МИХАЙЛОВСКАЯ А. Ю. (Москва)

ОПЫТ ВЕДЕНИЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ В ВОСЬМЫХ КЛАССАХ

В 1967/68 учебном году в восьмых классах школы № 710 Москвы читался факультативный курс, содержащий три темы, выбранные из программы, опубликованной в журнале „Математика в школе", № 2 за 1967 г.: „Элементы теории множеств", „Метод координат" и „Преобразование графиков функций".

Почему были выбраны эти темы?

Первая тема курса — „Элементы теории множеств" — дает богатый материал для интересных занятий: сочетание строгих определений с разнообразием примеров, взятых как из математики, так и из окружающей жизни, увлекает ребят, будит их фантазию, учит рассуждать.

Две другие темы факультативного курса даются на теоретико-множественной основе. Идеи теории множеств позволяют связать эти темы в один курс, сделать его слитным, единым. Теория множеств является связующим звеном между факультативным курсом и многими понятиями и темами программы.

Ниже приводится краткое содержание основных теоретических положений, изученных на факультативных занятиях, и ряд характерных примеров. Ввиду краткости изложения может показаться, что отдельные вопросы очень трудны и недоступны учащимся восьмых классов. Следует учесть, что каждое положение сопровождалось разбором большого числа примеров возрастающей трудности, каждому выводу предшествовал ряд вопросов, приводящих к этому выводу.

Тема 1. Элементы теории множеств

На первых занятиях вводится понятие множества, даются определения элемента множества, подмножества, универсального и пустого множества, рассматриваются операции пересечения, объединения множеств, дополнения множества до универсального.

Убедившись в том, что учащиеся усвоили этот материал, переходим к рассмотрению множеств из курса математики: множество треугольников (вспоминаем их классификацию!), множество четырехугольников (классификация, определения!), различные числовые множества.

Примерные вопросы:

1. В какие подмножества множества треугольников входит треугольник с углами в 30° и 60°? (Подмножества прямоугольных треугольников и разносторонних треугольников.)

2. Найти пересечение множества прямоугольных треугольников: а) с множеством равносторонних треугольников (пустое множество); б) с множеством равнобедренных треугольников (множество прямоугольных треугольников с углом в 45°).

3. Даны следующие множества четырехугольников: A — множество параллелограммов; B — множество ромбов; C — множество прямоугольников; D — множество квадратов.

Найти пересечение множества прямоугольников и множества ромбов ($B \cap C = D$ — множество квадратов); найти пересечение множества параллелограммов и множества ромбов ($A \cap B = B$ — множество ромбов); найти объединение множества прямоугольников и множества параллелограммов ($A \cup C = A$ — множество параллелограммов); найти объединение множества ромбов и множества прямоугольников ($B \cup C$ — множество ромбов и прямоугольников с неравными сторонами, или множество прямоугольников и ромбов, имеющих острый угол) и т. д.

Приняв множество A параллелограммов за универсальное, найти дополнение множеств B, C, $B \cup C$ до множества A ($\overline{B}$ — параллелограммы с неравными сторонами; $\overline{C}$ — параллелограммы с острыми углами; $\overline{B \cup C}$ — параллелограммы с неравными сторонами, имеющие острый угол).

Упражнение хорошо иллюстрируется с помощью кругов Эйлера (рис. 1).

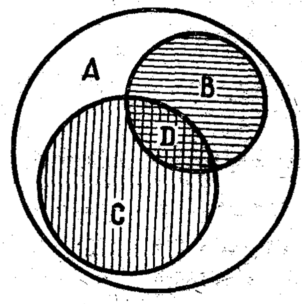

Рис. 1

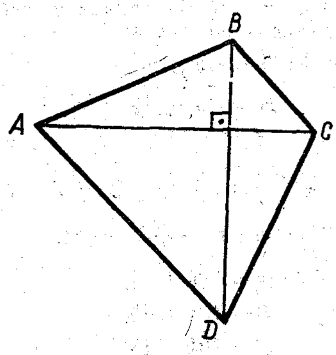

Рис. 2.

4. Множество четырехугольников, расположенных на плоскости, разбиты на подмножества по следующим признакам: A — множество четырехугольников, диагонали которых взаимно перпендикулярны; B — множество четырехугольников, диагонали которых равны; C — множество четырехугольников, диагонали которых в точке пересечения делятся пополам.

Найти множества $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cap B \cap C$ (множество ромбов; множество прямоугольников; множество квадратов).

Будет ли множество квадратов пересечением множеств A и B? (Нет! Смотри рисунок 2: $AC = BD$; $AC \perp BD$, но четырехугольник $ABCD$ не является квадратом.)

Подобные вопросы вносят четкость в определения, признаки, свойства различных геометрических фигур.

Затем переходим к рассмотрению различных числовых множеств. Особое внимание обращается на операции с подмножествами множества целых чисел, дающих равные остатки при делении на данное число.

меров возрастающей трудности, каждому выводу предшествовал ряд вопросов, приводящих к этому выводу.

Тема 1. Элементы теории множеств

На первых занятиях вводится понятие множества, даются определения элемента множества, подмножества, универсального и пустого множества, рассматриваются операции пересечения, объединения множеств, дополнения множества до универсального.

Убедившись в том, что учащиеся усвоили этот материал, переходим к рассмотрению множеств из курса математики: множество треугольников (вспоминаем их классификацию!), множество четырехугольников (классификация, определения!), различные числовые множества.

Примерные вопросы:

1. В какие подмножества множества треугольников входит треугольник с углами в 30° и 60°? (Подмножества прямоугольных треугольников и разносторонних треугольников.)

2. Найти пересечение множества прямоугольных треугольников: а) с множеством равносторонних треугольников (пустое множество); б) с множеством равнобедренных треугольников (множество прямоугольных треугольников с углом в 45°).

3. Даны следующие множества четырехугольников: A — множество параллелограммов; B — множество ромбов; C — множество прямоугольников; D — множество квадратов.

Найти пересечение множества прямоугольников и множества ромбов ($B \cap C = D$ — множество квадратов); найти пересечение множества параллелограммов и множества ромбов ($A \cap B = B$ — множество ромбов); найти объединение множества прямоугольников и множества параллелограммов ($A \cup C = A$ — множество параллелограммов); найти объединение множества ромбов и множества прямоугольников ($B \cup C$ — множество ромбов и прямоугольников с неравными сторонами, или множество прямоугольников и ромбов, имеющих острый угол) и т. д.

Нахождение пересечений, объединений данных множеств и дополнений до универсального в дальнейшем поможет при записи формул решений тригонометрических уравнений — при сопоставлении найденных значений с исключенными, при выделении повторяющихся в данных сериях углов.

Поясним это на нескольких примерах.

1) Найти объединение следующих множеств:

а) $A=\{3k\}$,

$B=\{3k\pm 1\}$,

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$;

Ответ. $A \cup B=\{k\}$.

б) $A=\{9k+7\}$,

$B=\{9k+4\}$,

$C=\{9k+1\}$,

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$;

Ответ. $A \cup B \cup C= =\{3k+1\}$.

2) Найти дополнение множества A до универсального множества I:

$I=\{2k+1\}$,
$A=\{4k+1\}$.

Ответ. $A'_I=\{4k+3\}$.

3) Разбить объединение множеств A и B, где $A=\{3k\}$ и $B=\{2k+1\}$, на два таких множества, пересечение которых пусто.

1) Записать в виде одного выражения:

а) $x=\pi k$,

$x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$,

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{3}k$.

б) $x=180°k+140°$,

$x=180°k+80°$,

$x=180°k+20°$,

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Ответ. $x=20°(3k+1)$.

2) Записать множество углов, удовлетворяющих условиям:

$$x=\frac{\pi}{4}(4k+3) \text{ и}$$

$$x=\frac{\pi}{4}(4k+1).$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

3) В результате решения тригонометрического уравнения получили: $x=\frac{\pi}{2}k$, или $x= =\frac{\pi}{6}(2k+1)$. Исключить повторяющиеся углы.

Числа вида $3k$ можно разбить на два множества:

$A = \{6k\} \cup \{6k+3\}$,
$C = A \cap B = \{6k+3\}$.

Пусть $I = \{3k\}$ и $C = \{6k+3\}$.

Тогда $C'_I = \{6k\}$.

Итак: $A \cup B = B \cup C'_I$.

Ответ. $B = \{2k+1\}$ и $C'_I = \{6k\}$.

$x = \frac{\pi}{6}(6k+3)$ — повторяющиеся в данных сериях углы.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$,

Необходимо особо остановиться на идее соответствия между элементами различных множеств (например, взаимно однозначного соответствия между действительными числами и точками числовой прямой; парами действительных чисел, записанных в определенном порядке, и точками координатной плоскости; точками окружности и множеством касательных к этой окружности и т. д.). Идея соответствия между элементами множеств будет использована впоследствии при определении понятия функции.

В заключение дается понятие мощности множеств. Показывается, что множество рациональных чисел счетно, а действительных чисел — несчетно.

Тема 2. Метод координат

Изучение темы начинается с рассмотрения координаты точки в одномерном пространстве — на числовой прямой. Находим множества точек, координаты которых связаны данным соотношением, пересечения и объединения этих множеств, т. е. решаем уравнения, неравенства и системы неравенств с одним неизвестным. Все решения иллюстрируются на числовой прямой.

Большое внимание уделяется понятию расстояния между точками числовой прямой (в дальнейшем это поможет учащимся усвоить одно из труднейших понятий — понятие предела числовой последовательности).

Пусть даны точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$; расстояние между точками есть модуль разности их координат:

$$\rho(A;\ B) = |x_1 - x_2|.$$

Это понятие позволяет дать наглядное решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Разберем более подробно решение ряда уравнений и неравенств. (Мы считаем целесообразным решать уравнения и неравенства параллельно.)

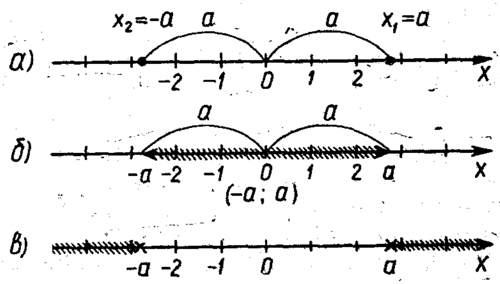

Рис. 3.

1. Решить уравнение $|x|=a$ и неравенства $|x|<a$, $|x|>a$; полученные решения изобразить на числовой оси.

Модуль действительного числа x есть расстояние точки числовой оси с координатой x от начала координат; $|x|$ есть число неотрицательное. Поэтому при $a<0$ уравнение решений не имеет; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ получим две точки, симметричные относительно начала координат: $x_1=a$ и $x_2=-a$ (рис. 3, *а*). Неравенство $|x|<a$ при $a\leqslant 0$ решений не имеет; при $a>0$ множество решений — интервал $(-a;\ a)$ (рис. 3, *б*). Второе неравенство при $a<0$ справедливо для любого действительного числа x, при $a=0$ — для любого $x\neq 0$, при $a>0$ множество решений есть объединение двух интервалов: $(-\infty;\ -a)\bigcup(a;\ +\infty)$. Заметьте, что пересечение этих множеств пусто! (рис. 3, *в*).

2. Найти множество точек числовой прямой, координаты которых удовлетворяют условиям: а) $|x-2|=3$; б) $|x-2|>3$; в) $|x-2|<3$.

Произвольную искомую точку обозначим $X(x)$. Тогда ее расстояние от точки A (2) будет: а) $\rho(X;\ A)=3$; б) $\rho(X;\ A)>3$; в) $\rho(X;\ A)<3$. Отложив от точки A вправо и влево по 3 единицы, получим искомое множество: а) $x_1=-1$; $x_2=5$; б ($x<-1$; $x>5$; в) $-1<x<5$ (рис. 4).

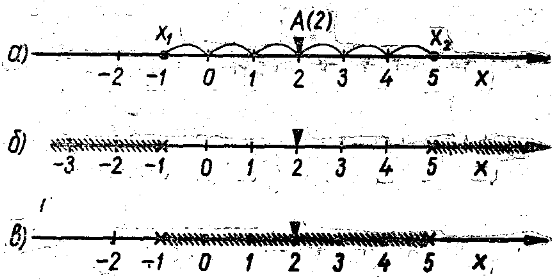

Рис. 4.

3. Решить неравенство $|2x+3|>5$.

Разделив обе части неравенства на 2, получим: $|x+1{,}5|>2{,}5$. Решение видно из рисунка 5: $x<-4$; $x>1$.

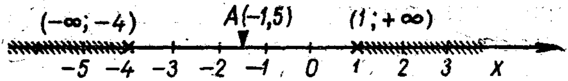

Рис. 5.

4. Решить уравнения:

а) $|x+3|+|x-1|=4$,

б) $|x+3|+|x-1|=8$,

в) $|x+3|+|x-1|=2$.

Левую часть уравнения можно рассматривать как сумму расстояний произвольной точки оси $X(x)$ до двух данных точек $A(-3)$ и $B(1)$ (рис. 6). Заметим, что если точка X лежит на отрезке AB или совпадает с одной из данных точек, то

$$\rho(A;\ X)+\rho(X;\ B)=\rho(A;\ B)=4.$$

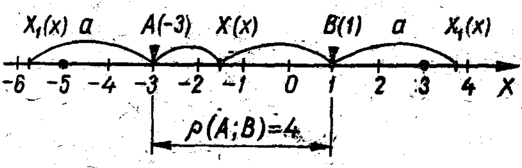

Рис. 6.

Если точка $X_1(x)$ лежит вне отрезка AB, то сумма ее расстояний до двух данных точек больше 4: $\rho(X_1; A) + \rho(X_1; B) > 4$ (рис. 7).

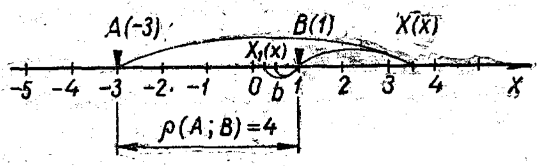

Рис. 7.

Поэтому уравнению а) удовлетворяют координаты любой точки сегмента $[-3; 1]$, т. е. $-3 \leqslant x \leqslant 1$; уравнение в) решений не имеет.

Для решения уравнения б) обозначим расстояние до ближайшей точки через a, т. е. $\rho(X_1; A) = a$ (или $\rho(X_1; B)$), тогда $\rho(X_1; B) = a + 4$, или $a + a + 4 = 8$, $a = 2$. Отложив от данных точек по 2 единицы (на продолжении отрезка AB), найдем корни уравнения:

$$x_1 = 3, \; x_2 = -5.$$

5. Решить неравенства:

а) $|x+3| + |x-1| < 4$,

б) $|x+3| + |x-1| > 4$,

в) $|x+3| + |x-1| < 8$,

г) $|x+3| + |x-1| > 8$.

Из решения задачи 4 видно, что неравенство а) решений не имеет; решение неравенства б) есть объединение двух интервалов $-\infty < x < -3$ и $1 < x < \infty$; для решения неравенств в) и г) заметим, что корни соответствующего уравнения $|x+3| + |x-1| = 8$ $x_1 = -5$, $x_2 = 3$ разбивают числовую ось на три интервала. Устанавливаем знак неравенства подстановкой координаты произвольной точки интервала в данное неравенство: если $x < -5$, например $x = -10$, то $|-10+3| + |-10-1| = 7 + 11 > 8$; если $-5 < x < 3$, например, $x = 0$, то $3 + 1 < 8$; если $x > 3$, например $x = 5$, то $8 + 4 > 8$. Следовательно, решение неравенства в) $-5 < x < 3$ и решение неравенства г) $x < -5$, $x > 3$.

6. Решить уравнения:

$$а)\ |x+3|-|x-1|=4,$$
$$б)\ |x+3|-|x-1|=3,$$
$$в)\ |x+3|-|x-1|=5.$$

Заметим, что если точка $X(x)$ лежит правее точки $B(1)$, то

$$\rho(A;\ X)-\rho(B;\ X)=4.$$

Так как разность расстояний — число положительное, то искомые точки расположены „ближе" к точке B, чем к точке A. Возьмем точку X_1 внутри отрезка AB и обозначим $\rho(B;\ X_1)=b$; тогда $\rho(A;\ X_1)=4-b$, $\rho(A;\ X_1)-\rho(B;\ X_1)=4-b-b=4-2b$.

Ответ. а) $x\geqslant 1$; б) $x=\frac{1}{2}$; в) нет корней.

7. Решить неравенства:

$$а)\ |x+3|-|x-1|>3,$$
$$б)\ |x+3|-|x-1|<3,$$
$$в)\ |x+3|-|x-1|>4,$$
$$г)\ |x+3|-|x-1|<4.$$

Ответ. а) $x>\frac{1}{2}$; б) $x<\frac{1}{2}$; в) решений нет; г) $x<1$.

8. Доказать неравенство $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

Возьмем точки $A(a)$ и $B(b)$ (пусть $a<b$). Тогда $|a+b|$ есть расстояние от точки $A(a)$ до точки $B_1(-b)$, симметричной точке $B(b)$ относительно начала координат. Надо доказать, что

$$\rho(A;\ B_1)\leqslant\rho(A;\ 0)+\rho(B;\ 0).$$

Рассмотрим все возможные случаи положения точек A и B относительно начала координат:

а) $a>0$; $b>0$: $|a+b|=|a|+|b|$ (рис. 8, *а*),
б) $a<0$; $b<0$: $|a+b|=|a|+|b|$ (рис. 8, *б*),
в) $a<0$; $b>0$: $|a+b|<|b|<|a|+|b|$ (рис. 8, *в*)
или $|a+b|<|a|<|a|+|b|$ (рис. 8, *г*).

Если $a>b$, точки A и B „поменяются местами".

К концу первого полугодия учащиеся восьмых классов знакомы с графиками ряда функций: $y=kx+b$;

$y = x^2$; $y = x^3$; $y = \frac{k}{x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$. Этот запас сведений, а также знание уравнения окружности с центром в точке с координатами a и b

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

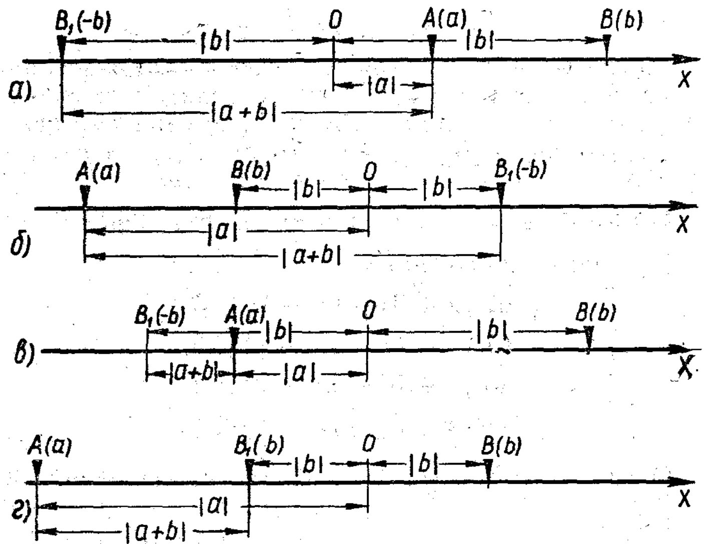

Рис. 8.

позволяют решать разнообразные системы уравнений и неравенств, привлекая и графические методы.

Приведем несколько примеров.

9. Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = 0. \end{cases}$

Ответ.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3\sqrt{2}}{2}; \\ y_1 = \frac{-3\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \\ y_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ (рис. 9).

10. Найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данным условиям:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ x-y=0. \end{cases}$$

Ответ. Множество точек отрезка прямой $y=x$, где

$$\begin{cases} \frac{-3\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y=x \quad \text{(рис. 9)}. \end{cases}$$

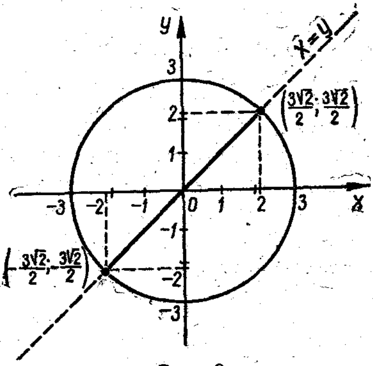

Рис. 9.

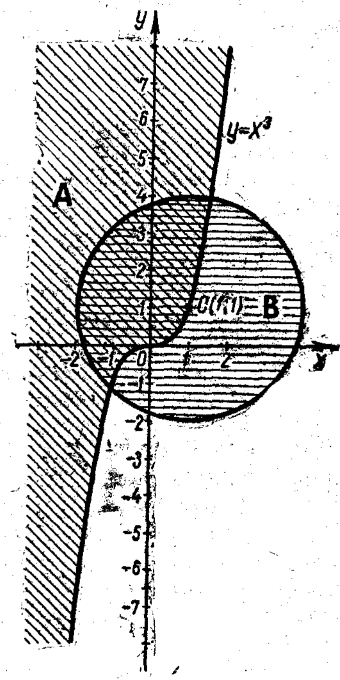

Рис. 10.

11. Найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y^2+x^2=9, \\ x-y>0. \end{cases}$$

Ответ. Часть окружности с центром в начале координат, радиуса 3 единицы, лежащая ниже прямой $y=x$ (рис. 9).

12. Множество A — множество точек (x, y) плоскости, для которых $y > x^3$, множество B — множество точек плоскости, для которых $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 9$. Указать множество $A \cap B$.

Ответ. Часть круга с центром в точке C (1; 1), радиуса 3 единицы, лежащая выше кривой $y=x^3$. Дуга окружности принадлежит искомому множеству, а дуга кривой не принадлежит (рис. 10).

13. Найти точки на плоскости по следующим условиям:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > x^2, \\ y = x + 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y < x^2, \\ y > x + 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^2, \\ y < x + 2. \end{cases}$

Рассматривается и решение различных геометрических задач. Например, зная координаты вершин треугольника, найти его площадь; зная концы отрезка, найти координаты точек, делящих данный отрезок в данном отношении (внешним и внутренним образом), и т. д.

Тема 3. Преобразование графиков функций

На факультативных занятиях понятие функции вводилось следующим образом. Пусть имеем две переменные x и y. Множество значений переменной x обозначим X; множество значений, которые принимает переменная y, обозначим Y. *Переменная y называется функцией от переменной x, если каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y* (рис. 11).

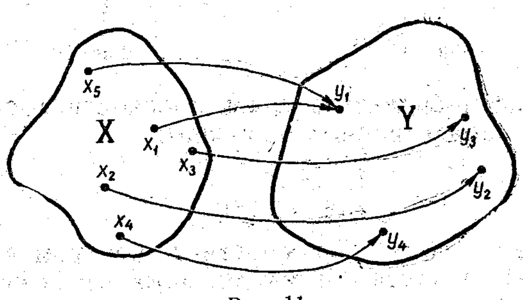

Рис. 11.

Множество X называется множеством допустимых значений аргумента или областью существования функции.

Множество Y называется множеством значений функции или областью изменения функции.

Функцию можно считать *заданной*, если указаны ее *область существования и закон соответствия*, относящий каждому элементу x области существования X единственный элемент y множества Y.

Закон соответствия между элементами множеств X и Y задается в общем виде формулой $y=f(x)$.

Для того чтобы идея соответствия была хорошо понята учащимися, полезно разобрать ряд примеров, в которых задается знакомая зависимость между двумя переменными. Множество значений одной из

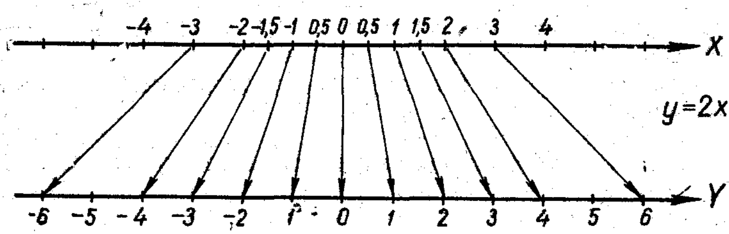

Рис. 12.

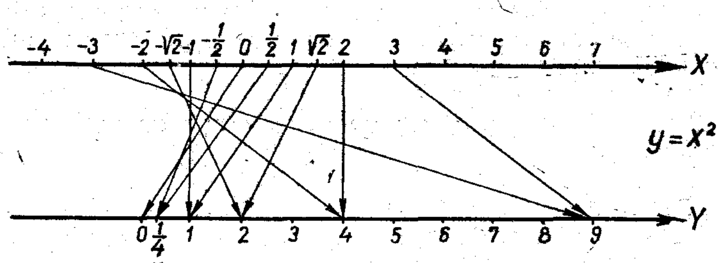

Рис. 13.

переменных изображается точками числовой оси; множество значений другой переменной изобразим точками другой числовой оси. На рисунке 12 показано, каким элементам множества X ставятся в соответствие элементы множества Y, если функция задана формулой $y=2x$. На рисунке 13 иллюстрируется соответствие между двумя множествами, заданное функцией $y=x^2$.

Очень важно подчеркнуть, что каждой точке области определения, т. е. каждому элементу множества X, соответствует единственная точка оси Oy, т. е. единственный элемент множества Y. При этом может оказаться, что разным элементам множества X соответствует один и тот же элемент множества Y (рис. 14).

При построении различных кривых на координатной плоскости замечаем, что если кривая является графиком функций, то перпендикуляры к оси Ox пересекают график в единственной точке. Если перпендикуляр к оси Ox пересекает кривую в двух и более точках, то эта кривая не выражает функциональной зависимости.

Преобразования графиков функций давались как преобразование одного точечного множества плоскости в другое.

Для обоснования преобразований использовались следующие предложения:

1. Графиком функции $y=f(x)$ в данной системе координат называется множество всех точек плоскости, координаты которых связаны заданным соотношением.

2. Теорема. Для того чтобы точка $A(x_0; y_0)$ принадлежала графику функции $y=f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли соотношению $y=f(x)$, т. е. $y_0=f(x_0)$[1].

Необходимость.

Дано: точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$.

Доказать: $y_0=f(x_0)$.

Справедливость этого соотношения вытекает из определения графика функции.

Достаточность (теорема противоположная).

Дано: точка $B(x_1; y_1)$ не принадлежит графику функции $y=f(x)$, причем x_1 — допустимое значение аргумента.

Доказать: $y_1 \neq f(x_1)$.

Так как x_1 принадлежит множеству допустимых значений аргумента функции $y=f(x)$, то на графике найдется точка $C(x_1; y_2)$, абсцисса которой x_1, а ордината $y_2 \neq y_1$, так как точка $B(x_1; y_1)$ не лежит на

[1] Очень полезно одно из занятий в VIII классе посвятить разбору таких очень важных логических понятий, как условие необходимое и достаточное, теорема прямая, обратная, противоположная.

графике $y=f(x)$. Тогда $y_2=f(x_1)$, а следовательно, $y_1 \neq f(x_1)$ (рис. 14).

Если доказательство в таком виде трудно, то можно просто объяснить учащимся, что если точка $A(x_0;\ y_0)$ лежит на графике $y=f(x)$, то $y_0=f(x_0)$ — верное числовое равенство.

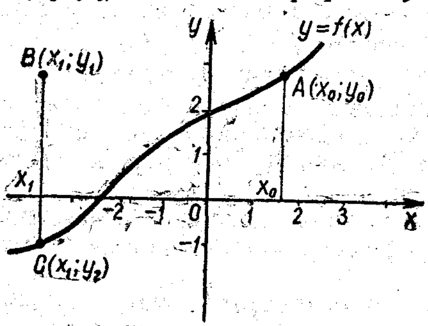

Рис. 14.

3. При преобразовании множества точек, заданных графиком $y=f(x)$, в график $y=F(x)$ достаточно показать, что координаты точки $A(x_1;\ y_1)$, в которую при данном преобразовании переходит точка $A_0(x_0;\ y_0)$ исходного графика, удовлетворяют соотношению $y=F(x)$, т. е. $y_1=F(x_1)$.

Все преобразования даются по одному плану.

Рассмотрим сдвиг вдоль оси ординат, преобразующий график функции $y=f(x)$ в график функции $y=$ $=f(x)+b$ (рис. 15).

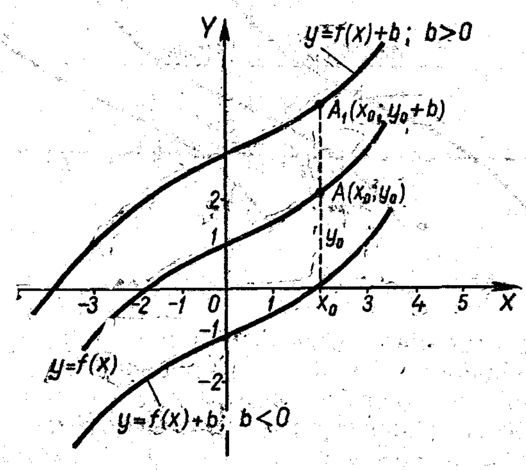

Рис. 15.

Пусть точка $A(x_0;\ y_0)$ — произвольная точка графика $y=f(x)$. Тогда, подставив ее координаты в уравнение $y=f(x)$, получим верное числовое равенство $y_0=f(x_0)$. Построим точку A_1 с координатами $(x_0;\ y_0+b)$ (рис. 16). Для того чтобы убедиться, что точка A_1 принадлежит искомому графику, подставим ее координаты в уравнение $y=f(x)+b$:

$$y_0+b=f(x_0)+b, \text{ откуда } y_0=f(x_0).$$

Получили верное числовое равенство, следовательно, координаты точки A_1 удовлетворяют данному соотношению, т. е. точка A_1 лежит на графике функции $y=f(x)+b$.

Очевидно, что, выполнив аналогичное построение для всех точек графика $y=f(x)$, получим график искомой функции.

Легко видеть, что в результате этого преобразования график функции $y=f(x)$ смещается вдоль оси ординат на $|b|$ единиц вверх, если $b>0$, и вниз — если $b<0$.

Аналогично рассматривается сдвиг вдоль оси абсцисс, т. е. построение графика функции $y=f(x+a)$ (рис. 16).

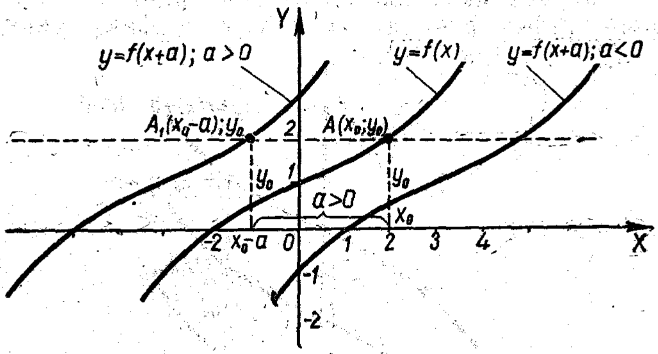

Рис. 16.

Построение графика $y=f(x+a)+b$ сводится к комбинации двух преобразований: сдвига вдоль оси абсцисс и сдвига вдоль оси ординат (рис. 17).

Затем рассматривается симметричное отражение графика от оси абсцисс $y=-f(x)$ (рис. 18) и оси ординат $y=f(-x)$ (рис. 19).

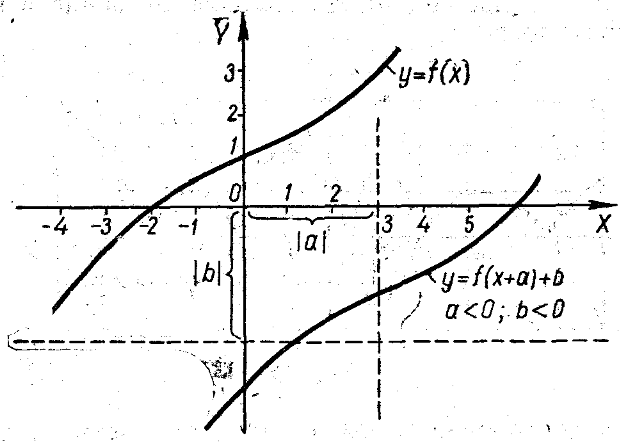

Рис. 17.

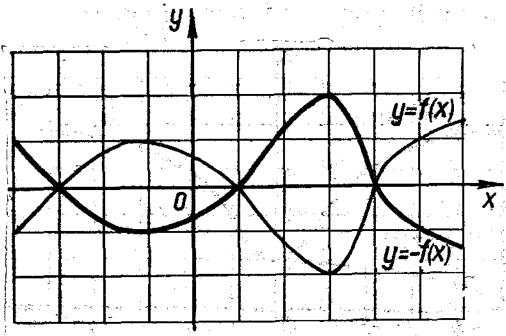

Рис. 18.

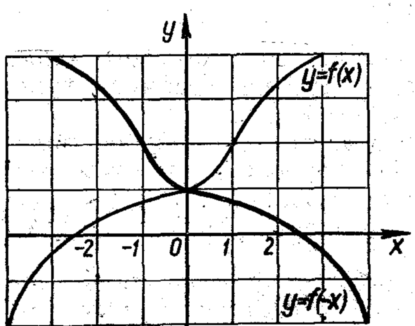

Рис. 19.

Здесь же можно рассмотреть построение графиков $y=|f(x)|$ (рис. 20) и $y=f(|x|)$ (рис. 21). Для построения графика функции $y=|f(x)|$ достаточно построить график функции $y=f(x)$, затем, оставив без изменения части графика, лежащие в верхней полуплоскости, отразить от оси абсцисс части графика, лежащие в нижней полуплоскости.

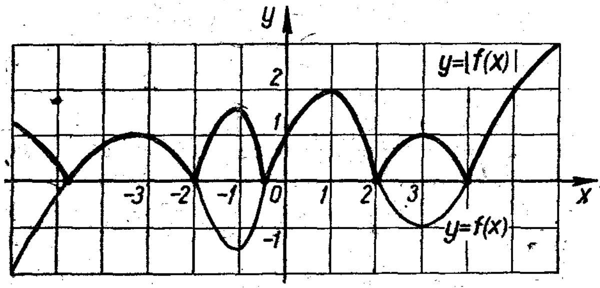

Рис. 20.

Для построения графика $y=f(|x|)$ достаточно построить график функции $y=f(x)$ для $x \geqslant 0$ и отразить полученный график от оси ординат.

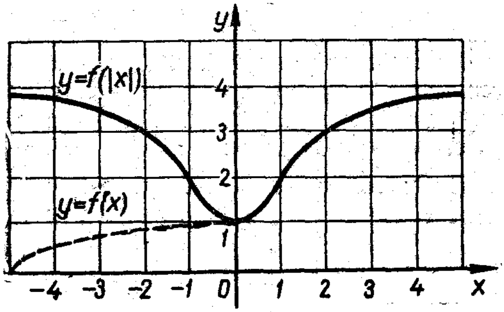

Рис. 21.

Можно дать и растяжение (или сжатие) вдоль координатных осей, т. е. построение графиков функций $y=kf(x)$; $y=f(px)$ и $y=kf(px)$.

Разобрав каждое преобразование в общем виде, применяем его к известным функциям. Строим различные графики, определяем области, в которых выполняются те или иные условия, решаем системы уравнений и неравенств.

Разнообразие форм кривых, получающихся при помощи преобразований из нескольких основных, изученных на уроках, резкое изменение формы или расположения кривых при изменении знака или величины хотя бы одного из параметров вызвали у учащихся большой интерес.

Все чертежи выполнялись цветными карандашами (а на доске цветным мелом), причем каждый этап построения выделялся своим цветом. Получались яркие, хорошо запоминающиеся рисунки.

Методика проведения факультативных занятий существенно отличается от методики урока: широко практикуются лекции-беседы учителя, доклады учащихся, самостоятельный разбор учащимися различных вопросов.

Обстановка на занятиях должна быть дружелюбной, нужно выставлять поощрительные оценки: как часто боязнь получить плохую оценку лишает ученика возможности соображать!

Желательно сопровождать изучение материала показом кино- и диафильмов. Так, при изучении последней темы можно показать ряд фрагментов (с I по VII) фильма „Преобразование графиков функций".

В 1967/68 учебном году в восьмых классах обучалось 112 человек. Заключительный зачет по курсу в конце года сдавали 76 человек. Годовые оценки за факультативный курс таковы:

оценку	„5"	получили	26 человек,
„	„4"	„	34 человека,
„	„3"	„	16 человек.