $HEDH_1E_1D_1$ равна 20 см². Точки K, M и P лежат на ребрах HH_1, EE_1, DD_1, причем $|HK| = 6$ см. Определите объем треугольной пирамиды $MHKP$ (рис. 150).

Формулу (7) к решению этой задачи можно применить таким образом. Ортогональной проекцией пирамиды $MHKP$ на плоскость HED является треугольник HED, площадь которого известна. Далее, $|AA_1| = |HK| = 6$ см, $|BB_1| = 0$, $|CC_1| = 0$. Поэтому

$$V_{HKMP} = 20 \cdot \frac{6+0+0}{3} = 40 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Задача 2. Основанием четырехугольной пирамиды $MKEDP$ является параллелограмм $KEDP$, у которого $[KP] \parallel [DE]$ и $|KP| = 12$ см. Через вершину пирамиды M проходит плоскость, перпендикулярная $[KP]$. В пересечении с поверхностью пирамиды эта плоскость образует треугольник MXY, площадь которого 15 см². Определите объем пирамиды (рис. 151).

Чтобы применить формулу (7) для решения задачи, достаточно заметить, что

$$S_{A_0B_0C_0} = S_{MXY} = 15 \text{ см}^2;$$

$$|AA_1| = |KP| = 12 \text{ см}, \ |BB_1| = |ED| = 12 \text{ см},$$
$$|CC_1| = 0.$$

Поэтому

$$V_{MKEDP} = 15 \cdot \frac{12 + 12 + 0}{3} = 120 \ (\text{см}^3).$$

Задача 3. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB основания и середину K бокового ребра CM проведена плоскость α. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Первое решение (без использования формулы (7). В этой задаче построение сечения не вызывает трудностей. Плоскость α, пересекаясь с пирамидой $MABCD$, образует трапецию $ABKH$ (рис. 152). Причем $|DH| : |HM| = 1:1$.

Плоскость α разделила данную пирамиду на две части, одна из которых является четырехугольной пирамидой $MABKH$, а другая не является ни пирамидой, ни призмой, т. е. фигурой, формула объема которой учащимся не известна. Поэтому для решения задачи необходимо построить еще какое-то сечение так, чтобы оба сечения разделили пирамиду $MABCD$ только на пирамиды и призмы. Таким сечением может быть диагональное сечение DBM данной пирамиды. В результате пирамида $MABCD$ разделится на четырехугольную пирамиду $BCKHD$ и треугольные пирамиды $BHMK$, $AHMB$ и $ABDH$. Объемы этих пирамид легко сравнимы, так как у них есть или одинаковые высоты, или равновеликие основания.

В самом деле, треугольники DBH и BHM равновелики и расположены в одной плоскости. Поэтому пирамиды $ABHM$ и $ABDH$ равновелики.

Площадь треугольника MHK составляет третью часть площади трапеции $DCKH$. Поэтому объем четырехугольной

пирамиды $BCDHK$ в три раза больше объема треугольной пирамиды $BHKM$.

У треугольных пирамид $KMHB$ и $AMHB$ одно и то же основание BHM, а расстояние от точки K до плоскости MHB в два раза меньше расстояния от точки A до той же плоскости (так как K — середина $[MC]$, а расстояния

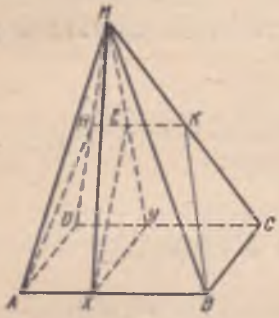


Рис. 153.

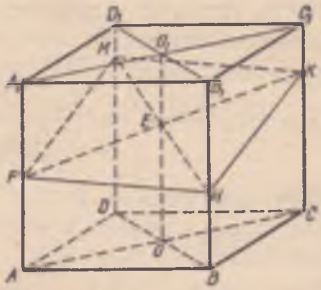


Рис. 154.

от точек A и C до плоскости MHB одинаковы). Поэтому объем пирамиды $AMHB$ в два раза больше объема пирамиды $KMHB$.

Итак,

$$V_{BHKM} : V_{BDCKH} = 1:3, \quad V_{ABHM} : V_{ABDH} = 2:2.$$

Поэтому

$$V_{MABKH} : V_{ABCDHK} = 3:5.$$

Второе решение (с применением формулы (7).

Построим плоскость, проходящую через M и перпендикулярную (AB). В пересечении с прямыми AB и CD получаем точки X и Y (рис. 153). Точка $E = (HK) \cap (MY)$. Треугольники MEX и EXY — ортогональные проекции многогранников $MABHK$ и $HKCBAD$ на плоскость, перпендикулярную (AB). Отрезок HK — средняя линия треугольника MDC. Поэтому $[ME] \cong [EY]$ и, следовательно, треугольники MEX и EXY равновелики. Таким образом получаем

$$\frac{V_{MHKBA}}{V_{HKCBAD}} = \frac{S_{MEX} \cdot \dfrac{|HK| + |AB| + 0}{3}}{S_{XEY} \cdot \dfrac{|HK| + |DC| + |AB|}{3}} =$$

$$= \frac{|HK| + |AB|}{|HK| + |DC| + |AB|} = \frac{0{,}5\,|AB| + |AB|}{\frac{1}{2}\,|AB| + |AB| + |AB|} = \frac{3}{5}.$$

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 154), ребро которого равно 24 см. Точки P, M и K лежат на $[AA_1]$, $[DD_1]$ и $[CC_1]$, причем $|AP| = 12$ см, $|DM| = 20$ см, $|CK| = 18$ см. Плоскость PMK делит куб на две части. Определите объем каждой из этих частей.

Строим сечение $PMKH$:

$$O = (AC) \cap (DB),\ O_1 = (A_1C_1) \cap (D_1B_1),\ E = (PK) \cap (OO_1),$$
$$H = (BB_1) \cap (ME).$$

Для определения длины отрезка BH рассмотрим две прямоугольные трапеции $APKC$ и $MDBH$, у которых есть общая средняя линия EO

$$|EO| = (|PA| + |CK|) : 2 = 15 \text{ см}, \quad |EO| = (|MD| + |BH|) : 2.$$

Отсюда

$$|BH| = 2 \cdot |EO| - |MD| = 2 \cdot 15 - 20 = 10 \text{ (см)}.$$

Для определения объема тела $ABCDPHKM$ применим формулу (7)

$$V_{ABCDPHKM} = V_{ABCPHK} + V_{ACDPKM} =$$
$$= S_{ABC} \cdot \frac{|AP| + |BH| + |CK|}{3} + S_{ACD} \cdot \frac{|AP| + |KC| + |DM|}{3} =$$
$$= \frac{24 \cdot 24}{2} \cdot \frac{12 + 10 + 18 + 12 + 18 + 20}{3} = 8640 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V_{PHKMA_1B_1C_1D_1} = 24^3 - 8640 = 5184 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Задача 5. Дан тетраэдр $ABCD$. $|AB| = a$, $|CD| = b$, расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD равно d, величина угла между этими прямыми равна ω. Тетраэдр рассечен на две части плоскостью α, параллельной противоположным ребрам AB и CD. Вычислите отношение объемов обеих частей, если известно, что отношение расстояния от (AB) до α к расстоянию от (CD) до α равно k.

Эта задача предлагалась участникам VII Международной

математической олимпиады, проведенной в Берлине в 1965, в качестве одной из наиболее трудных.

Первое решение* (с применением интегрального исчисления).

Пусть плоскость проведена на расстоянии x от (CD) (рис. 155). Тогда площадь сечения (оно — параллелограмм,

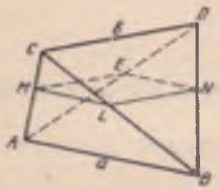


Рис. 155.

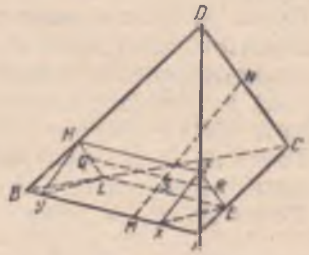


Рис. 156.

так как $(ML) \parallel (AB) \parallel (EN)$ и $(NL) \parallel (CD) \parallel (ME)$) равна

$$|ML| \cdot |ME| \cdot \sin\omega = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \cdot \sin\omega;$$

$$V_1 = \int_0^x \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \cdot \sin\omega \cdot dx = \left(\frac{abx^2}{2d} - \frac{abx^3}{3d^2}\right)\sin\omega.$$

Аналогично

$$V_2 = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\omega,$$

где y — расстояние от (AB) до α.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3dy^2 - 2y^2}{3dx^2 - 2x^2}; \quad x = \frac{d}{k+1}; \quad y = \frac{dk}{k+1}.$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{k^2(3d-2y)}{3d-2x} = k^2 \frac{3 - \frac{2k}{k+1}}{3 - \frac{2}{k+1}} = k^2 \frac{k+3}{3k+1}.$$

---

* Первые два решения заимствованы из книги Е. А. Морозовой и И. С. Петракова «Международные математические олимпиады». М., 1967, с. 90—92.

Второе решение. В сечении тетраэдра плоскостью α получится четырехугольник $EFHL$ (рис. 156).

$(EL) \parallel (AB)$; $(FH) \parallel (AB)$ (так как плоскость $\alpha \parallel (AB)$);

$(FE) \parallel (CD)$; $(HL) \parallel (CD)$ (так как $\alpha \parallel (CD)$);

$(FE) \parallel (HL)$; $(HF) \parallel (LE)$.

$HFEL$ — параллелограмм.

Проведем $(MN) \perp (AB)$; $(MN) \perp (CD)$.

Пусть (MN) пересекает α в точке S.

Проведем через точки A, B, S плоскость. Пусть (ABS) и α пересекаются по прямой QR.

$(QR) \parallel (AB)$ (так как $\alpha \parallel (AB)$).

Значит, $|QR| = |HF| = |LE|$.

Точки B, Q, N лежат на одной прямой (на линии пересечения плоскостей BDC и BMN).

Точки A, R, N лежат на одной прямой (аналогично)

$$\triangle QNR \sim \triangle ANB.$$

$|QR| : |AB| = |NS| : |NM|$ ($[NS]$ и $[NM]$ — высоты подобных треугольников):

$$|NS| : |SM| = 1 : k; \quad |NM| = |NS| + |SM|;$$

$$\frac{|NS| + |SM|}{|SN|} = 1 + k; \quad |NM| : |NS| = 1 + k;$$

$$|AB| : |QR| = k + 1;$$

$$|QR| = \frac{|AB|}{k+1}; \quad |HF| = |LE| = |QR| =$$

$$= \frac{|AB|}{k+1} = \frac{a}{k+1};$$

$$|FE| = |HL| = \frac{|CD| \cdot k}{k+1} = \frac{kb}{k+1} \text{ (аналогично).}$$

Проведем плоскости EFX и LYH, перпендикулярные α,

$$(X \in [AB],\ Y \in [AB]).$$

$$V_{BLHAFE} = V_{YHLXFE} + V_{BHLY} + V_{XFEA}.$$

Примечание. Точка X или точка Y могут лежать вне $[AB]$, тогда V_{BHLY} или V_{XFEA} нужно будет вычитать. Доказательство же аналогично.

$YHLXFE$ — прямая призма.

$$V_{YHLXFE} = |FE| \cdot h_{\Delta XFE} \cdot |HF| \cdot \frac{1}{2}.$$

$$h_{\Delta XFE} = |MS| = \frac{dk}{k+1}.$$

$$V_{YHLXFE} = \frac{kb}{k+1} \cdot \frac{dk}{k+1} \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{abd}{(k+1)^3} \cdot \frac{k^2}{2}.$$

$V_{BHLY} = |HL| \cdot h_{\Delta HLY} \cdot |BY| \cdot \frac{1}{6}$; $((BY| \perp$ пл. HLY, так как $(BY) \parallel (HF))$.

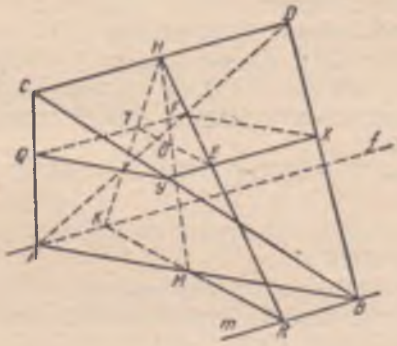


Рис. 157.

$h_{\Delta HLY} = h_{\Delta XFE} = \frac{dk}{k+1}$; $V_{XFEA} = |EF| \cdot h_{\Delta XFE} \cdot |AX| \times \times \frac{1}{6}$.

$$V_{BLHAFE} = \frac{abdk^2}{(k+1)^3 \cdot 2} + \frac{1}{6} \cdot |HL| \cdot h_{\Delta HLY} \cdot (|BY| + |AX|) =$$

$$= \frac{abd \cdot k^2}{(k+1)^3 \cdot 2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{kb}{k+1} \cdot \frac{kd}{k+1} (|AB| - |HF|) =$$

$$= \frac{abd \cdot k^2}{2(k+1)^3} + \frac{bd \cdot k^2}{6(k+1)^2} \cdot \frac{ka}{k+1} = abd \cdot \frac{k^2(3+k)}{6(k+1)^3}.$$

$$V_{DFHCEL} = abd \cdot \frac{1+3k}{6(k+1)^3} \text{ (аналогично).}$$

$$V_{BLHAFE} : V_{DFHCEL} = \frac{k^2(3+k)}{1+3k}.$$

Теперь покажем, насколько упрощается решение этой задачи, если применить формулу (7).

Пусть $[MH]$ — общий перпендикуляр к прямым AB и CD (рис. 157). Через A и B проводим прямые f и m, параллельные (CD). Через (HM) проводим плоскость, перпендикулярную (CD). В пересечении с прямыми f и m получаем точки K и R. Полученный при этом треугольник HKR является ортогональной проекцией пирамиды $ABCD$ на плоскость HKR.

Обозначим $O = (HM) \cap \alpha$.

По условию задачи $|OM| : |OH| = k : 1$ и $\alpha \parallel (CD)$. Поэтому α пересекает треугольник CDB по отрезку XY, параллельному (CD). Кроме того, $\alpha \parallel (AB)$. Поэтому α пересекает треугольник CAB по отрезку $[QY] \parallel (AB)$. Сечением плоскостью α пирамиды $ABCD$ является параллелограмм $YQFX$.

Обозначим $T = (QF) \cap (HK)$, $E = (HR) \cap (YX)$.

Очевидно, $(TE) \parallel (KR)$ и $O \in (TE)$. Треугольник HTE — ортогональная проекция многогранника $CQYFDX$ на плоскость KHR.

Площади подобных треугольников относятся как квадраты длин сходственных отрезков. Поэтому

$$S_{HTE} : S_{HKR} = |HO|^2 : |HM|^2 = 1 : (1 + k)^2.$$

Из подобных треугольников BYX и BCD следует

$$|XY| : |CD| = k : (k + 1).$$

По формуле (7) имеем

$$\frac{V_{CQYFDX}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{HTE} \cdot \dfrac{|CD| + |QF| + |YX|}{3}}{S_{HKR} \cdot \dfrac{|CD| + 0 + 0}{3}} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)^3}\left(1 + \frac{2|XY|}{|CD|}\right) = \frac{1}{(k+1)^3}\left(1 + \frac{2k}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{3k+1}{(k+1)^3}.$$

Отсюда

$$\frac{V_{QYBAFX}}{V_{CQYFDX}} = \frac{V_{ABCD}}{V_{CQYFDX}} - 1 = \frac{(k+1)^3}{3k+1} - 1 = \frac{k+3}{3k+1} \cdot k^2.$$

IV. В новом учебнике геометрии для девятого класса доказательство необходимых и достаточных условий существования трехгранного угла имеет ярко выраженный аналитический характер (применяются теорема косинусов, свойства тригонометрических функций, проекция вектора на

ось, теорема косинусов для трехгранного угла и т. д.). Предлагаемое ниже доказательство этих условий основывается на свойствах ортогональной проекции ребра трехгранного угла на плоскость его противолежащей грани и его развертки.

Пусть у трехгранного угла $OA_1B_1C_1$ (рис. 158) $\widehat{B_1OC_1}$ =

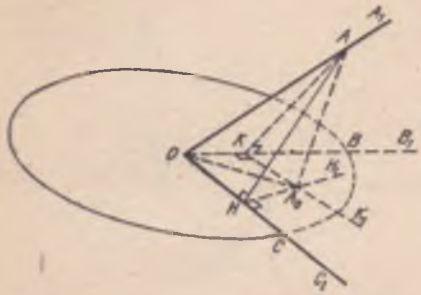


Рис. 158.

Рис. 159.

Рис. 160.

Рис. 161.

$= \alpha$, $\widehat{A_1OC_1} = \beta$, $\widehat{A_1OB_1} = \gamma$ и α — наибольший из этих углов (в дальнейшем этот трехгранный угол называем фигурой Φ). Отложим на лучах OA_1, OB_1, OC_1 конгруэнтные отрезки OA, OB, OC. Проведем $[AH] \perp (OC)$ и $[AK] \perp (OB)$. На (BOC) построим $(HH_1) \perp (OC)$ и $(KK_1) \perp (OB)$. Получим $A_0 = (HH_1) \cap (KK_1)$. Очевидно, $(AA_0) \perp (BOC)$*. Так как $|OA_0| < |OA|$, то A_0 лежит внутри окружности $(O, |OC|)$.

* Здесь по существу воспроизведен один из способов построения прямой, перпендикулярной плоскости.

Построим развертку фигуры, образованной треугольниками AOC, COB и BOA (рис. 159). Очевидно, $H \in (AA_0)$, $K \in (A'A_0)$, $\triangle BOA' \cong \triangle BOA$.

1. Пусть $\beta + \gamma < \alpha$. Построим произвольную окружность ω с центром O и центральные углы BOC, AOC, BOA', величины которых соответственно равны α, β, γ (рис. 160).

Рис. 162.

Рис. 163.

Проведем $(AH) \perp (OC)$ и $(A'K) \perp (OB)$. Получим $D = \omega \cap (AH)$, $M = \omega \cap (A'K)$, $A_0 = (AH) \cap (A'M)$. Очевидно, $\widehat{COD} = \widehat{COA}$ и $\widehat{MOB} = BOA'$. Так как $\beta + \gamma < \alpha$ и α — наибольший из этих углов, то D и M принадлежат дуге CB (меньшей полуокружности) и $D \in \smile AM$. Поэтому A_0 лежит вне круга, определяемого окружностью ω. Итак, если $\beta + \gamma < \alpha$, то не существует фигуры Φ.

2. Если $\beta + \gamma = \alpha$, то $A_0 = D = M$ и $A_0 \in \omega$ (рис. 161). Поэтому и в этом случае фигуры Φ несуществует.

3. Пусть $\alpha < \beta + \gamma$ и $\alpha + \beta + \gamma < 360°$; M, $D \notin \smile CB$ (рис. 162). Точка $M \in \smile CD$, потому что $\beta + \gamma > \alpha$. Точка A_0 лежит внутри окружности ω, так как A_0 есть пересечение диагоналей выпуклого четырехугольника $AMDA'$. Итак, если $\alpha < \beta + \gamma$ и $\alpha + \beta + \gamma < 360°$, то существует фигура Φ.

4. Если $\alpha < \beta + \gamma$ и $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, то $A_0 = A = A'$, т. е. $A_0 \in \omega$. И в этом случае фигуры Φ нет.

5. Пусть $\alpha < \beta + \gamma$ и $360° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$ (рис. 163). В этом случае M и D принадлежат дуге CB, $M \in \smile CD$, а $A \in \smile BA'$. Поэтому хорды MA' и AD не пересекаются, т. е. A_0 лежит вне круга, определяемого ω, и фигуры Φ не существует.

6. Из пункта 4 следует, что в каждом трехгранном угле $\alpha < \beta + \gamma$, так как только в этом случае A_0 лежит внутри ω.

Таким образом, доказана теорема «Трехгранный угол с данными плоскими углами α, β, γ (α — наибольший из этих углов и $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$) существует тогда и только тогда, если выполняются неравенства $\alpha < \beta + \gamma$ и $\alpha + \beta + \gamma < 360°$».

Рис. 164.

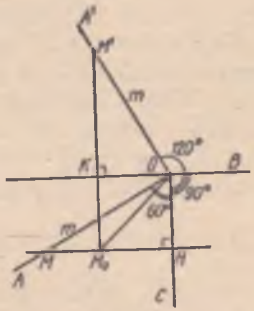


Рис. 165.

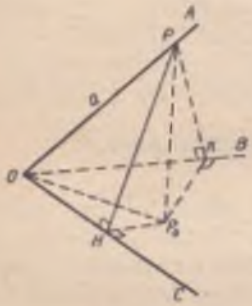


Рис. 166.

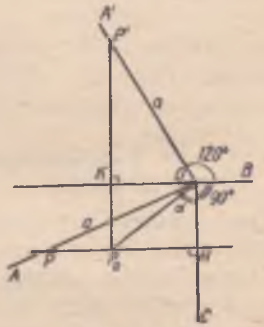


Рис. 167.

Свойства трехгранного угла, проиллюстрированные рисунками 158 и 159, непосредственно применяются при обосновании многих задач на определение величин элементов многогранников (высоты пирамид и призм, углы наклона прямых к плоскости, двугранные углы и т. п.). При помощи развертки легко обнаруживается, как изменяется положение точки A_0 на (BOC) с изменением α, β, γ.

Поясним сказанное решением задач. Попутно покажем, что метод разверток содействует глубокому усвоению содержания задачи и, следовательно, позволяет найти более простое решение.

Задача 1. В трехгранном угле $OABC$ $\widehat{BOC} = 90°$, $\widehat{AOB} = 120°$, $\widehat{AOC} = 60°$; $M \in [OA)$ и $|OM| = m$. Найдите $|MM_0| = |M, (BOC)|$.

Решение. Построим $[MH] \perp (OC)$, $[MK] \perp (OB)$ и на (BOC) через H и K проведем прямые, перпендикулярные соответственно (OC) и (OB). Они пересекаются в точке M_0 (рис. 164). Построим развертку трехгранного угла $OABC$ (рис. 165). Теперь ясно, что OKM_0H — квадрат, так как $|KO| = |OH| = |OM| \cdot \cos 60° = 0{,}5\,m$. Итак, $|OM_0| = 0{,}5m$: $:\sin 45° = 0{,}5m\sqrt{2}$ и из $\triangle OM_0M$ имеем $|MM_0| = 0{,}5m\sqrt{2}$.

Задача 2. В трехгранном угле $OABC$ $\widehat{BOC} = 90°$, $\widehat{AOB} = 120°$, $\widehat{AOC} = \alpha$; $P \in [OA)$ и $|OP| = a$. Найдите $|PP_0| = |P, (BOC)|$.

Решение. Из рисунка 166 видно, пересечением каких прямых является P_0. Построим развертку трехгранного угла $OABC$ (рис. 167). Так как $[OA)$ не принадлежит углам BOC и BOA, то $30° < \alpha < 150°$; KP_0HO — прямоугольник. Поэтому $|P_0O|^2 = |KO|^2 + |OH|^2 = (0{,}5\,a)^2 + (a\cos\alpha)^2$ и $|PP_0| = \sqrt{|PO|^2 - |P_0O|^2} = a\sqrt{0{,}75 - \cos^2\alpha}$.

4. Упражнения для усвоения нового материала

Упражнения этого параграфа предназначены для подготовки учащихся к усвоению содержания и методов доказательства теорем, поэтому они даются в качестве домашнего задания к тому уроку, на котором будет изучаться соответствующая (новая) теорема. Такие домашние задания готовят учеников к самостоятельному усвоению нового материала.

§ 7*

1. На рисунке 168 изображена $[D\,ABC]$**. Точки M и K — середины ребер AD и BD. Точка P — середина $[AM]$. Постройте: а) $X = (PK) \cap (AB)$; б) $Y = (PK) \cap (ABC)$; в) $N = (MK) \cap (AB)$; г) $H = (MK) \cap (ABC)$.

* Параграфы даются по учебному пособию «Геометрия. 9—10».
** Так здесь и далее обозначается пирамида.

§ 8

2. На рисунке 169 изображена $[M\text{-}ABCD]$; $ABCD$ — параллелограмм. а) Верно ли, что $(AD) \parallel (MBC)$? Почему? б) Точка $M \in (ADM) \cap (MBC)$. Применив теорему 3, постройте прямую a пересечения (ADM) и (MBC); в) Верно ли, что $(BC) \parallel (ADM)$? Почему? г) Постройте $b = (MBC) \cap (ADM)$; д) Почему $a = b$ и $a \parallel (BC)$? е) Почему $a \parallel (AD)$? Постройте $c = (ABM) \cap (CDM)$.

Рис. 168.

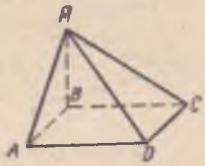


Рис. 169.

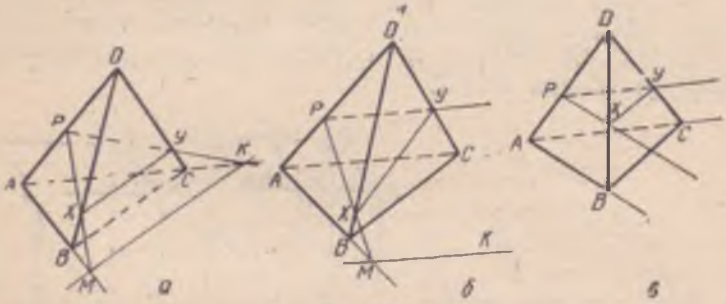


Рис. 170.

§ 10

3. а) На рисунке 170, *а* изображена $[D\text{-}ABC]$. $P \in [AD]$. $K \in [AC]$. $M \in [AB]$. $X = (DB) \cap (PKM)$ и $Y = (DC) \cap (PKM)$. На рисунке 170, *б* изображена $[D\text{-}ABC]$. $P \in [AD]$. $M \in [AB]$. $(MK) \parallel (AC)$. $X = (DB) \cap (PMK)$. $Y = (DC) \cap (PMK)$. Что общего и в чем отличие у плоскостей PMK, изображенной на рисунке 170, *а*, и BMK, изображенной на рисунке 170, *б*?

б) На рисунке 170, *в* изображена $[D\text{-}ABC]$. $P \in [AD]$, $X \in [BD]$, $Y \in [CD]$, $[PX) \parallel [AB)$, $[PY) \parallel [AC)$.

Что общего и в чем отличие во взаимном положении сторон углов XPY и BAC, показанных на рисунках 170, *а, б, в*?

в) Пересекаются ли плоскости ABC и XPY, изображенные на рисунке 170, *в*?

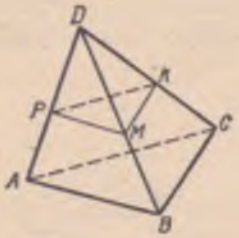


Рис. 171.

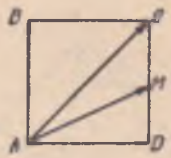


Рис. 172.

§ 11

4. На рисунке 171 изображена $[D\text{-}ABC]$. $P \in [AD]$, $M \in [DB]$, $K \in [DC]$, $(PK) \parallel (AC)$, $(PM) \parallel (AB)$. Докажите, что $(MK) \parallel (BC)$.

5. Дана $[D\text{-}ABC]$ (рис. 171). Плоскость α проходит через (BC) и параллельна (AD). Постройте $(XY) = \alpha \cap \cap (PMK)$ $(X \in [PM)$, $Y \in [PK))$. Установите форму четырехугольника $BXYC$.

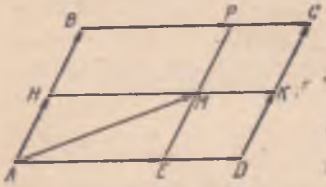


Рис. 173.

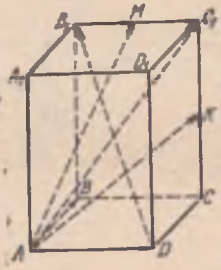


Рис. 174.

Рис. 175.

§ 21

6. На рисунке 172 изображен квадрат $ABCD$. $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MC}$. Найдите x и y, если: а) $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$.

7. На рисунке 173 показан параллелограмм $ABCD$. $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AH} = 0{,}5\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DK} = 0{,}5\overrightarrow{DC}$. Найдите x и y, если $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$.

§ 23

8. На рисунке 174 показан параллелепипед $[ABCDA_1B_1C_1D_1]$; $\overrightarrow{B_1M} = 0{,}5\overrightarrow{BC_1}$; $\overrightarrow{CK} = 0{,}5\overrightarrow{CC_1}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK}$. Найдите x, y, z, если: а) $\overrightarrow{AC_1} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AA_1} + z\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AD}$.

§ 28

9. На рисунке 175 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $\widehat{A_1AB} = \widehat{A_1AD} = 90°$. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$. а) Разложите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{DB}$ по $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$; б) Найдите $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB}$; в) Используя разложение $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{DB}$ по $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, вычислите $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD}$; г) Найдите $\widehat{A_1AC}$, $\widehat{A_1AM}$, $(\widehat{AA_1, BD})$; д) Чему равны углы между (CC_1) и (AM); (BB_1) и (AC)?

§ 29

10. На рисунке 176 изображены $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$. $A \notin (BOC)$, $M \in [OA)$. $[MH] \perp (OC)$, $[MK] \perp (OB)$. $[HE) \subset (BOC)$, $[HE) \perp (OC)$, $[KF) \subset (BOC)$ и $[KF) \perp (OB)$; $E = (HE) \cap (KF)$. а) Найдите углы между (OC) и (ME); (OB) и (ME); б) Докажите, что $(ME) \perp (BOC)$.

§ 30

11. $[AC] \subset \alpha$ (рис. 177), $(BA) \perp \alpha$, $(CD) \parallel (BA)$, $[AM) \subset \alpha$, $[CK) \subset \alpha$, $[CK) \parallel [AM)$. а) Чему равны $\widehat{BAC}$ и $\widehat{BAM}$? б) Чему равен $\widehat{ACD}$? в) Верно ли, что $\widehat{DCK} = \widehat{BAM}$? Почему? г) Верно ли, что $(DC) \perp \alpha$? Почему?

12. а) Сколько прямых, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную точку? б) Докажите (методом от противного), что два перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны (см. задачу 11).

§ 31

13. Скрещивающиеся прямые AA_1 и BB_1 пересекают прямую l соответственно в точках K и M (рис. 178). $|KA_1| = |KA|$ и $(AA_1) \perp l$. $|MB_1| = |MB|$ и $(BB_1) \perp l$. Построены $[KB_1'] = \overrightarrow{A_1K}([A_1B_1])$ и $[KB'] = \overrightarrow{AK}([AB])$. Докажите: а) $(B_1B_1') \perp l$; б) $l \perp (B_1'B')$; в) $B_1' = S_M(B')$; г) $|KB_1'| = |KB'|$; д) $|A_1B_1| = |AB|$.

Рис. 176.

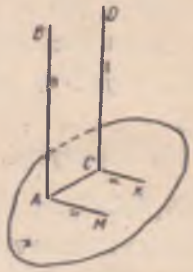


Рис. 177.

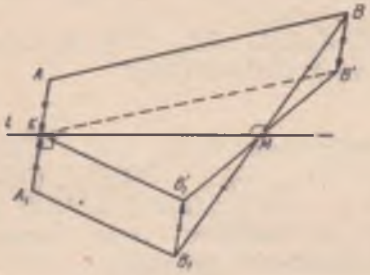


Рис. 178.

Рис. 179.

§ 33

14. На рисунке 179 изображена $[D\text{-}ABC]$. $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 90°$. $M \in [CD]$; $(MK) \parallel (CA)$, $(MP) \parallel (CB)$. Пересекаются ли (ACB) и (KMP)? Верно ли, что $(DC) \perp (KMP)$?

15. На рисунке 180 дана $[D\text{-}ABC]$. $[DC] \perp (ACB)$, $K \in [DC]$. $\widehat{MKD} = \widehat{OKP} = 90°$. Докажите, что $(ACB) \parallel (MKP)$.

§ 34

16. На рисунке 181 изображена $[M\text{-}ABCD]$. $ABCD$ — квадрат, $O = (BD) \cap (AC)$, $(MO) \perp (ABC)$, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KC}$. а) Назовите изображенные на рисунке 181 прямоугольные треугольники, не принадлежащие (ABC); б) Какая из точек A, B, C, D, O, F, K наименее удалена от M? Какая из этих точек наиболее удалена от M?

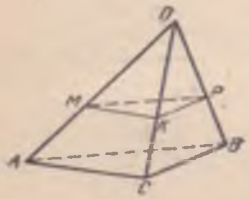


Рис. 180.

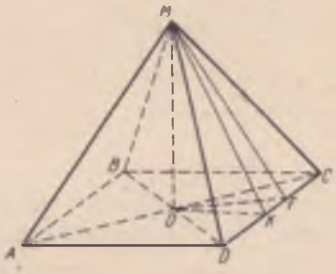


Рис. 181.

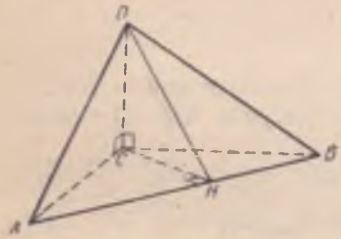


Рис. 182.

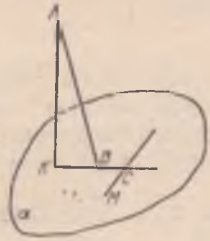


Рис. 183.

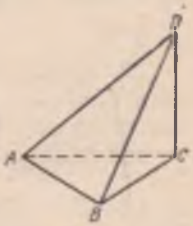


Рис. 184.

§ 36

17. На рисунке 182 дана $[D\text{-}ABC]$; $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 90°$. $[CH] \perp (AB)$. а) Верно ли, что $(DC) \perp (ACB)$? Почему? б) Чему равен угол между (CD) и (AB)? в) Верно ли, что $(AB) \perp (DCH)$? Почему? г) Чему равен угол AHD?

18. Прямые KB и CM принадлежат плоскости α и пересекаются в точке C. Точка $A \notin \alpha$ (рис. 183).

а) Дано: $(KA) \perp \alpha$, $(CM) \perp (KB)$. Докажите: $(CM) \perp (AB)$;

б) Дано: $(CM) \perp (KB)$, $(CM) \perp (AB)$. Докажите: $(KA) \perp (CM)$;

в) Дано: $(KA) \perp (KB)$, $(CM) \perp (KB)$, $(CM) \perp (KA)$. Докажите: $(KA) \perp \alpha$.

§ 37

19. На рисунке 184 дана $[D\text{-}ABC]$. $\widehat{ABC} = 90°$, $(DC) \perp (ABC)$, $|AD| = 1$, $\widehat{DAC} = \alpha$, $\widehat{BAC} = \beta$. а) На-

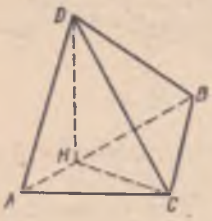


Рис. 185.

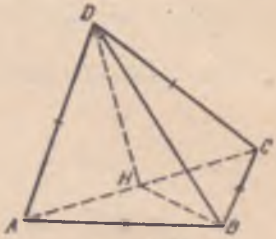


Рис. 186.

зовите прямоугольные треугольники, изображенные на рисунке 184; б) Вычислите $|AC|$ и $|AB|$; в) Вычислите $\cos \widehat{DAB}$; г) Докажите, что $\cos \widehat{DAB} < \cos \widehat{DAC}$; д) Сравните $\widehat{DAC}$ и $\widehat{DAB}$.

§ 39

20. $|DH| \perp (ABC)$ (рис. 185). Назовите прямоугольные треугольники, изображенные на рисунке 185. Плоскости каких из них перпендикулярны?

21. $|AD| = |DC|$ и $|AB| = |BC|$ (рис. 186). $(DAC) \perp$ $\perp (ACB)$. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HC}$. Докажите: а) $\widehat{DHB} = (DAC, \widehat{ACB})$; б) $(DH) \perp (ACB)$.

5. Обобщенные приемы решения задач по геометрии в десятом классе

При изучении тем «Координатный метод в пространстве», «Многогранники», «Фигуры вращения» применяются все основные свойства фигур, рассмотренных в девятом классе. Поэтому успешное изучение материала десятого класса невозможно без систематического повторения важнейших понятий стереометрии и взаимного положения прямых и плоскостей. Такое повторение целесообразно вести через решение задач. Анализ действующих учебных пособий по геометрии для IX и X класса показывает, что в них есть задачи, работа над которыми позволяет обучить учащихся обобщенным приемам, которые дают возможность

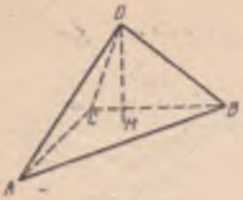


Рис. 187.

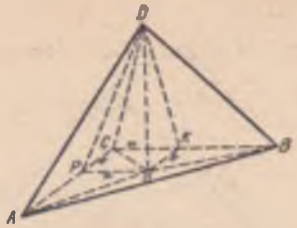


Рис. 188.

им успешно определять элементы многогранников и фигур вращения.

1. Решение многих школьны задач стереометрии связано с комплексным применением построений, доказательств и вычислений. Причем наиболее важный и сложный элемент этого комплекса — это правильное изображение различных частей фигуры. Поэтому особое внимание следует уделять построению чертежей, их обоснованию и составлению плана решения задач по готовым чертежам. Приводим упражнения, систематическая работа с которыми на протяжении всего учебного года позволяет усвоить основные построения на проекционном чертеже, являющиеся составной частью решения многих задач из «Геометрии. 10».

1. На рисунке 187 показана $[D\text{-}ABC]$. $[DH]$ — ее высота, $\widehat{ACB} = 90°$. Постройте линейные углы двугранных углов при (AC) и (BC). Постройте $\angle(AD, ABC)$, $\angle(DC, ABC)$, $\angle(DB, ABC)$.

Ответ на рисунке 188.

2. В $[D\text{-}ABC]$ $\widehat{ACB} = 120°$, $|AC| = |CB|$, $|DC| = |DB|$, $\widehat{ACD} = 90°$. $[DH]$ — высота пирамиды. Постройте $[DH]$ и линейный угол двугранных углов при (AC) и (CB).

Ответ на рисунке 189.

3. В $[D\text{-}ABC]$ $\widehat{ACB} = 120°$, $|AC| = |CB|$, $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 90°$. $[DH]$ — высота пирамиды. Постройте $[DH]$ и линейные углы двугранных углов при (AC), (CB), (AB).

Ответ на рисунке 190.

4. В пирамиде $ABCD$ все грани — прямоугольные треугольники. Постройте изображения всех таких пирамид и назовите какие-нибудь их высоты.

Рис. 189.

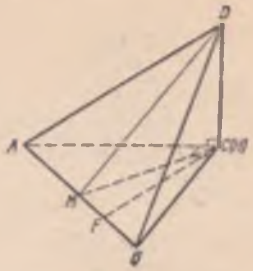


Рис. 190.

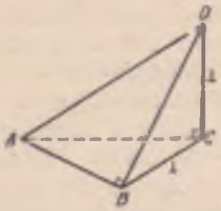


Рис. 191.

Рис. 192.

Ответ на рисунке 191.

5. В $[D\text{-}ABC]$ $[DC] \perp (ACB)$, $\widehat{ACB} = 120°$, $|AC| = |CB|$. Постройте линейные углы двугранных углов при (CB), (AB), (DB), (AC).

Ответ на рисунке 192.

6. В $[D\text{-}ABC]$ $|AD| = |DB| = |AC| = |CB|$, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90°$, $(ADB) \perp (ABC)$. Постройте высоту DH пирамиды и высоту DK грани DBC. Вычислите $(\widehat{CD, ABC})$, $(\widehat{CD, ABD})$, $(\widehat{DBC, BCA})$.

Ответ на рисунке 193.

7. В $[D\text{-}ABC]$ $\widehat{ADC} = \widehat{CDB} = \widehat{ADB} = 90°$. Постройте центр сферы, описанной вокруг пирамиды.

Ответ на рисунке 194.

8. В $[D\text{-}ABC]$ $(AC) \perp (BCD)$, $\widehat{BDC} = 90°$. Постройте центр сферы, описанной вокруг пирамиды, и найдите ее радиус, если $|AB| = 10$.

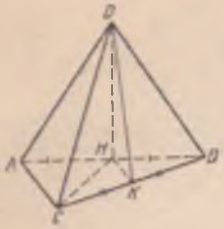


Рис. 193.

Рис. 194.

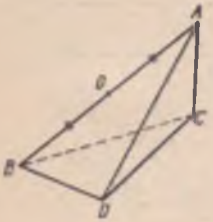


Рис. 195.

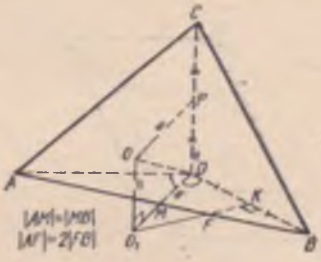


Рис. 196.

Ответ на рисунке 195.

9. В $[D\text{-}ABC]$ $|AD| = |DB|$, $(DC) \perp (ADB)$, $\widehat{ADB} = 120°$. Постройте центр сферы, описанной вокруг пирамиды.

Ответ на рисунке 196.

10. В $[D\text{-}ABC]$ $\widehat{ACB} = 90°$, $|AC| = |CB| = |CD| = |DB| = |AD| = 2$. Постройте высоту пирамиды DH и центр O описанного вокруг нее шара. Найдите $(\widehat{DAB, ABC})$, $(\widehat{CD, ACB})$, $(\widehat{DCB, CBA})$, $(\widehat{DA, ACB})$.

Ответ на рисунке 197.

11. В $[D\text{-}ABC]$ $(DB) \perp (ABC)$, $\widehat{ACB} = 90°$, $|AC| = |DB| = 3$, $|CB| = 4$. Постройте сечения пирамиды плоскостями, которые проходят через (AC), (DB), (AB) и делят соответственно двугранные углы пополам. Постройте центр шара, вписанного в пирамиду.

Ответ на рисунке 198.

12. На рисунке 199 дан параллелепипед. $[A_1H] \perp (ABC)$, $\widehat{BAD} = 90°$. Постройте: а) Сечение его плоскостью, про-

Рис. 197.

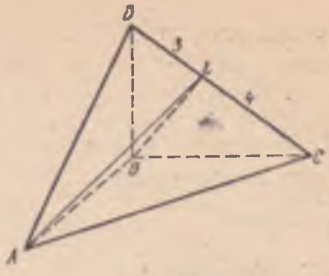


Рис. 198.

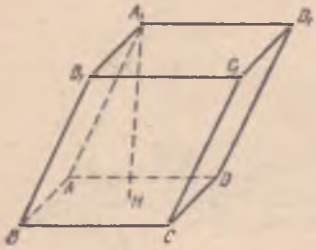


Рис. 199.

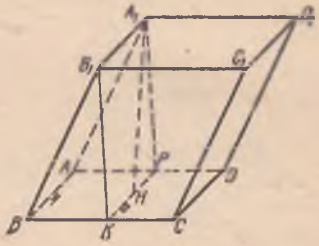


Рис. 200.

ходящей через (A_1H) и перпендикулярной (BC). Определите форму сечения; б) $\angle(C_1C,\ ABC)$; в) Сечение его плоскостью, которая проходит через B_1, параллельна (A_1H) и перпендикулярна (B_1BC).

Ответ на рисунке 200.

II. Одним из эффективных приемов обучения школьников стереометрии является систематическая работа по составлению устных планов решения задач по готовым чертежам. Приводим примерный перечень таких устных задач (основой для них послужили типовые задачи из «Геометрии. 9—10»), которые целесообразно оформить в виде таблиц.

По рисунку 201

1. Дано: $|AD| = 1$, α, β. Найдите φ. 2. Дано: $|AC| = 1$, β, φ. Найдите $\widehat{1}$. 3. Дано: $|AC| = 1$, α, β. Найдите $(\widehat{CAD,\ ADB})$. 4. Дано: $|AC| = 1$, β, $\widehat{1}$. Найдите α. 5. Дано: $|AC| = 1$, β, α. Найдите $(\widehat{DC,\ ABD})$.

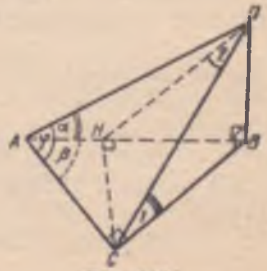


Рис. 201.

По рисунку 202

6. Дано: $|AD| = 1, \alpha, \beta$. Найдите $|DH|$. **7.** Дано: $|AD| = 1$, α, β. Найдите $(\widehat{DAB, ABC})$.

8. Дано: $|AD| = 1$, $|AC| = |AB| = a$, α, β. Найдите V ($|D\text{-}ABC|$).

По рисунку 203

9. Дано: $|AM| = 1$, α, β. Найдите $\widehat{DAM}$. **10.** Дано: $|AM| = 1, \alpha, \beta$. Найдите $(\widehat{BAD, ADM})$.

11. Дано: $|AM| = 1$, α, β. Найдите V ($|D\text{-}ABC|$).

По рисунку 204

12. Дано: $|AD| = a$, $|OM| = h$. Найдите все прямые углы на чертеже и $|M, (AD)|$, $|M, (CD)|$, $|M, (BC)|$.

По рисунку 205

13. Дано: $|AB| = a$, $|AD| = b$. Найдите $(\widehat{BAD, \alpha})$; $|C, \alpha|$; $(\widehat{HAB, ABD})$; (AC, α).

По рисунку 206

14. Дано: $|O_1D_1| : |O_1C_1| = 1 : 2$. Найдите все прямые углы на чертеже и $(\widehat{A_1B_1C_1, ABC})$.

По рисунку 207

15. Назовите трехгранные углы, у которых даны три элемента. Найдите $(\widehat{DA_1, CD_1})$.

По рисунку 208

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$—куб, $|AB| = 1$. Определите форму четырехугольников AM_1M_2D, DK_1K_2A и $S(AM_1M_2D)$, $S(ADK_1K_2)$.

По рисунку 209

17. $|AC| = |AB| = |BC| = a$.

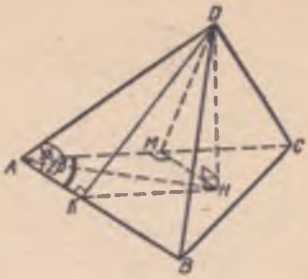


Рис. 202.

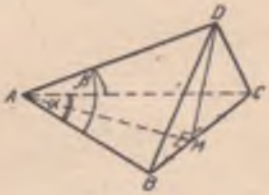


Рис. 203.

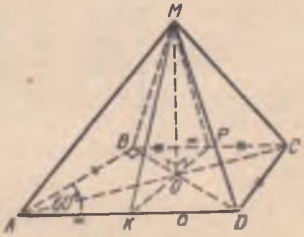


Рис. 204.

Рис. 205.

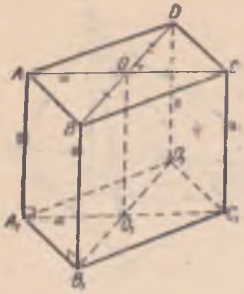


Рис. 206.

Определить $(\widehat{DBC, BCA})$; площадь боковой поверхности $[D\text{-}ABC]$; $(\widehat{BD, ABC})$.

По рисунку 210

18. $|AC| = a$, $|CB| = b$, $|CD| = h$. Найдите $(\widehat{DAB, ABC})$; $(\widehat{ADB, DBC})$; $S\,(ADB)$.

По рисунку 211

19. Дана $[A\text{-}BCD]$. Назовите свойства треугольника $M_1M_2M_3$.

По рисунку 212

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $|CD| = a$. Найдите $|AD|$; $S\,(A_1B_1CD)$; $(\widehat{CB_1D_1, B_1DB})$; объем параллелепипеда.

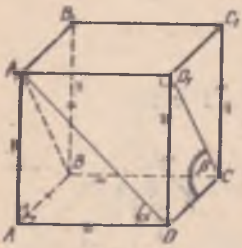


Рис. 207.

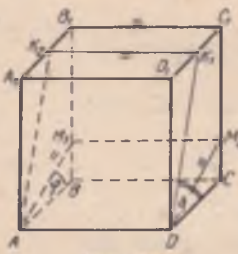


Рис. 208.

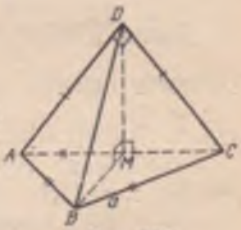


Рис. 209.

Рис. 210.

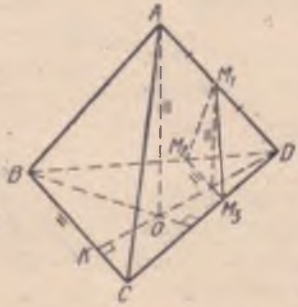


Рис. 211.

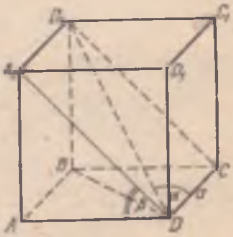


Рис. 212.

По рисунку 213

21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $|AC_1| = d$. Найдите $(\widehat{AC_1, ABC})$ и объем параллелепипеда.

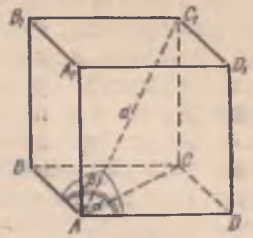


Рис. 213.

По рисунку 214

22. $|AD| = b$. Назовите свойства $[D\text{-}ABC]$. Какой прямой принадлежит центр шара, описанного вокруг $[D\text{-}ABC]$?

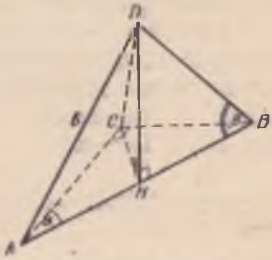


Рис. 214.

Примечание. Для выполнения устного плана решения геометрических задач с применением тригонометрии необходимо научить школьников выражать $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и т. д.

III. В «Геометрии. 9—10» определенное место занимают задачи на определение радиуса шара, вписанного в многогранник, и шара, описанного вокруг многогранника. Работу над этими задачами целесообразно организовать в таком порядке.

1. Доказать, что центр шара, вписанного в многогранник, есть пересечение биссекторных плоскостей всех его двугранных углов.

2. Доказать равенство $r = 3V : S$, где V, S — соответственно объем и площадь полной поверхности многогранника, r — радиус вписанного шара.

3. Положение центра O шара, описанного вокруг многогранника, может быть определено одним из следующих способов. а) точка O есть пересечение двух прямых, которые проходят через центры кругов, описанных вокруг непараллельных граней многогранника, и перпендикулярных им; б) точка O есть пересечение трех плоскостей, которые проходят через середины непараллельных ребер многогранника и перпендику-

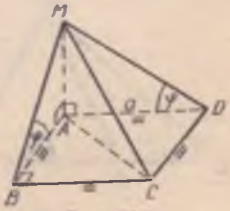


Рис. 215.

лярных этим ребрам; в) точка O есть пересечение прямой, которая проходит через центр круга, описанного вокруг одной из граней, и перпендикулярной плоскости α этого круга, и плоскости, проходящей через середину ребра, непараллельного α и перпендикулярной этому ребру.

4. Сфера определяется четырьмя некомпланарными точками. Поэтому решение всякой задачи на вычисление радиуса, описанного вокруг многогранника шара, состоит из доказательства, что он вписывается в шар, и вычисления радиуса сферы, описанной вокруг какой-нибудь треугольной пирамиды, вершинами которой являются вершины данного многогранника.

З а д а ч а. Основанием пирамиды является квадрат со стороною a, два двугранных угла при ребрах основания прямые, а два других равны φ. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду. Отрезок MA — высота пирамиды (рис. 215). Поэтому

$$V = \frac{1}{3} \cdot |MA| \cdot a^2 = \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \varphi; \quad S(MAD) = S(MAB) = \\ = 0{,}5a^2 \operatorname{tg} \varphi;$$

$$S(MBC) = S(MCD) = S(ACD) : \cos \varphi = 0{,}5a^2 : \cos \varphi.$$

Находим площадь полной поверхности пирамиды

$$S = a^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi + 1 : \cos \varphi).$$

Таким образом,

$$r = 3V : S = a^3 \operatorname{tg} \varphi : (a^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi + 1 : \cos \varphi)) = \frac{a \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi + 1}.$$

IV. Сформулируем наиболее общие алгоритмы обучения учащихся векторному решению геометрических задач.

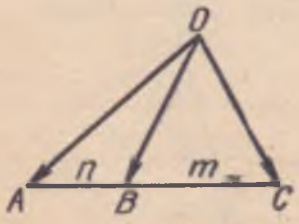


Рис. 216.

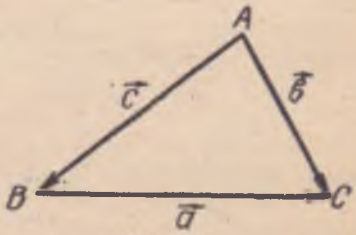


Рис. 217.

Отметим два важных свойства векторов, которые часто применяются при решении задач:

а) $\overrightarrow{OB} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OC}$ (рис. 216);

б) $\vec{b}\vec{c} = 0{,}5(b^2 + c^2 - a^2)$ (рис. 217).

Применение векторной алгебры к решению задач основано на следующих положениях:

а) Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть существование такого $x \neq 0$, что $\vec{b} = x\vec{a}$;

б) Если $\vec{a} \neq m\vec{b}$, то всякий вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно единственным образом представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$;

в) Если $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $x = y = 0$;

г) Для каждого вектора пространства существует единственное разложение по трем данным некомпланарным векторам;

д) Если $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ и векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, то $x = y = z = 0$;

е) В качестве базисных выбираются векторы, у которых известны длина и углы между ними. Во многих случаях целесообразно раскладывать векторы по взаимно перпендикулярным векторам;

ж) Решение метрических задач связано с применением скалярного произведения векторов. При решении аффинных задач свойства скалярного произведения, как правило, не применяются.

Приводим примерный общий план векторного решения задач.

Перевести условие задачи на язык векторов, т. е. составить систему векторных уравнений по условию задачи. Выбрать базисные векторы. Разложить все нужные векторы по базисным векторам: Упростить систему векторных уравнений. Векторные уравнения заменить алгебраическими (на основании единственности разложения векторов по базисным векторам). Решить систему алгебраических уравнений. Объяснить геометрический смысл полученного решения этой системы.

Задача 1. В пирамиде $[M\text{-}ABCD]^n$* все ребра равны единице. $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KM}$. $\overrightarrow{BP} = 0{,}25\,\overrightarrow{BM}$. Постройте точку $X = (MC) \cap (AKP)$ и найдите $x = |MX| : |XC|$ (рис. 218).

Некомпланарные векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AM}$ однозначно определяют $[M\text{-}ABCD]^n$, и через них можно выразить компланарные векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AX}$. Поэтому

$$\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AK} + p\overrightarrow{AP} \qquad (1).$$

Очевидно,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{1+x}\,(\vec{c} + x\overrightarrow{AC}). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$\frac{1}{1+x}\,(\vec{c} + x\overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{AK} + p\overrightarrow{AP}. \qquad (3)$$

Выразим векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\overrightarrow{AK} = 0{,}5\,(\vec{c} + \vec{b});\quad \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b};\quad \overrightarrow{AP} = 0{,}25\,(3\vec{a} + \vec{c}).$$

Теперь равенство (3) принимает вид

$$\left(-0{,}5k - 0{,}25p + \frac{1}{1+x}\right)\vec{c} + \left(-0{,}5k + \frac{x}{1+x}\right)\vec{b} +$$
$$+ \left(-0{,}75p + \frac{x}{x+1}\right)\vec{a} = \vec{0}.$$

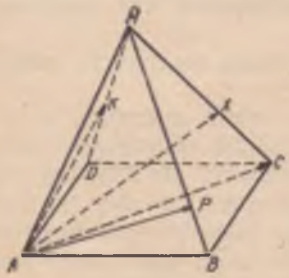


Рис. 218.

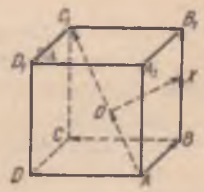


Рис. 219.

* Так обозначается правильная пирамида.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарные, поэтому отсюда получаем систему уравнений

$$0{,}5k + 0{,}25p - \frac{1}{1+x} = 0;\ 0{,}5k - \frac{x}{1+x} = 0;$$

$$0{,}75p - \frac{x}{1+x} = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получаем $x = 3 : 4$.

Задача 2. В $\Phi = [ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1]^{\perp}$ четырехугольник $ABCD$ — ромб. $|AB| = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$, $|AA_1| = 4$, $\overrightarrow{AO} = 0{,}5\overrightarrow{OC_1}$. Плоскость α проходит через O и $\alpha \perp (AC_1)$. Построить точку $X = \alpha \cap (BB_1)$ и найти $|BX| = x$.

Векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ единственным образом определяют фигуру Φ, потому что известны их длины и углы между ними. По условию задачи

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{OX} = 0. \qquad (4)$$

Выразим $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{OX}$ через базисные $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 219)

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c};\ \overrightarrow{OX} = \vec{b} + \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c} + x\vec{c}.$$

Теперь равенство (4) принимает вид

$$(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c} + x\vec{c}\right) = 0.$$

Раскрыв скобки и выполнив преобразования, получаем $|BX| = 29 : 24$.

Задача 3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки M (2; 1; 1), K (1; 0; —1), P (0; 1; —3).

Пусть точка D (x, y, z) $\in (MKP)$. Тогда

$$\overrightarrow{MD} = n\overrightarrow{MK} + m\overrightarrow{MP}, \qquad (1)$$

где n, m — неизвестные числа.

Очевидно, $\overrightarrow{MD} = (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$; $\overrightarrow{MK} = (1-2)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k}$; $\overrightarrow{MP} = (0-2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (-3-1)\vec{k}$. Поэтому равенство (1)

можно записать так: $(x-2)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+(z-1)\vec{k}=$ $=n(-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k})+m(-2\vec{i}-4\vec{k})$ или $(x-2+n+$ $+2m)\vec{i}+(y-1+n)\vec{j}+(z-1+2n+4m)\vec{k}=\vec{0}$.

Получаем систему уравнений

$$x-2+n+2m=0,\quad y-1+n=0,\quad z-1+2n+4m=0.$$

Исключив из этой системы уравнений n и m, получаем решение задачи $2x-z-3=0$.

Замечание. Если поменять местами теоремы 15 и 16 книги «Геометрия. 9—10», то их векторное доказательство становится проще.

1. Дано: $(AB)\parallel(A_1B_1)$ и $(AB)\perp(AA_1C)$. Доказать: $(A_1B_1)\perp(AA_1C)$.

Доказательство. $\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq 0)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$ и $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Поэтому $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=$ $=k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$ и $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

2. Дано: $(AB)\perp(AA_1C)$ и $(A_1B_1)\perp(AA_1C)$. Доказать: $(AB)\parallel(A_1B_1)$.

Доказательство. Допустим, что $(A_1B_1)\nparallel(AB)$. Тогда существует (на основании первой теоремы) прямая A_1B_1', параллельная (AB) и перпендикулярная (AA_1C_1). Но через точку A_1 проходит только одна прямая, перпендикулярная (AA_1C_1). Полученное противоречие и доказывает теорему.

V. В «Геометрии. 9—10» использованы различные способы при выводе формул объемов многогранников и фигур вращения. Однако можно осуществить единый подход при выводе этих формул, если сделать следующее. В начале § 55 «Геометрии. 9—10» дается определение объема многогранника и принимается без доказательства, что при данной единице длины поставленная задача имеет единственное решение, т. е. каждый многогранник имеет определенный объем.

После этого целесообразно доказать теорему «Объем всякого многогранника и фигуры вращения равен $\int_0^H S(x)dx$».

Ее доказательство сводится к проверке того, что величина $\int_0^H S(x)\,dx$ отвечает всем трем перечисленным выше условиям. В самом деле, если Φ — куб, длина ребра

которого принята за единицу измерения длин, то $H = 1$, $S(x) = 1$, $V(x) = \int_0^1 1dx$. Далее, у конгруэнтных многогранников и фигур вращения все соответствующие их части конгруэнтны. Поэтому, если $\Phi_1 \cong \Phi_2$, то $H_1 = H_2 = H$, $S_1(x) = S_2(x) = S(x)$, $\int_0^{H_1} S_1(x)\,dx = \int_0^{H_2} S_2(x)\,dx$.

То, что величина $\int_0^H S(x)\,dx$ удовлетворяет и третьему требованию, следует из таких свойств интеграла.

1. Если $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ и Φ_1 и Φ_2 не имеют общих внутренних точек, то $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ и $\int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H S_1(x)\,dx + \int_0^H S_2(x)\,dx$.

2. $\int_0^H S(x)\,dx = \int_0^h S(x)\,dx + \int_h^H S(x)\,dx$.

После доказательства равенства $V(\Phi) = \int_0^H S(x)\,dx$ вывод всех определенных программой формул объемов многогранников и фигур вращения сводится к решению стандартных задач на применение одной общей формулы. Более того, ученикам становятся доступными и более сложные задачи на вычисление объемов различных фигур.

VI. В «Геометрии. 9—10» сказано, что за площадь боковой и полной поверхности цилиндра, конуса и усеченного конуса принимаются площади соответствующих разверток. За площадь поверхности шара принимается предел отношения приращения его объема к приращению радиуса, если приращение радиуса стремится к нулю.

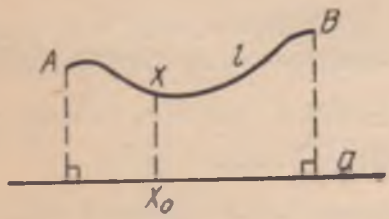


Рис. 220.

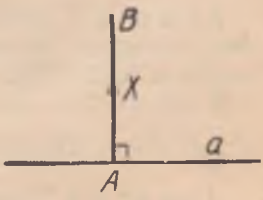


Рис. 221.

Однако можно осуществить единый подход к определению и выводу формул площадей всех фигур вращения.

Ученики к этому времени знают, что площадь криволинейной трапеции определяется по формуле $S = \int_a^b f(x)\,dx$. Криволинейную трапецию можно рассматривать как объединение всех отрезков, концы которых имеют координаты x и $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Аналогично фигуру, которая образована вращением непрерывной кривой AB (рис. 220), расположенной в одной полуплоскости относительно оси a, можно рассматривать как объединение всех окружностей (их плоскости перпендикулярны оси вращения, их центры принадлежат этой оси), которые пересекают образующую AB. Отсюда понятно, что за площадь поверхности вращения целесообразно принять величину, которая определяется формулой $S(\Pi) = \int_0^l C(x)\,dx$, где l — длина образующей AB. Если X — произвольная точка образующей AB, то x — длина кривой AX и $C(x)$ — длина окружности, которая образована вращением точки X вокруг a.

При таком едином подходе к определению площади поверхности вращения вывод формул для частных случаев осуществляется по единому алгоритму. Рассмотрим задачи на применение формулы $S(\Pi) = \int_0^l c(x)\,dx$, которые можно решать на занятиях кружка.

Задача 1. Точка $A \in a$ (рис. 221), $[AB] \perp a$, $|AB| = r$. Найдите площадь фигуры (круга), образованной вращением $[AB]$ вокруг оси a.

Решение. Если $X \in [AB]$ и $|AX| = x$, то $l = r$, $C(x) = 2\pi x$. Поэтому $S(\Pi) = \int_0^r 2\pi x dx = \pi r^2$.

Задача 2. $[AB] \parallel a$; $|a, [AB]| = r$, $|AB| = h$. Найдите площадь фигуры, образованной вращением $[AB]$ вокруг a (рис. 222).

Решение. Если $X \in [AB]$ и $|AX| = x$, то $C(x) = 2\pi r$; $l = r$. Поэтому $S(\Pi) = \int_0^h 2\pi r dx = 2\pi rh$.

Задача 3. Прямоугольный $\triangle ACB$ вращается вокруг

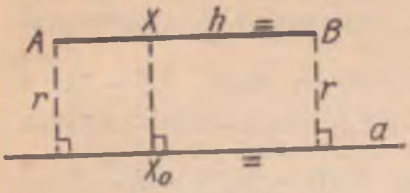


Рис. 222.

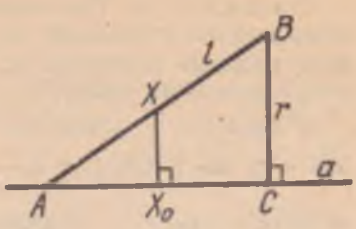


Рис. 223.

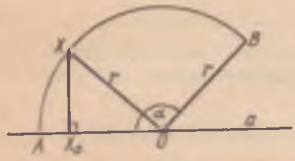


Рис. 224.

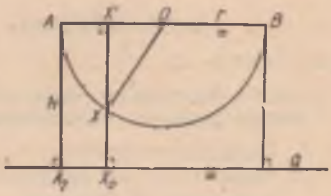


Рис. 225.

(AC). Найдите площадь фигуры, образованной вращением $[AB]$ вокруг (AC), если $|AB| = l$, $|BC| = r$ (рис. 223).

Решение. Пусть X — произвольная точка отрезка $[AB]$ и $|AX| = x$. Строим $[XX_0] \perp (AC)$. Очевидно, $|XX_0| : r = x : l$. Отсюда $|XX_0| = \frac{xr^2}{l}$, $C(x) = 2\pi \frac{rx}{l}$.

Поэтому $S(\Pi) = \int\limits_0^l 2\pi \frac{r}{l} x dx = \pi r l$.

Задача 4. Найдите площадь поверхности, образованной вращением кругового сектора AOB вокруг (AO), если $|AO| = r$, $\widehat{AOB} = \alpha$ (рис. 224).

Решение. Если X — произвольная точка дуги AB и $\overset{\frown}{AX} = x$, то $x = r \cdot \widehat{AOX}$ (величина угла AOX выражена в радианах). Отсюда $\widehat{AOX} = x : r$, $|XX_0| = r \sin \frac{x}{r}$. Поэтому $C(x) = 2\pi r \sin \frac{x}{r}$. Очевидно, $AB = r\alpha$. Итак, $S(\Pi) = \int\limits_0^{r\alpha} 2\pi r \sin \frac{x}{r} dx = 2\pi r^2 (-\cos\alpha + 1)$.

В частности, если $\alpha = \pi$, то $S(\Pi) = 4\pi r^2$, т. е. площадь сферы равна $4\pi r^2$.

Задача 5. Положение полуокружности радиуса r относительно a показано на рисунке 225. $|AA_0| = h$. Найдите площадь поверхности, образованной вращением этой полуокружности вокруг a.

Решение. Очевидно, $l = \pi r$. Если $X \in \smile AB$ и $\overline{AX} = x$, то $|XX_0| = h - |XX'| = h - r\sin\frac{x}{r}$ и $C(x) = 2\pi\left(h - r\sin\frac{x}{r}\right)$. Поэтому $S(\Pi) = \int_0^{\pi r} 2\pi\left(h - r\sin\frac{x}{r}\,dx\right) = 2\pi r(\pi h - r)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I. **Некоторые общие вопросы методики обучения учащихся работе с изображениями пространственных фигур**

1. Основные понятия 9
2. Виды задач на изображениях пространственных фигур и методы их решения 11
3. Требования к изображениям пространственных фигур 15
4. Задачи на готовом чертеже 23
5. Построение сечений многогранников плоскостью . . 29

Глава II. **Изучение свойств параллельных проекций и решение конструктивных задач в IX—X классах** . . .

1. Основные понятия стереометрии. Аксиомы 34
2. Применение свойств параллельных проекций в теме «Параллельность в пространстве» 41
3. Некоторые свойства ортогональной проекции и их применение к решению задач 56
4. Упражнения для усвоения нового материала . . . 82
5. Обобщенные приемы решения задач по геометрии в десятом классе 88

Александр Борисович Василевский

Параллельные проекции и решение задач по стереометрии

Редактор К. М. Лукашевич. Обложка художника Е. М. Малышевой. Художественный редактор Н. Л. Шавшукова. Технический редактор В. Н. Жук. Корректор В. С. Бабеня.

ИБ № 561

Сдано в набор 27.12.77. Подписано в печать 26.06.78. Формат 84×108 1/32. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,46. Уч.-изд. л. 4,21. Тираж 45 000 экз. Заказ 874. Цена 10 к.

Издательство «Народная асвета» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600 Минск, Парковая магистраль, 11.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220827 Минск, Красная, 23.