ЦИРЕЛИС Д. И. (г. Бендеры)

■

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В данной статье используется опыт работы автора в молдавской средней школе-интернате № 1 г. Бендеры (1957—1961 гг.), в ЮМШ г. Тирасполя при Тираспольском пединституте (1961—1965 гг.) и в средней школе № 10 г. Бендеры (1965—1967 гг.), в основном на занятиях математического кружка старших классов.

Решение экстремальных задач предоставляет большие возможности для повышения активности учащихся на внеклассных занятиях, поднимает интерес к изучению математики, расширяет математический горизонт учащихся, приближает преподавание математики к жизни.

Общие методы решения экстремальных задач изучаются в математическом анализе. Но ряд задач данного типа можно решить элементарными методами, которые требуют от учащихся применения приемов, содействующих развитию их математических способностей, и учат рациональному использованию математического аппарата.

Например, задачу: „Вписать в шар радиуса R цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности S“ — можно решить в средней школе одним из следующих методов.

Пусть x — радиус основания вписанного цилиндра, $2y$ — его высота; тогда $S=4\pi xy$, $x^2+y^2=R^2$.

Задача заключается в определении значений x и y, максимизирующих функцию S.

1-й способ. $S = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{-x^4 + R^2x^2} = 4\pi\sqrt{-\left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2 + \frac{R^4}{4}}$. Очевидно, что $S_{\max} = 2\pi R^2$ при $x = y = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

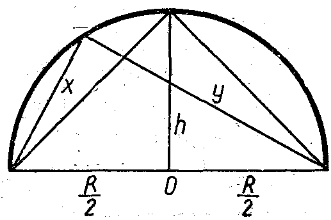

Рис. 1.

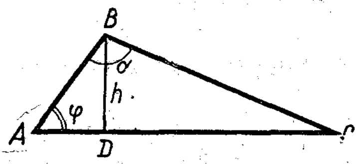

Рис. 2.

2-й способ. $S = 4\pi xy = 2\pi(2xy) = 2\pi[(x^2 + y^2) - (x - y)^2] = 2\pi[R^2 - (x - y)^2]$. $S_{\max} = 2\pi R^2$ при $x = y$.

3-й способ. Так как $x^2 + y^2 = R^2$, то существует угол φ, такой, что $x = R\cos\varphi$; $y = R\sin\varphi$; $S = 4\pi R\cos\varphi \cdot R\sin\varphi = 2\pi R^2 \sin 2\varphi$.

Очевидно, что $S_{\max} = 2\pi R^2$ при $\sin 2\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 45°$; тогда $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

4-й способ. Решение задачи сводится к определению наибольшего значения произведения чисел x и y при постоянной сумме их квадратов. На рисунке 1 дано геометрическое решение задачи; x и y — катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого R.

$$xy = Rh; \quad h_{\max} = \frac{R}{2} \quad \text{при} \quad x = y = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

5-й способ. Применяя аппарат неравенств, получим: $(x - y)^2 \geqslant 0$; $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$; $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $xy \leqslant \frac{1}{2}R^2$.

Следовательно,

$$(xy)_{\max} = \frac{1}{2}R^2$$

при $x = y = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, аппарат тригонометрических функций, применяемый к решению подобных задач (см. 3-й способ решения), получает новое назначение. Таких примеров можно привести много. Например, решая задачу: „Среди всех треугольников с данным углом $B=\alpha$ и данной высотой h_b найти тот, у которого наименьший периметр“, мы углубляем знания учащихся по тождественным преобразованиям тригонометрических функций. Имеем (рис. 2):

$$2p = AB + BC + AD + DC = \frac{h}{\sin\varphi} + \frac{h}{\sin(\varphi+\alpha)} +$$

$$+ h\operatorname{ctg}\varphi - h\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi) = h\,\frac{\sin(\alpha+\varphi)+\sin\alpha+\sin\varphi}{\sin\varphi\sin(\alpha+\varphi)} =$$

$$= h\,\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}} = h\,\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}} =$$

$$= h\,\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)-\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad (2p)_{\min} = h\,\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{при } \varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

Особое внимание уделяется исследованию функций и определению их экстремальных значений графическими методами, которые позволяют объединить в одну схему как задачи на максимум и минимум в классическом смысле так и задачи линейного и нелинейного программирования.

В различных теоретических и практических задачах часто требуется определить значения переменных, которые максимизируют или минимизируют данную функцию и в то же время удовлетворяют дополнительным требованиям (задачи на условные экстремумы).

Рассмотрим один из возможных графических приемов исследования экстремальных значений функций двух переменных.

Пусть требуется исследовать функцию $z=f(x, y)$, на аргументы которой наложено дополнительное условие $g(x, y)=0$. Это означает, что значения функции $f(x, y)$ рассматриваются только для точек, лежащих на кривой $g(x, y)=0$.

Допустим, что через каждую точку M_0 плоскости проходит лишь одна кривая вида $f(x,y)=z_0$. Иначе говоря, при $z_0 \neq z_1$ кривые $f(x, y)=z_0$ и $f(x, y)=z_1$ не имеют общих точек. Тогда при непрерывном изменении параметра z_0 кривые $f(x, y)=z_0$ покроют часть плоскости (рис. 3).

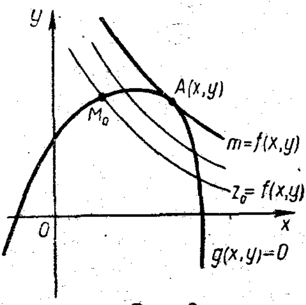

Рис. 3.

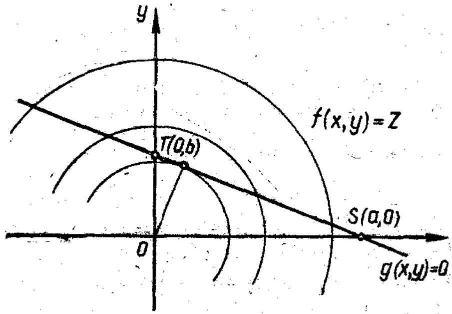

Рис. 4.

Предположим, что функция $f(x, y)$, рассматриваемая только на кривой $g(x, y)=0$, достигает в точке A своего наибольшего значения. Обозначим значение функции $f(x, y)$ в точке A через m и рассмотрим кривую $f(x, y)=m$. Ясно, что точка A лежит на этой кривой, т. е. является общей точкой кривых $g(x, y)=0$ и $f(x, y)=m$. В то же время по одну сторону кривой $f(x, y)=z$ значения функции $f(x, y)$ больше, чем m, а по другую — меньше, чем m. Следовательно, кривая $g(x, y)=0$ расположена целиком по одну сторону от кривой $f(x, y)=m$ (а именно — по ту сторону, где значения функции $f(x, y)$ меньше m).

Следовательно, в точке A кривая $g(x, y)=0$ касается кривой $f(x, y)=m$. То же будет, если в точке A функция достигает наименьшего значения.

Итак, *если в точке A на кривой $g(x, y)=0$ функция $f(x, y)$ имеет экстремальное значение m, то кривая $f(x,y)=m$, проходящая через точку A, касается кривой $g(x, y)=0$.*

Таким образом, определение экстремумов функции $z=f(x, y)$ при наличии связи $g(x, y)=0$ можно заменить задачей: из семейства кривых $f(x, y)=z$ выделить те, которые касаются кривой $g(x, y)=0$ (рис. 3).

Приведем несколько примеров графического исследования условных экстремумов функций.

1. Исследовать функцию $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ при условии, что x и y связаны соотношением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad \text{где } a>0,\ b>0.$$

В этом случае линия $f(x, y)=z_0$ представляет собой окружность радиуса z_0 с центром в начале координат, а линия $g(x, y)=0$ $\left(\text{т. е. } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0\right)$ есть прямая (рис. 4). Из линий $f(x, y)=z_0$ (т. е. окружностей с центром в начале координат) лишь одна касается прямой $g(x, y)=0$, причем вся эта прямая расположена (кроме точки касания) в области, где функция $f(x, y)$ имеет бо́льшие значения. Поэтому в точке касания функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения (расстояние точки (x, y) от начала координат), которое, как легко видеть из $\triangle OTS$ на рисунке 4, равно $f(x, y)_{\min}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Наибольшего же значения функция $f(x, y)$ на прямой $g(x, y)=0$ не имеет — это ясно геометрически, так как прямая в обе стороны неограниченно удаляется от начала координат.

2. Исследовать на максимум и минимум функцию $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ при условии, что $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Здесь линиями $f(x, y)=z_0$ опять являются окружности с центром в начале координат, а линия $g(x, y)=0$ (т. е. $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$) есть окружность радиуса r с центром в точке (a, b). Геометрически ясно, что имеется *две* окружности $f(x, y)=z$, касающиеся кривой $g(x, y)=0$ (рис. 5), радиусов $z_{\min}$ и $z_{\max}$, определяемых формулами:

$$z_{\min}=OA=\sqrt{a^2+b^2}-r,$$

$$z_{\max}=OB=\sqrt{a^2+b^2}+r.$$

3. Определить экстремальные значения функции $f(x, y) = \frac{x}{m} + \frac{y}{n}$ при $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Здесь $f(x, y) = z_0$ — прямая линия, уравнение которой $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = z_0$, причем при разных z_0 мы получаем

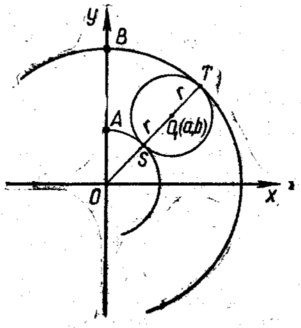

Рис. 5.

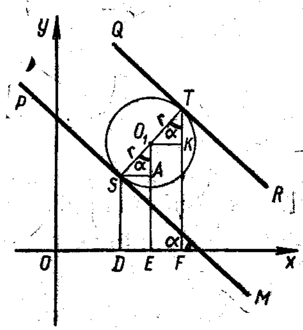

Рис. 6.

семейство параллельных прямых, заполняющих плоскость. Касательными к линии $g(x, y) = 0$ (т. е. окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$) являются прямые PM и QR, уравнения которых

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = z_{\min} \quad \text{и} \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = z_{\max}$$

соответственно (рис. 6).

Имеем: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{m}$, точка S имеет координаты:

$$x = OD = OE - DE = OE - SA =$$
$$= a - r \sin \alpha = a - \frac{rn}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$
$$y = SD = AE = O_1E - O_1A = b - r \cos \alpha = b - \frac{rm}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

откуда

$$z_{\min} = \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} - \frac{r}{mn}\sqrt{m^2 + n^2}.$$

Аналогично находим координаты точки T:

$$x = OF = a + \frac{rn}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

$$y = TF = b + \frac{rm}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

и потому

$$z_{\max} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{r}{mn}\sqrt{m^2+n^2}.$$

В приведенных выше примерах те кривые семейства $f(x, y) = z_0$, которые касаются линии $g(x, y) = 0$, были найдены непосредственно из геометрических соображений. В более сложных случаях для этой цели удобно пользоваться следующей теоремой (доказательство которой можно найти в курсах высшей алгебры).

Теорема. *Если кривые $f(x, y) = a$ и $g(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — некоторые многочлены от x и y, касаются друг друга в точке (x_0, y_0), то $x = x_0$* и *$y = y_0$ есть не менее, чем двойное решение системы*

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = a. \end{cases}$$

Иначе говоря, если, скажем, исключить из этой системы y, то полученное уравнение относительно x будет иметь $x = x_0$ двойным корнем.

Многие геометрические задачи на максимум и минимум могут быть решены с использованием этой теоремы.

4. Из квадратного листа жести нужно вырезать по его углам квадраты так, чтобы после загибания оставшихся кромок образовалась открытая сверху коробка наибольшего объема.

Задача сводится к определению наибольшего значения функции

$$V = 4x^2y \tag{1}$$

при наличии связи

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{a}{2} \\ x > 0, \ y > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) представляет собой отрезок прямой AB (рис. 7) без граничных точек.

Определение экстремума функции $V=4x^2y$ при $x+y=\frac{a}{2}$ и $x>0$, $y>0$ заменяется задачей: из семейства кривых $4x^2y=V$ (V — параметр) найти ту кривую, которая касается отрезка $x+y=\frac{a}{2}$, $x>0, y>0$.

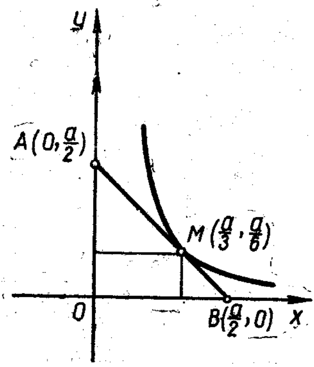

Рис. 7.

На основании сформулированной выше теоремы система

$$\begin{cases} x+y=\frac{a}{2}, \\ 4x^2y=V \end{cases}$$

должна иметь двойное решение. Исключая переменную y, получаем уравнение $4x^3-2ax^2+V=0$, которое должно иметь двойной корень. Имеем:

$$x^3-\frac{a}{2}x^2+\frac{V}{4}=0.$$

Для того чтобы это уравнение имело двойной корень, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^3+27\cdot\frac{V}{4}=0,$$

откуда

$$V=\frac{2a^3}{27}.$$

Теперь легко находим двойной корень:

$$x_1=x_2=\frac{a}{3},$$

$$y=\frac{a}{6}$$

(x и y — координаты точки касания кривой $4x^2y=V$ и отрезка $x+y=\frac{a}{2}$; $x>0$, $y>0$).

Ответ. $V=\frac{2}{27}a^3$ при $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{a}{6}$.

Аналогичным образом решаются и другие задачи. Мы сформулируем несколько задач, для которых приведем соответствующие чертежи, аналитические выражения функций, экстремумы которых должны быть найдены, системы ограничений и ответы.

5. В круг радиуса R вписать равнобедренный треугольник, вершина которого находилась бы в центре круга и площадь которого была бы наибольшей (рис. 8).

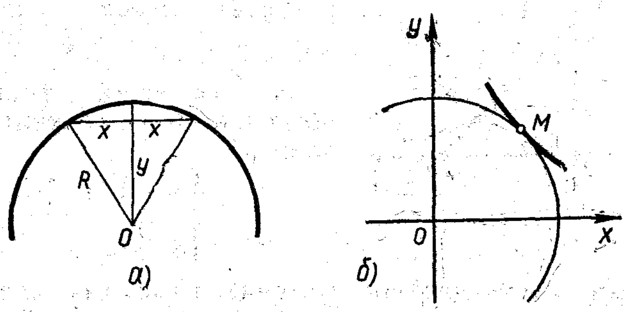

Рис. 8.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $S = xy$ при ограничениях

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x > 0, \; y > 0. \end{cases}$$

Ответ. $S_{\max} = \frac{1}{2}R^2$ при $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

6. В шар радиуса R вписать конус наибольшего объема с вершиной в центре шара.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x > 0, \; y > 0. \end{cases}$$

Ответ. $V_{\max} = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3}R^3$ при $x = \frac{R\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

7. В данный шар вписать цилиндр наибольшего объема (рис. 9).

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V=2\pi x^2 y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$$

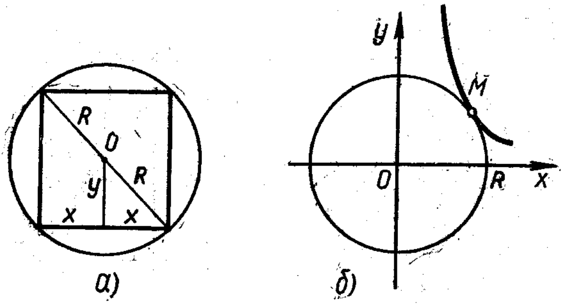

Рис. 9.

Ответ. $V_{\max}=\frac{4}{9}\pi R^3\sqrt{3}$ при $x=\frac{R\sqrt{6}}{3}$, $y=\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

8. В данный шар вписать конус наибольшего объема (рис. 10).

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x^2+(y-R)^2=R^2, \\ 0<x<R,\ \ 0<y<2R. \end{cases}$$

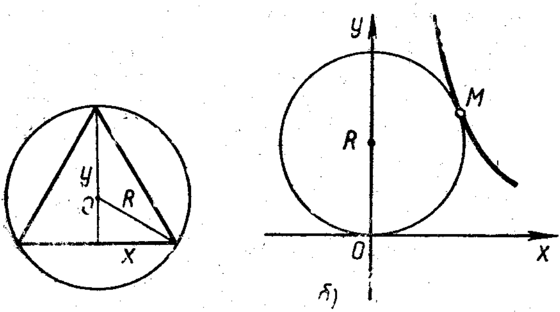

Рис. 10.

Ответ. $V_{max} = \frac{32}{81}\pi R^3$ при $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$, $y = \frac{4R}{3}$.

9. Вписать в правильную четырехугольную пирамиду правильную четырехугольную призму наибольшего объема (рис. 11).

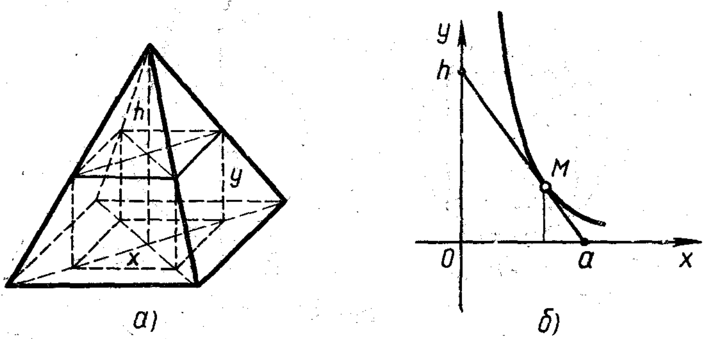

Рис. 11.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V = x^2 y$ при ограничениях

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1, \quad (h \text{ — высота, } a \text{ — сторона основания}) \\ 0 < x < a, \; 0 < y < h. \end{cases}$$

Ответ. $V_{max} = \frac{4}{27}a^2 h$ при $x = \frac{2}{3}a$, $y = \frac{h}{3}$.

10. Вписать в конус радиуса R и высоты h цилиндр наибольшего объема.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V = \pi x^2 y$, где x — радиус основания, а y — высота искомого цилиндра при ограничениях

$$\begin{cases} \frac{x}{R} + \frac{y}{h} = 1, \\ 0 < x < R, \; 0 < y < h. \end{cases}$$

Ответ. $V_{max} = \frac{4}{9} V_{кон}$.

11. Описать около шара радиуса R усеченный конус наименьшего объема (рис. 12).

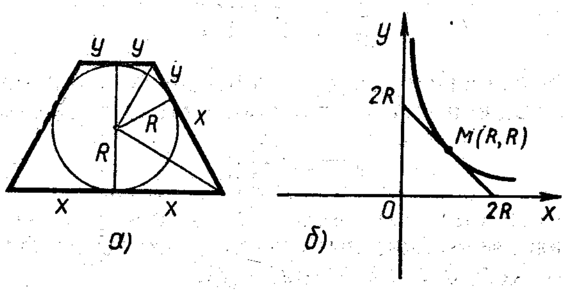

Рис. 12.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $V=\frac{2}{3}\pi R[(x+y)^2-R^2]$ при ограничениях

$$\begin{cases} R^2=xy, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$$

Ответ. $V_{\min}=2\pi R^3$ при $x=y=R$, т. е. конус вырождается в цилиндр.

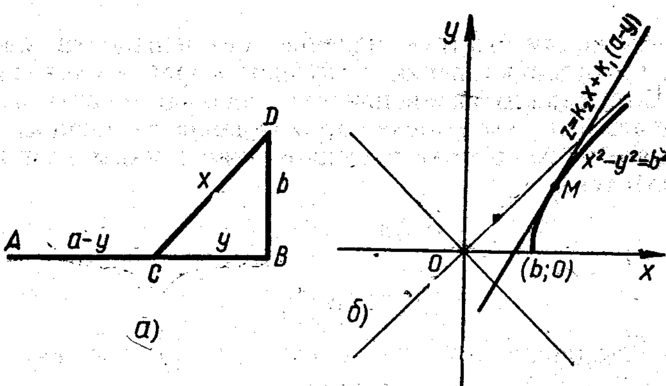

Рис. 13.

12. Стоимость перевозки груза на один километр по железной дороге AB (рис. 13) равна k_1 рублей, а по шоссе CD — k_2 рублей, $k_1 < k_2$. Как должно про-

ходить шоссе CD (найти положение точки C), чтобы стоимость перевозки груза из пункта A в пункт D была наименьшей? $AB = a$, $BD = b$.

Задача сводится к нахождению минимума функции $f(x, y) = k_2x + k_1(a - y)$ при ограничениях

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = b^2, \\ b \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 0 \leqslant y \leqslant a. \end{cases}$$

Для решения найдем координаты точки касания гиперболы $x^2 - y^2 = b^2$ и прямой $z = k_2x + k_1(a - y)$.

Исключая из системы

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = b^2, \\ z = k_2x + k_1(a - y), \end{cases}$$

получим:

$$(k_2^2 - k_1^2)x^2 - 2k_2(z - ak_1)x + [(z - ak_1)^2 + k_1^2b^2] = 0.$$

Из условия касания

$$k_2^2(z - ak_1)^2 - (k_2^2 - k_1^2)[(z - ak_1)^2 + k_1^2b^2] = 0$$

находим:

$$z_{\min} = ak_1 + b\sqrt{k_2^2 - k_1^2},$$

при $x = \dfrac{k_2b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$, $y = \dfrac{k_1b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$.

Пример более сложной задачи:

13. Из круглого бревна диаметра $2R$ требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы прочность балки на изгиб была бы не меньше P, а площадь сечения балки не превышала бы S. Время, необходимое для ее вырезания, должно быть минимальным. На вырезку единицы длины по направлению AB (рис. 14) требуется k_1 сек., по направлению BC — k_2 сек. Сопротивление на изгиб пропорционально ширине балки и квадрату высоты ее поперечного сечения.

Обозначим высоту поперечного сечения балки через x, а его ширину — через y ($AB = x$, $BC = y$).

Тогда задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $t = 2k_1x + 2k_2y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ \alpha x^2 y \geqslant P, \\ xy \leqslant S, \\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

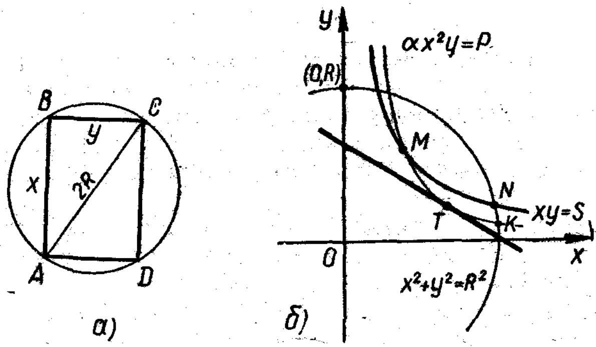

Рис. 14.

Таким образом, функция $t = 2k_1x + 2k_2y$ определена на криволинейном треугольнике MNK, где M — точка пересечения кривых $xy = S$ и $\alpha x^2 y = P$, точки N и K — точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с кривыми $xy = S$ и $\alpha x^2 y = P$ соответственно.

Для определения наименьшего значения функции $t = 2k_1x + 2k_2y$ найдем координаты точки касания (T) прямой $t = 2k_1x + 2k_2y = t_{\min}$ и кривой $\alpha x^2 y = P$.

Исключая y из системы

$$\begin{cases} 2k_1x + 2k_2y = t, \\ \alpha x^2 y = P, \end{cases}$$

получим:

$$2\alpha k_1 x^3 - \alpha t x^2 + 2k_2 P = 0.$$

Условие касания получаем из условия кратности корней уравнения $x^3 + px^2 + q = 0$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}p,$$

$$4p^3 + 27q = 0,$$

откуда

$$t_{\min} = 3\sqrt[3]{\frac{2k_1^2k_2P}{a}}.$$

Координаты точки T будут:

$$x = \frac{t}{3k_1}; \quad y = \frac{t}{6k_2}.$$

Исследование некоторых элементарных функций одного аргумента можно провести графически, если преобразовать их в функции двух аргументов при соответствующем ограничении их области определения.

1. Исследовать характер изменения функции $z = x^3 + px$; $p < 0$.

Пусть $y = x^3$, тогда $z = y + px$. Исследование данной функции сводится к исследованию функции двух переменных $z = y + px$ при $y = x^3$.

Изменение функции z легко проследить, так как z — отрезок оси Oy, отсекаемый на оси Oy прямой $y = -px + z$.

Пусть прямая $y = -px + z$ (z — параметр) пробегает все точки кубической параболы $y = x^3$; при этом направление пробега прямой меняется дважды: один

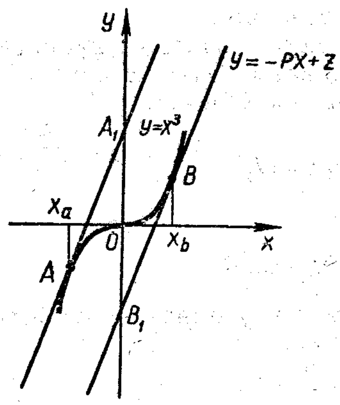

Рис. 15.

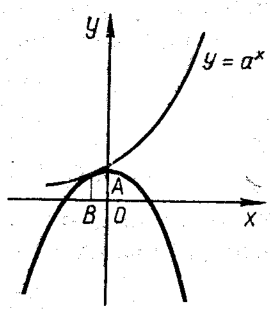

Рис. 16.

раз — в точке A, второй раз — в точке B (рис. 15). Точки A и B критические. В них прямая $y = -px + z$ касается кривой $y = x^3$; в точке B значение z достигает минимума, в точке A — максимума. Непосредственное визуальное определение приводит нас к следующим результатам: на интервале $(-\infty, x_a)$ значения z возрастают от $-\infty$ до $z_a = OA_1$; на отрезке $[x_a, x_b]$ значения z убывают от $z_a = OA_1$ до $z_b = OB_1$; на интервале $(x_b, +\infty)$ значения z возрастают от $z_b = OB_1$ до $+\infty$.

По графику на рисунке 15 можно решить и ряд дополнительных задач, например: а) найти значения функции z по заданным значениям аргумента x; б) найти значения аргумента x при заданных значениях функции z (т. е. решить уравнение $x^3 + px - z = 0$).

2. Определить экстремальное значение функции $z = a^x + x^2$; $a > 1$.

Пусть $y = a^x$, тогда $z = y + x^2$. По рисунку 16 определим характер экстремума (минимума), его приближенное значение $z_m = OA$ и соответствующее значение аргумента $x_m = OB$. Функция убывает на полуинтервале $(-\infty, x_m]$ и возрастает на $[x_m, +\infty)$.

Аналогично можно исследовать функции:

$$z = x^4 + px;\quad z = a^x + \cos x;$$

$$z = \sqrt{x^2 + \operatorname{tg}^2 x};\quad z = \sqrt{x^2 + a^{2x}};$$

$$z = \sqrt{(x-a)^2 + [f(x) - b]^2} \text{ и т. д.}$$

3. Определить экстремум функции $z = ax^2 + c + \dfrac{d}{x}$.

Пусть $y = \dfrac{d}{x}$ (1), тогда $z = ax^2 + c + y$ (2). Решение задачи сводится к определению координат точки касания T кривых (1) и (2) (рис. 17, $a > 0$).

Имеем:

$$ax^3 - (z - c)x + d = 0;$$

$$4\left(\frac{c-z}{a}\right)^3 + 27\frac{d^2}{a^2} = 0;$$

$$z_{\min} = c + 3a\sqrt[3]{\frac{d^2}{4a^2}} \text{ при } x = \sqrt[3]{\frac{d}{2a}}.$$

4. Однородный стержень, имеющий ось вращения в точке A, несет груз P на расстоянии a от точки A и удерживается в равновесии вертикальной силой Q,

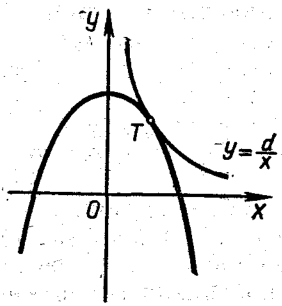

Рис. 17.

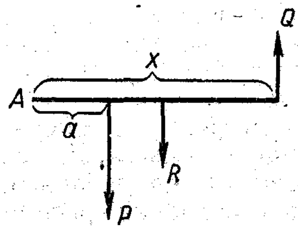

Рис. 18.

приложенной к его свободному концу. Определить длину стержня, при которой Q минимальна, если погонный метр стержня весит q (рис. 18).

Применяя условия равновесия тела, имеющего ось вращения, получим:

$$aP+\frac{1}{2}qx^2-Qx=0;\quad Q=\frac{Pa}{x}+\frac{1}{2}qx.$$

Пусть $y=\frac{Pa}{x}$, тогда $Q=y+\frac{1}{2}qx.$

Получим (рис. 19): $\frac{1}{2}qx^2-Qx+aP=0.$

$$Q^2-2aqP=0,$$

$$Q_{\min}=\sqrt{2aqP}\quad \text{при } x=\sqrt{\frac{2aP}{q}}.$$

5. Определить сопротивление внешней цепи, при котором выделяемая теплота в реостате наибольшая. ЭДС эмемента — E, его внутреннее сопротивление — r, полное сопротивление реостата — R, сила тока — I_a, сопротивление включенной части реостата — x, время прохождения тока — t.

Тогда $Q=kI^2tx$ при $I=\frac{E}{x+r}$, $0\leqslant x\leqslant R$.

Имеем: $Q=k\frac{E^2tx}{(x+r)^2}.$

Для определения максимума обозначим: $y = kE^2tx$. Тогда $Q = \frac{y}{(x+r)^2}$. Решение задачи сводится к опре-

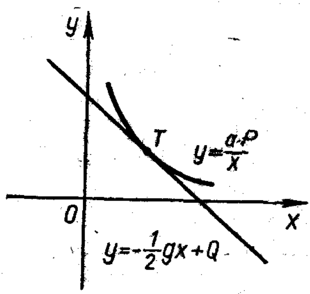

Рис. 19.

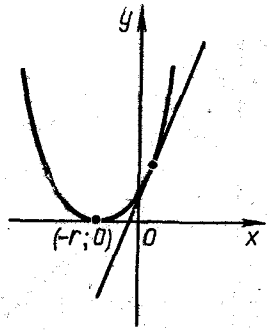

Рис. 20.

делению координат точки касания T (рис. 20) кривых $y = Q(x+r)^2$ и $y = kE^2tx$:

$$\begin{cases} y = Q(x+r)^2, \\ y = kE^2tx. \end{cases} \quad \begin{cases} Qx^2 + (2Qr - kE^2t)x + Qr^2 = 0, \\ (2Qr - kE^2t)^2 - 4Q^2r^2 = 0, \\ Q = \frac{kE^2t}{4r}. \end{cases}$$

Ответ. $Q = \frac{kE^2t}{4r}$.

6. Определить наибольшее и наименьшее значения равных действительных корней уравнения

$$x^2 - 2(\alpha + \beta)x + 2(\alpha\beta + 2\alpha) = 0.$$

Задача эквивалентна следующей: „Максимизировать и минимизировать функцию $z = \alpha + \beta$ при $(\alpha - 2)^2 + \beta^2 = 4$“. Графоаналитическое решение дает следующий результат (рис. 21):

$$z = 2(\sqrt{2} \pm 1) \text{ при } \alpha = 2 \pm \sqrt{2}, \ \beta = \pm\sqrt{2};$$

$$OA = 2(1 + \sqrt{2}); \ OB = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Решить задачу, если на параметры α, β накладывается дополнительное условие: $\alpha^2 + (\beta - 1)^2 \leqslant 1$ (рис. 22).

Ответ. $z_{\min}=0$ при $\alpha=0$, $\beta=0$;

$$z_{\max}=\frac{12}{5} \text{ при } \alpha=\frac{4}{5}, \quad \beta=\frac{8}{5}.$$

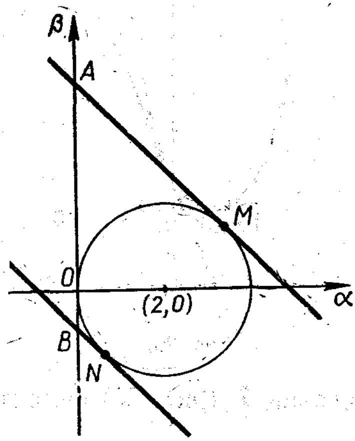

Рис. 21.

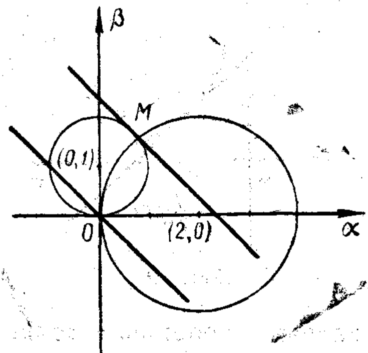

Рис. 22.

7. Груз весом P $кГ$ равномерно перемещают по горизонтальной поверхности, прилагая силу F под углом α к горизонту. Найти минимальное значение силы F при коэффициенте трения k (рис. 23).

Имеем: $Q=P-F\sin\alpha$; $F\cos\alpha=k(P-F\sin\alpha)$.

Задача сводится к определению наименьшего значения функции

$$F=\frac{kP}{\cos\alpha+k\sin\alpha}.$$

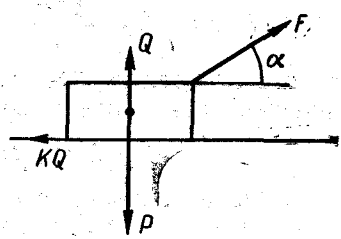

Рис. 23.

Ответ. $F_{\min}=\dfrac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$.

8. Ряд задач на отыскание экстремальных значений геометрических величин можно решить построением. Приведем условия нескольких таких задач.

1) Пусть M — данная точка, N_x — произвольная точка некоторого множества $\{L\}$ точек плоскости. Из

множества отрезков MN_x выделить отрезки наименьшей и наибольшей длины. Решить задачу, если: а) L — данный отрезок, б) L — данная окружность, в) L — данный многоугольник.

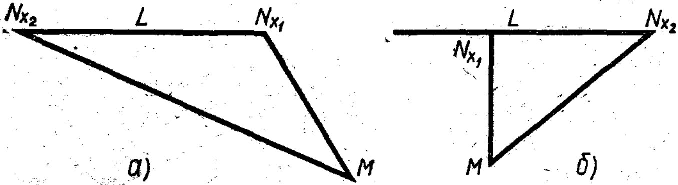

Рис. 24.

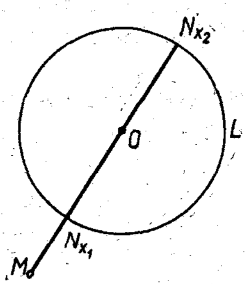

Рис. 25.

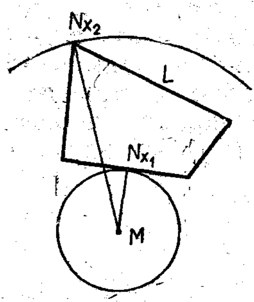

Рис. 26.

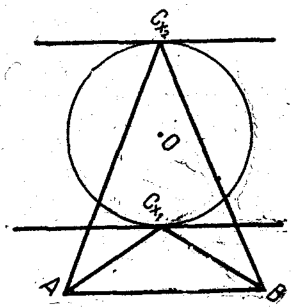

Рис. 27.

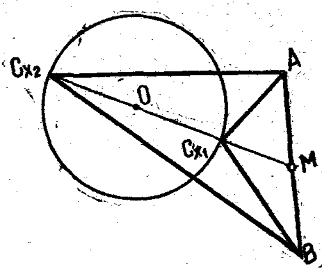

Рис. 28.

Решения показаны на рисунках 24—26. MN_{x_1} — отрезок наименьшей длины, MN_{x_2} — отрезок наибольшей длины.

2) AB — основание треугольника ABC_x, где C_x — произвольная точка окружности O. Построить треугольник:

а) наибольшей (наименьшей) площади (рис. 27);

б) медиана C_xM которого наибольшая (наименьшая) (рис. 28);

в) угол C_x которого наибольший (наименьший) (рис. 29).

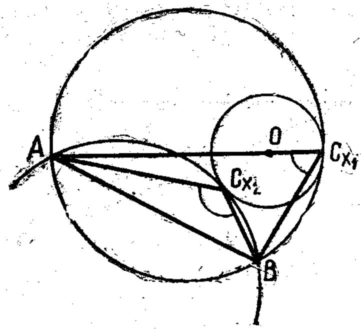

Рис. 29.

Описанная выше работа по решению задач на максимум и минимум позволяет на внеклассных занятиях в старших классах широко использовать графики всех элементарных функций, изучаемых в школе.