МАКАРЫЧЕВ Ю. Н. (Москва)

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Еще совсем недавно считалось, что основная цель обучения математике состоит в сообщении учащимся известных фактов и выработке определенных навыков. В последнее время в связи с существенным расширением сферы приложений математики образовательная роль ее стала пониматься шире. Человек, окончивший среднюю школу, должен владеть языком основных математических понятий, он должен в жизненной ситуации уметь выделять существенное (отличать его от несущественного), иметь развитую интуицию и в то же время обладать способностью к дедуктивным рассуждениям. Словом, этот человек должен иметь математическое развитие.

Изучение математики, при котором за основу принята теоретико-множественная концепция, может способствовать выработке таких качеств, которые составляют основу общей культуры человека.

Действительно, в любом вопросе науки или практики человеку приходится встречаться с различными объектами, изучать их свойства, наблюдать различные отношения между ними. Например, в географии такими объектами могут быть части света, свойствами — их природные условия, отношениями — взаимное расположение частей света. В математике отвлекаются от природы конкретных вещей — их называют просто элементами, а совокупности элементов, составленные по какому-либо признаку, — множествами. Данное множество можно разбивать (например, в целях классификации) на части — подмножества, выяснять принадлежность того или иного элемента множеству или его подмножеству. Например, в грамматике множество всех слов разбивают на существительные, прилагательные и т. д., в биологии множество всех позвоночных животных — на млекопитающих, птиц и пр. Какой частью речи является слово „красивый"? К какому классу животных относится голубь? Эти вопросы с точки зрения математики одинаковы. Слово или животное — это элемент множества, часть речи или класс животных — это подмножество. Выяснение принадлежности данного элемента тому или иному подмножеству определенного множества элементов представляет задачу, решение которой бывает важно в любой области знания.

Так же необходимо бывает в каком-то множестве устанавливать порядок среди его элементов или выяснять их пространственное расположение, находить объединение двух множеств или отыскивать их общие элементы, устанавливать различные соответствия.

Ясно, что, основанное на теоретико-множественной концепции, математическое воспитание будет способствовать развитию общей культуры учащегося. Изучение основных теоретико-множественных понятий поможет организовать его мышление (научит его лучше видеть связи между явлениями, более экономно мыслить).

Теоретико-множественный подход оказывается достаточно эффективным и при изучении школьного курса математики. В частности, он позволяет лучше раскрыть содержание понятий, что является необходимым условием их успешного освоения.

При сложившейся системе обучения наблюдается стремление не к раскрытию содержания понятий, а к достижению мнимой строгости в изложении. Это неизбежно ведет к преждевременной, ранней формализации, которая большинством учащихся не воспринимается. Отсюда и появляется тенденция к отработке навыков в решении типовых задач. В результате у многих учащихся образуются формальные знания, ограничивающие возможности их приложений, и, конечно, снижается интерес к изучению математики.

Сколько бы ни изменялись программы по математике — понятия числа, выражения, тождественного преобразования выражения, уравнения и неравенства, функции всегда будут составлять основное содержание школьного курса математики.

Раскрытие содержания этих понятий может успешно осуществляться, если будет проводиться целенаправленное изучение языка математики. Учащиеся должны хорошо понимать смысл употребляемых терминов и используемой символики, уметь читать предложения, составленные с помощью математических обозначений, записывать условие задачи на языке символов. Должна быть выработана система упражнений, в которой новые термины неоднократно применялись бы в различных ситуациях.

Целенаправленное изучение языка математики при раскрытии содержания основных понятий школьного курса алгебры требует привлечения теоретико-множественной терминологии.

Для усвоения понятия числа, а тем более для понимания задачи расширения понятия числа необходимы ясные представления об основных числовых множествах: натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел и т. д. Ученик должен видеть, что, например, число —5 принадлежит множеству целых чисел, множеству рациональных чисел, но не принадлежит множеству натуральных чисел; что действие вычитания всегда выполнимо на множестве целых чисел, но ограничено в выполнении на множестве натуральных или множестве неотрицательных рациональных чисел. Эти знания станут более отчетливыми, если будут использоваться такие понятия, как множество, элемент множества, отношение принадлежности.

Усвоение понятий выражения, тождественного равенства выражений, их тождественных преобразований связано с усвоением понятий множества значений переменной (или переменных), множества значений выражения, пересечения множеств. Немногие из учащихся смогут правильно решить уравнение $x^2-5x-6=|4x-6|$, если не будут понимать, что выражения $|4x-6|$ и $4x-6$ тождественны на множестве чисел, не меньших чем 1,5. Явное использование теоретико-множественного языка облегчает усвоение этих вопросов.

Формирование понятия уравнения или неравенства осуществляется значительно проще, если применять понятия высказывания, множества (множество решений уравнения или неравенства), принадлежности (данное число является корнем уравнения — принадлежит множеству его решений). Использование теоретико-множественных понятий позволяет легче осуществить и сам процесс решения уравнения или неравенства.

Например, решая неравенство

$$\log_3(x^2-8x+15)<1,$$

учащийся рассуждает так: „Переменная x в выражении

$$\log_3(x^2-8x+15)$$

может принимать значения из множества

$$X_1=(-\infty, 3)\cup(5, +\infty).$$

Неравенство

$$\log_3(x^2-8x+15)<1$$

равносильно на множестве X_1 алгебраическому неравенству

$$x^2-8x+15<3,$$

или неравенству

$$x^2-8x+12<0,$$

решения которого образуют множество $X_2=(2,6)$.

Следовательно, множество решений данного неравенства есть общая часть (пересечение) множеств X_1 и X_2:

$$X=(2,3)\cup(5,6).$$

Владея этой терминологией и символикой, учащиеся хорошо видят весь процесс решения неравенства, образно представляют множество решений неравенства.

Понятие функции, как известно, употребляется в двух смыслах: как отображение одного множества на другое (или как соответствие между двумя множествами, как правило соответствия) и как переменная. Первый смысл составляет содержание понятия функции, в то время как второй смысл употребляется для экономии речи („Функция принимает значение, равное 8"). Тем не менее в школьном курсе математики, как правило, термин „функция" употребляется во втором значении. Поэтому естественно, что ряд вопросов курса, в которых применяется понятие функции, плохо усваивается учащимися. Исправить положение невозможно без того, чтобы не использовать основные теоретико-множественные понятия, так как они составляют само существо понятия функции.

Таким образом, теоретико-множественный подход при изучении школьного курса математики создает исключительно благоприятные условия для постановки в школе целенаправленного изучения языка математики. Возникает вопрос о том, как рано следует начинать заниматься этим. Известно, что изучение языка эффективнее протекает в раннем возрасте; по-видимому, изучение математического языка также целесообразно осуществлять на более раннем этапе образования.

Использование теоретико-множественного подхода оказалось весьма эффективным при изучении математики в начальных классах. Это подтверждает экспериментальная работа сектора обучения математике НИИ содержания и методов обучения АПН СССР[1], которая проводится с 1964 г. в школах Москвы и Новосибирска.

Эксперимент ведется под руководством действительного члена АПН СССР проф. А. И. Маркушевича и посвящен разработке перспектив развития математического образования.

Организационно-экспериментальная работа составляла три этапа. Сначала разрабатывалась программа по математике для I — III классов. Затем был создан

[1] В проведении работы непосредственное участие принимали сотрудники сектора К. И. Нешков, А. М. Пышкало и автор настоящей статьи.

первый вариант учебных материалов, который после пробного эксперимента в одном-двух классах был существенно переработан. На третьем этапе эксперимент по переработанным учебным материалам проводился уже в 20—25 классах различных школ. Во всех классах обучение вели рядовые учителя начальных школ. Состав учащихся также был обычным.

Цель эксперимента состоит главным образом в том, чтобы проверить программу и учебные материалы. Задачи отработки приемов обучения, методики обучения или определения уровня навыков на этой стадии эксперимента специально не ставились.

Анализ традиционной постановки преподавания в начальной школе показывает, что содержание изучаемого материала недостаточно для осуществления хорошего математического и общего развития школьников. В принятой системе обучения математике в начальной школе чрезмерное внимание уделяется вычислительным навыкам в действиях с многозначными числами, что на современном уровне развития общества не представляет общеобразовательной ценности. Большой затраты времени и огромных усилий школьников требует тренировка в решении сложных и часто искусственных арифметических задач. Геометрические сведения в начальной школе чрезвычайно скудны (прямоугольник, треугольник, круг, прямоугольный параллелепипед). При этом главным объектом изучения являются не сами фигуры, не отношения между фигурами, а измерения величин (длин, площадей, объемов).

Таким образом, изучение математики в начальной школе ограничивается числами и фигурами, причем последние в курсе представлены недостаточно.

Кроме того, сам характер обучения в начальной школе, когда основное время уходит на отработку навыков в решении различных типов задач и разучивание многочисленных правил, не содействует общему и математическому развитию школьников.

При разработке учебных материалов была поставлена общая цель: найти пути, которые позволили бы существенно усовершенствовать преподавание математики в начальных классах, с тем чтобы уровень развития и знаний учащихся привести в соответствие современным требованиям. Было необходимо отобрать вопросы, которые представляют общеобразовательную значимость, смогут облегчить изучение курса математики и в то же время позволят в значительной мере использовать жизненный опыт школьников.

Средством к осуществлению этого явились основные теоретико-множественные понятия. Их использование в курсе математики начальной школы позволило доступнее, глубже и интереснее поставить изучение традиционных вопросов, проводить в курсе серьезную пропедевтику алгебры и геометрии, значительно повысить уровень логического развития учащихся. Теоретико-множественный подход дал возможность значительно упростить и сделать более четким математический язык.

Остановимся на трех основных проблемах экспериментального курса.

1. Одна из задач начального образования состоит в том, чтобы сформировать у учащихся понятие о числе, выработать навыки в действиях с натуральными числами, умения и навыки в решении простейших задач на сложение, вычитание, умножение и деление.

В сложившейся системе обучения в I классе учащиеся сразу приступают к счету и выполнению сложения и вычитания в пределах первого десятка.

В экспериментальных классах этому предшествует подготовительный этап — качественная фаза обучения, — когда учащиеся знакомятся с конкретными примерами множеств, выделением отдельных элементов этих множеств, операциями над множествами: объединением и пересечением. Разумеется, что это делается в доступной, занимательной для детей этого возраста форме. Приведем пример.

Учитель показывает ученикам три картинки. На первой картинке изображены заяц, еж и бобер — рыболовы. Они наловили рыбы. На другой — кот и лиса — охотники. У них ничего нет. На третьей картинке все вместе едят уху (в тексте: „Они объединились и дружно принялись за работу"). От ребят требуется показать каждого рыболова, каждого охотника, каждый элемент объединения этих множеств.

Понятию числа элементов множества предшествуют понятия „столько же“, „больше“, „меньше“. Их введение осуществляется на понятном для детей примере. На рисунке изображены ребята, у каждого из них — мяч. В тексте написано: „Каждый ребенок имеет только один мяч. Каждый мяч принадлежит только одному ребенку. Можно сказать, что мячей столько же, сколько ребят“. Аналогично вводятся понятия „больше“ и „меньше“. Решаются задачи:

1) Банки нужно поставить в ящик: в каждую ячейку одну банку (на рисунке ящик с восемью ячейками, рядом с ящиком стоят пять банок). Выяснить с помощью стрелок, чего меньше — банок или ячеек (учащиеся должны провести от каждой банки к ячейке стрелку).

2) Нам сказали, что чашек (на рисунке четыре чашки и пять блюдец) нарисовано столько же, сколько и блюдец. Проверить, раскрасив одну чашку и одно блюдце красным цветом, другую чашку и другое блюдце синим цветом и т. д.

3) В цирке на арене приготовили для дрессированных собачек тумбочки (дан рисунок). Для каждой ли собачки приготовлена тумбочка?

Подобные задачи формируют у учащихся понятие о числе как некоторой характеристике различных множеств, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие.

После этого переходят к счету предметов. Рассматриваются задачи:

1) Положите в один ряд столько палочек, сколько пальцев на правой руке. Положите в другой ряд (под каждой палочкой первого ряда) столько палочек, сколько дней в неделе. Чего больше, дней в неделе или пальцев на правой руке?

2) Положите в один ряд столько палочек, сколько элементов в множестве слов: синий, красный, зеленый, желтый, голубой, малиновый. Положите в другой ряд столько палочек, сколько элементов в множестве слов: одуванчик, колокольчик, тюльпан, роза, мак. В каком множестве больше слов?

3) Положите в один ряд столько палочек, сколько элементов в множестве слов: один, два, три, четыре, пять, шесть. Положите в другой ряд столько пало-

чек, сколько элементов в множестве слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять. В каком множестве больше слов?

Учащимся разъясняется, что множество слов: один, два, три и т. д., в котором элементы нужно называть в определенном порядке, является стандартным. С этим множеством (в котором перечисление элементов заканчивается в определенном месте) сравниваются самые различные множества.

Подход к сложению чисел осуществляется через объединение множеств. При этом рассматриваются задачи общего характера, когда пересечение двух множеств непустое. Например: „В V классе преподают 6 учителей, а в VI — 8. Сколько учителей работает в V и VI классах?“ Подобные задачи вполне жизненны, их решение вызывает большой интерес у учащихся: ведь, чтобы решить такую задачу, нужно рассмотреть все возможные случаи, и лишь в каждом из них ответ будет однозначным. Кроме того, такие задачи способствуют раскрытию содержания понятия „сложение чисел“, что очень важно для умения решать задачи.

Учитель начальной школы должен научить детей решать простые задачи. Вопрос о том, какие из задач решаются сложением, является проблемным в методике начальной школы. К сожалению, для его решения давались не совсем правильные рекомендации. Некоторые из них были основаны на чисто внешних критериях. К их числу относятся так называемые слова-признаки: если в вопросе задачи содержится слово „всего“ или „вместе“, то задача решается сложением; если же содержится слово „осталось“, то задача решается вычитанием. Можно придумать сколько угодно задач, в которых следует поступить наоборот. Вот примеры: „Вчера я начал читать с 8-й страницы, а сегодня дочитал до 19-й. Сколько всего страниц я прочитал за два дня?“, „До каникул осталось 7 дней да еще 4 дня. Сколько дней осталось до каникул?“

По существу, никакие слова-признаки не помогут ученику разобраться в задаче на сложение (или вычитание), если он не усвоит основного математического содержания: с помощью сложения находится число элементов объединения двух множеств с пустым пересечением. Разумеется, что к этому выводу учащиеся приходят не с помощью правил, а путем осмысливания специально поставленных задач.

Подход к умножению аналогичен. Рассматриваются задачи с конкретным содержанием, которые приводят к составлению множества пар — декартова произведения одного множества на другое (сам термин „декартово произведение" вводится лишь в III классе). Приводим пример: „В школьном буфете завтрак состоит из двух блюд. На первое можно выбрать сосиски, пельмени, котлеты или рыбу, а на второе — молоко, кофе или чай. Какие завтраки можно составить из этих блюд? Сколько можно составить различных завтраков?" При решении подобных задач учащимся приходится составлять самим пары и находить их число, которое, как они вскоре обнаруживают, не зависит от того, в каком порядке находится декартово произведение. Учащиеся сразу убеждаются в справедливости переместительного свойства умножения и бессмысленности отличать множимое от множителя. Учащимся разрешается находить произведение двух чисел в любом порядке: умножать „тетради на копейки" или „копейки на тетради".

Теоретико-множественный подход при обучении арифметике не отражается отрицательно на вычислительных навыках учащихся. Напротив, ознакомление уже в I классе с понятием выражения и внесение некоторой полноты в алгоритмы арифметических действий способствуют повышению их вычислительной культуры. По наблюдениям методистов начальной школы, вычислительные навыки учащихся в экспериментальных классах намного лучше, чем в обычных классах. Что же касается умения решать задачи, то здесь у учащихся экспериментальных классов дело обстоит еще лучше.

2. В экспериментальном курсе осуществлялась серьезная пропедевтика алгебры. Основное внимание уделялось формированию понятия переменной, формированию понятий, связанных с изучением уравнений, неравенств и тождественных преобразований.

Буква как переменная вводится уже в I классе. Однако термин „переменная“ в I и II классах не употребляется. Он вводится лишь в середине учебного года в III классе.

Система упражнений еще задолго до введения термина „переменная“ готовит учащихся к правильному восприятию этого понятия. Попутно учащимся раскрывается содержание и других важных понятий. Например, во II классе при формировании понятия неравенства учащимся разъясняют: „Если в неравенстве $x+5<9$ подставить вместо x число 2, то получается верное неравенство $2+5<9$. Число 2 называют решением неравенства $x+5<9$. Если в то же неравенство вместо x подставить число 6, то получается неверное неравенство $6+5<9$. Поэтому число 6 не является решением данного неравенства“.

Служит ли число 7 решением неравенства $x+1>4$? Какие из чисел множества $\{2, 6, 7, 10, 0, 5\}$ являются решениями неравенства $c-1>5$? Найдите какое-нибудь решение неравенства $y+7>15$. Составьте неравенство, решением которого было бы число 25. Найдите множество решений неравенства $x-5<8$.

Подобная система вопросов-задач, формируя понятие переменной, позволяет раскрыть учащимся содержание понятия неравенства. Такие упражнения выполняются всеми учащимися с большим интересом. Они вполне доступны второклассникам, так как требуют от них только элементарной сообразительности.

Вот пример рассуждения второклассника при решении неравенства $325-c>320$: „Если вместо c подставить число 1, то разность 325 и 1 будет больше 320; значит, 1 — решение этого неравенства. Если вместо c подставить 2, то тоже получается верное неравенство; значит, число 2 — тоже решение. Числа 3 и 4 годятся, еще годится 0. А вот 5 уже не будет решением неравенства, так как 325 — 5 равно 320, а не больше 320. Значит, множество решений этого неравенства состоит из чисел: 0, 1, 2, 3, 4“.

Разобравшись в содержании понятия неравенства с одной переменной, учащиеся будут лучше подготовлены к изучению последующего материала; им в дальнейшем не будут страшны квадратичные, логарифмические или тригонометрические неравенства, так как для решения таких неравенств им потребуется (кроме приобретенных знаний) лишь знание соответствующих алгоритмов.

При решении уравнений учащиеся не заучивают многочисленных правил нахождения неизвестного компонента каждого из арифметических действий. Учитель показывает им, как можно пользоваться моделью. Например, учащемуся надо решить уравнение $86 - x = 27$. Он на „маленьких" числах составляет модель равенства $5 - 2 = 3$. Число 2 заменяет буквой x, получает уравнение $5 - x = 3$. Здесь уже легко сообразить, что $x = 5 - 3$. Записывают это учащиеся так:

$$86 - x = 27. \qquad 5 - x = 3.$$

$$x = 86 - 27. \qquad \begin{array}{r} -\,86 \\ 27 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$x = 59.$$

Разумеется, что учителю не возбраняется поставить вопрос: как найти вычитаемое, если известно уменьшаемое и разность? Но учитель не должен требовать от учащихся заучивания стандартных формулировок.

В III классе учащиеся совершенно сознательно решают задачи: „Начертите прямоугольник. Обозначьте его стороны через x и y. Составьте выражения для вычисления площади и периметра прямоугольника". „Как из натурального ряда получена числовая последовательность: 5, 12, 19, 26, 33...?" В последней задаче многие учащиеся находят формулу общего члена. Решаются задачи на составление уравнений с одной и двумя переменными.

Учащиеся знакомятся с понятиями графика соответствия, графика уравнения. При этом рассматриваются примеры графиков, состоящих из конечного множества точек. Учащиеся легко строят график по данному уравнению, находят уравнение по данному графику. Доступность в выполнении подобных упражнений объясняется тем, что учащиеся могут перебрать все точки графика, перечислить все решения уравнения с двумя переменными (ведь с ними рассматриваются конечные множества). Тем самым проводится хорошая подготовка для дальнейшего изучения систематического курса.

Некоторые математики и методисты выражают опасение, что решение подобных „искусственных" задач с конечными и дискретными множествами может затруднить понимание „настоящих" задач с непрерывными множествами. В ответ приведем пример из практики.

После ряда упражнений на построение графиков, состоящих из конечного множества точек, учащимся была предложена задача: „На огонь был поставлен чайник с водой. Через каждую минуту записывались показания термометра — температура воды в чайнике.

Получилась таблица:

Время в *мин*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Температура в *град*	15	30	44	57	69	80	88	94	98	100	100	100

Построить график зависимости температуры воды от времени ее нагревания".

Ученик, вызванный к доске, построил все 12 точек, координаты которых указаны в таблице, а затем неожиданно для учителя соединил их плавной кривой. На вопрос учителя: „Почему эти точки ты соединил линией?" — ученик ответил: „Ну, а как же! Ведь после, допустим, минуты нагревания, но когда еще не прошло целой минуты, вода имела температуру? А то получается, что в промежутке между целыми минутами вода не имела никакой температуры".

В III классе проводилась пропедевтика тождественных преобразований выражений: запись законов арифметических действий в общем виде, замена суммы одинаковых слагаемых произведением слагаемого на число слагаемых и некоторые другие простейшие преобразования. На простейших примерах выяснялось содержание тождественного равенства двух выражений.

3. Большое внимание в курсе уделялось развитию геометрических представлений.

Уже с I класса учащимся даются изображения и названия геометрических фигур: круга, многоугольника, точки, линии, отрезка, ломаной линии, окружности, угла, прямоугольника, квадрата, треугольника. Узнавание фигур, их изображение с помощью циркуля, линейки, угольника составляют один из основных видов упражнений первоклассников. Кроме того, учащиеся занимаются измерением длины отрезка, ломаной линии, отыскиванием периметра (длины границы) многоугольника.

Во II классе учащиеся вычисляют площадь прямоугольника, более детально знакомятся с понятиями окружности и круга (как множества точек), понятиями хорды и диаметра окружности. Им показываются модели шара и многогранника. Даются названия элементов многогранника (вершина, ребро, грань). На различных моделях учащиеся показывают вершины, ребра и грани многогранников, считают число вершин, ребер и граней рассматриваемых фигур.

Большая систематическая работа ведется по изучению отношения принадлежности, отношения взаимного расположения фигур в пространстве.

В III классе вводятся понятия луча, прямой, плоскости, угла (как части плоскости). Решаются задачи на построение отрезка с помощью циркуля и линейки, на объединение и пересечение геометрических фигур. Рассматриваются классификации углов, треугольников. Изучаются отношения параллельности и перпендикулярности в множестве прямых плоскости. Здесь уже взгляд на фигуру как множество точек получает известную законченность.

Приведем примеры задач из курса III класса.

1) Точка M — середина отрезка AB, длина которого 5 *см*. Выполните чертеж. Отметьте множество точек отрезка, удаленных от M не более чем на 2 *см*. Принадлежит ли этому множеству точка M, точка B?

2) Длина отрезка CD равна 4 *см*; точка O — середина отрезка. Отметьте множество точек отрезка CD,

удаленных от его середины не менее чем на 15 *мм*. Принадлежит ли этому множеству точка C? точка O?

3) Начертите треугольник ABC, в котором $AB = AC = 5$ *см*. Отметьте множество точек треугольника, удаленных от вершины A: а) на 3 *см* (простым карандашом); б) менее чем на 3 *см* (красным карандашом); в) более чем на 3 *см* (зеленым карандашом).

4) Начертите квадрат $ABCD$ со стороной 5 *см*. Закрасьте желтым карандашом фигуру, все точки которой принадлежат квадрату и удалены от точки A не более чем на 5 *см*. Закрасьте синим карандашом часть квадрата, точки которой удалены от точки C не далее, чем точка B. Принадлежит ли каждая точка отрезков BD и AC пересечению желтой и синей частей квадрата?

5) Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением были: а) точка, б) отрезок, в) треугольник, г) четырехугольник.

6) Начертите два луча так, чтобы их пересечением были: а) точка, б) отрезок, в) луч, г) пустое множество.

Геометрические сведения вызывают большой интерес учащихся, способствуют формированию пространственных представлений, вырабатывают навыки в использовании чертежных инструментов.

Проделанная работа существенно облегчит изучение систематического курса геометрии.

При проведении эксперимента не ставилась задача определения уровня общего и математического развития учащихся. Тем не менее отдельные факты, основанные на наблюдении за учащимися, позволяют сделать некоторые выводы.

Было замечено, что значительно улучшилась речь учащихся. Она стала свободнее, образнее и более аргументированной. Появилось умение решать нешаблонные задачи (в том числе логические). Возросло критическое отношение к сообщаемым фактам. Появилась способность к абстрактному мышлению. По заявлению учителей, работающих в экспериментальных классах, с учащимися стало легче изучать русский язык и другие предметы.

Теоретико-множественный подход к изучению математики способствовал развитию логического мышления школьников. Изучение отношений, в процессе которого использовались графы, знакомство с понятием классификации способствуют развитию навыков дедуктивного мышления. О возможности проведения учащимися логических рассуждений можно судить по задаче, которую большинство учащихся III класса решают довольно свободно: „В нашем лесу каждый занимается своим делом и этому делу обучает других: одни плетут корзины, другие ловят рыбу. Ремеслу мы научились друг от друга. Кот учился у Выдры, Еж — у Зайца, Лиса — у Волка, а Мышь — у Ежа. Бобер учил Волка и Выдру, Заяц — Белку, а Барсук — Зайца. Бобер был учеником Медведя, а Еж — учителем Дятла. Лучше всех плел корзины Еж. Чем занимаются Заяц, Дятел, Волк и Лиса? Кто из зверей нашего леса раньше всех научился ловить рыбу и кто — плести корзины?“