ЗИВ Б. Г. (Ленинград)

СВЯЗЬ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА УЧАЩИХСЯ К МАТЕМАТИКЕ

Изучение функциональной зависимости пронизывает весь курс школьной математики. Учащиеся строят графики функций, изучают их свойства, решают задачи с использованием этих свойств.

Однако необходимо с учащимися рассмотреть, как и где элементарные функции применяются на практике, в смежных науках. В этом случае ученики быстрее убедятся в том, какое важное место в жизни современного человека занимает математика, поймут и оценят красоту и силу математических методов.

В настоящей статье приведены только некоторые примеры приложения элементарных функций в физике, предлагаемые автором на уроках в школе. В IX классе были рассмотрены приложения квадратичной и других степенных функций. Однако решение задачи о движении тела, брошенного под углом α к горизонту, в общем виде давалось в X классе, так как только к этому времени учащиеся могли выполнять необходимые тригонометрические преобразования. Примеры практических приложений тригонометрических функций были разобраны в конце курса IX класса, причем тема „Колебания и волны" по физике изучалась одновременно с соответствующим материалом курса математики. Это обеспечивало лучшее усвоение темы и известную экономию времени.

Применение показательной и логарифмической функций в физике рассматривалось в X классе.

При рассмотрении каждой функции вместе с изучением ее свойств и построением графиков подробно освещался вопрос о ее практических приложениях. В большинстве случаев основные положения сообщались учителем, а потом полученные знания закреплялись при самостоятельном решении задач (как в классе, так и дома). В необходимых случаях ставился эксперимент, который наглядно иллюстрировал то или иное явление.

Учащиеся с большим интересом работали на уроках, где ставились вопросы связи математики с физикой, так как в новом свете видели все то, что изучали на уроках математики. Наибольший эффект достигался в тех случаях, когда учащиеся самостоятельно могли получить конкретный физический результат известными им математическими методами. Проверка знаний учащихся по этим разделам программы давала, как правило, хорошие результаты.

I. КВАДРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

1. В курсе физики подробно изучается равномерно-переменное движение и выводится зависимость пути от времени:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

На уроках математики целесообразно показать, что в этом случае речь идет о квадратной функции вида $y = ax^2 + bx$, и выяснить физический смысл параметров a и b.

Интерес представляет и построение графика функции (1).

Так, координаты вершины параболы (рис. 1):

$$t_0 = -\frac{v_0}{a}; \quad s_0 = -\frac{v_0^2}{2a}.$$

Корни функции:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -\frac{2v_0}{a} \ (a > 0, \ v_0 > 0).$$

После этого следует отметить, что по смыслу задачи область задания функции (1) $t \geqslant 0$, поэтому графиком этой функции может служить не вся парабола а только часть ее, соответствующая $t \geqslant 0$.

При решении этой задачи чрезвычайно удобно ещ раз подчеркнуть, что в математике изучается функ

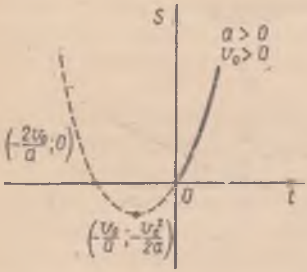

Рис. 1.

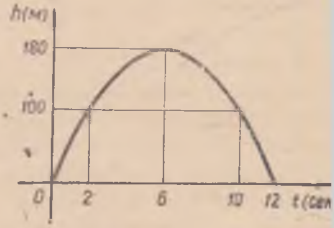

Рис. 2.

ция $y = ax^2 + bx + c$, в общем случае область ее опре деления есть $-\infty < x < \infty$, тогда как условие кон кретной задачи может изменить эту область.

На опыте решения ряда задач мы убедились і большой пользе параллельного применения аналити ческого и графического способов решения.

Так, задача: „Через сколько секунд тело, брошен ное вертикально вверх со скоростью 60 *м/сек*, дости гает высоты 100 *м*?“ ($g \approx 10$ *м/сек*^{2}) — приводит к такої зависимости: $h = 60t - 5t^2$ — и для заданного значения $h = 100$ *м* дает ответ: $t_1 = 2$ *сек* и $t_2 = 10$ *сек*.

График функции $h = -5t^2 + 60t$ иллюстрирует эти решения (рис. 2).

К тому же график показывает, что на высоте 180 *м* тело будет только один раз — через 6 *сек* после бро- сания; эта высота является наибольшей при заданной начальной скорости. По графику можно быстро опре- делить, через сколько секунд тело будет на любой высоте, меньшей 180 *м*. Таким образом, график хоро- шо отражает физическую сторону явления.

2. Важное место занимают задачи, где требуется написать уравнение траектории движения тела. Рас- смотрим две такие задачи.

З а д а ч а 1. *Тело, брошенное горизонтально с на- чальной скоростью* 25 *м/сек, упало на землю через*

3 сек. С какой высоты (h) брошено тело? Какова дальность полета? (рис. 3).

Движение в этом случае можно рассматривать как сумму двух движений: равномерно-прямолинейного

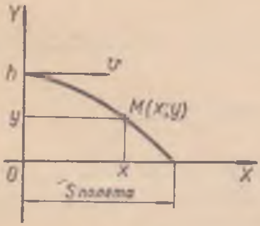

Рис. 3.

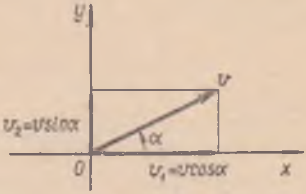

Рис. 4.

вдоль оси абсцисс и равномерно-переменного вдоль оси ординат. Пусть x и y — текущие координаты точки M:

$$x = vt,$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Из первого уравнения имеем:

$$t = \frac{x}{v}.$$

Тогда

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2 + h.$$

Это уравнение траектории движения можно записать в виде:

$$y = ax^2 + c.$$

Если подставить числовые данные, считая

$$g \approx 10 \ м/сек^2,$$

то

$$y \approx -\frac{1}{125}x^2 + h.$$

Дальность полета тела $s \approx 25 \cdot 3 = 75$ *м.*

С математической точки зрения дальность полета тела есть положительный корень квадратичной функции

$$y = -\frac{1}{125}x^2 + h.$$

Тогда при $x = 75$ $y = 0$. Отсюда можно определить h:

$$-\frac{75^2}{125} + h = 0, \; h = 45 \text{ м}.$$

Задача 2. *Тело брошено со скоростью v под углом α к горизонту. Составить уравнение траектории движения тела и построить ее* (рис. 4).

Движение под углом к горизонту можно рассматривать, как и в предыдущем примере, как сумму равномерно-прямолинейного движения вдоль оси абсцисс со скоростью $v_1 = v\cos\alpha$ и равномерно-переменного движения вдоль оси ординат с ускорением $-g$ и начальной скоростью $v_2 = v\sin\alpha$.

За время t тело в горизонтальном направлении пройдет путь

$$x = v_1 t$$

и в вертикальном направлении — путь

$$y = v_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Если вместо t подставить значение $\frac{x}{v_1}$, то мы получим уравнение траектории движения тела:

$$y = \frac{v_2}{v_1}x - \frac{g}{2v_1^2}\cdot x^2 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}\cdot x^2.$$

Итак, траекторией движения тела, брошенного под углом α к горизонту, является парабола вида:

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}\cdot x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad (y = ax^2 + bx).$$

Для построения графика этой функции учащиеся должны использовать известные им приемы построения параболы. Координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot 2v^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{v^2}{2g}\sin 2\alpha,$$

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot 2v^2 \cos^2 \alpha}{4g} = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Найдем корни функции $y = -\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$:

$$x\left(-\frac{gx}{2v^2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right) = 0,$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Для данной конкретной задачи областью определения функции является

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha \text{ (рис. 5).}$$

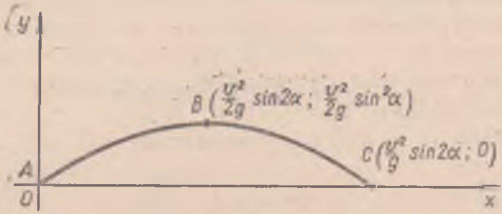

Рис. 5.

Рассмотрение функции и ее графика позволяет ответить на ряд практических вопросов. Прежде всего, расстояние

$$AC = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$$

указывает дальность полета тела, причем при $\alpha = 45^\circ$ дальность полета тела будет наибольшая (при $\alpha = 45^\circ$ $\sin 2\alpha = 1$).

Кроме этого, можно определить наибольшую высоту полета тела по отношению к горизонту; она определяется ординатой вершины параболы:

$$y_0 = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Интересно также показать, что при углах бросания α и $90^\circ - \alpha$ дальность полета тела будет одинаковой.

Приведенные примеры показывают, как математическими методами можно решать конкретные физические задачи.

II. ФУНКЦИИ $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$

В общем случае степенная функция может быть записана так:

$$y = Ax^{\alpha},$$

где A и α — некоторые параметры.

На практике встречается очень много явлений, которые могут быть описаны степенной функцией. В качестве примера приведем некоторые из них.

1. Закон Ома:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Если $U = \text{const}$, то

$$I = f(R).$$

Мы видим, что сила тока изменяется по закону $y = x^{-1}$, $x > 0$ (рис. 6).

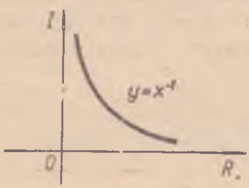

Рис. 6.

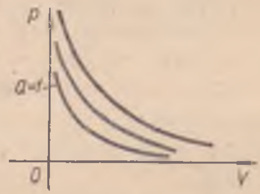

Рис. 7.

Если $R \to 0$, то $I \to \infty$, что приведет к короткому замыканию. Если же $R \to \infty$, то $I \to 0$.

2. Закон Бойля — Мариотта:

$$PV = \text{const}$$

при постоянной температуре T.

Мы опять имеем степенную функцию вида $y = ax^{-1}$ (рис. 7).

При изменении температуры T изменяется график функции, так как величина постоянной зависит от T.

3. Закон всемирного тяготения Ньютона

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Сила взаимодействия двух тел пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Этот закон справедлив в том случае, если размеры тела весьма малы по сравнению с расстоянием между ними.

В этом случае сила взаимодействия изменяется по закону степенной функции $y = ax^{-2}$, $x > 0$ (рис. 8).

Аналогично можно рассмотреть и закон Кулона, устанавливающий силу взаимодействия между двумя зарядами:

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

4. Испускание электронов накаленными телами.

Испускание электронов металлами под влиянием температуры называется *термоэлектронной эмиссией.* Если эти электроны ускорить внешним электрическим полем, то они образуют ток. Такой электронный ток может быть получен в вакууме.

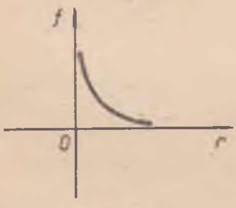

Рис. 8.

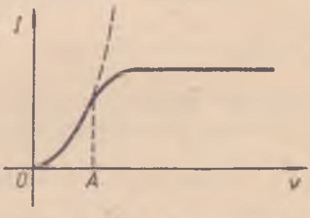

Рис. 9.

При постоянной температуре катода сила тока зависит от разности потенциалов V. Используя данные приборов, можно построить график зависимости I от V (рис. 9).

На участке OA сила тока с изменением V изменяется по закону

$$I = \alpha V^{\frac{3}{2}}.$$

В этом случае мы имеем дело со степенной функцией вида $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$.

III. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

В общем случае показательная функция может быть записана так:

$$y = Aa^{kx},$$

где a, A и k — параметры.

При помощи показательной функции описываются многие важные процессы в природе.

Рассмотрим некоторые из них.

1. Радиоактивный распад. Закон радиоактивного распада состоит в том, что масса распадающегося вещества уменьшается за равные промежутки времени в одинаковое число раз.

Пусть в начальный момент мы имеем M_0 *г* радиоактивного вещества и пусть за какую-нибудь единицу времени, скажем за один час, количество этого вещества уменьшается в k раз ($k > 1$). Тогда через час после начала наблюдения у нас останется $M_0 \cdot \frac{1}{k}$ *г* этого вещества, через два часа — $M_0 \cdot \frac{1}{k^2}$ *г*, через три часа — $M_0 \cdot \frac{1}{k^3}$ *г* и т. д.

Вообще через t часов (t — целое число) масса M оставшегося вещества будет равна:

$$M = M_0 \left(\frac{1}{k}\right)^t = M_0 a^t, \text{ где } 0 < a < 1.$$

Мы получили эту формулу, считая, что время t изменяется прерывно. Можно показать, что такой же результат получится и в том случае, если время изменяется непрерывно.

Таким образом, при радиоактивном распаде количество вещества изменяется со временем по закону показательной функции (рис. 10).

Постоянная a имеет определенное значение для каждого радиоактивного вещества и характеризует скорость распада этого вещества.

Однако в физике принято скорость распада характеризовать периодом полураспада T, т. е. тем временем, за которое количество вещества уменьшается в два раза (рис. 11).

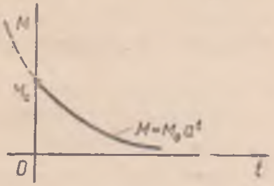

Рис. 10.

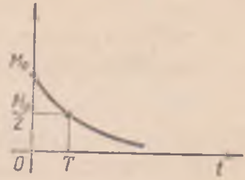

Рис. 11.

Зная уравнение распада, можно легко найти период полураспада T:

$$M = M_0 a^t;$$

при $t = T$

$$M = \frac{M_0}{2};$$

$$\frac{M_0}{2} = M_0 a^T; \quad a^T = \frac{1}{2};$$

$$T = -\frac{\lg 2}{\lg a} \quad (0 < a < 1).$$

Если строить график зависимости массы радиоактивного вещества от времени в экспериментальных условиях, то мы получим некоторую кривую. Как убедиться в том, что эта кривая есть график показательной функции? Для этого удобнее зависимость массы M от времени t изображать на *полулогарифмической сетке*:

$$M = M_0 a^t;$$

$$\lg M = \lg M_0 + t \lg a.$$

Мы получили линейную зависимость $\lg M$ от времени t. Таким образом, экспериментальные точки, нанесенные на полулогарифмической сетке, должны лечь на прямую линию (рис. 12).

При помощи этого графика легко определить период полураспада радиоактивного вещества.

Выше мы получили: $T = -\frac{\lg 2}{\lg a}$; $\lg a$ по графику определяется как тангенс угла наклона прямой к оси t.

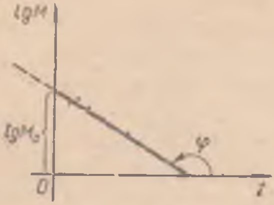

Рис. 12.

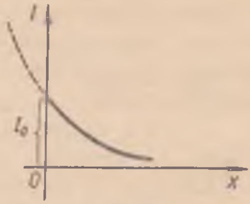

Рис. 13.

Если время t распада нам неизвестно, но известны начальная и конечная массы M и M_0 вещества, а также постоянная распада a, то величина t может быть найдена так:

$$M = M_0 a^t; \quad a^t = \frac{M}{M_0};$$

$$t = \log_a \frac{M}{M_0}.$$

Таким образом, время является логарифмической функцией отношения $\frac{M}{M_0}$. Отметим, что на этом уравнении основан метод датировки археологических находок, определения возраста минералов по количеству содержащихся в них радиоактивных веществ и т. п.

2. Поглощение света средой. Рассмотрим следующую задачу: „Световой луч, проходя через пластмассовую пластину, теряет $^1/_3$ своей интенсивности. Чему будет равна интенсивность светового луча, если он пройдет через n таких пластин?"

Пусть I_0 — интенсивность падающего света.

Тогда

$$I_1 = \frac{2}{3} I_0; \quad I_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 I_0; \quad I_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 I_0; \ \dots -$$

интенсивности света после прохождения одной, двух, трех и т. д. пластин.

После прохождения n пластин интенсивность света будет равна:

$$I_n = I_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Можно показать, что с изменением толщины пластины интенсивность света изменяется по закону:

$$I = I_0 \left(\frac{2}{3}\right)^x,$$

где x — толщина пластины. Мы видим, что закон поглощения света описывается показательной функцией вида $I = I_0 a^x$; $0 < a < 1$ (рис. 13).

Аналогично происходит поглощение света при прохождении его в глубины рек, морей и океанов.

Интересна следующая таблица.

x (*м*)	$\frac{I}{I_0} \cdot 100$ (%)
0	100 (на поверхности воды)
5	18
10	3,1
100	0,0000000000001

Мы видим быстрое падение интенсивности света при его проникновении в глубины морей и океанов.

Если заданы интенсивность падающего света и интенсивность его после прохождения пластины, то можно найти соответствующую этим данным толщину x пластины:

$$I = I_0 a^x; \quad a^x = \frac{I}{I_0};$$

$$x = \log_a \frac{I}{I_0},$$

т. е. толщина пластины является логарифмической функцией отношения $\frac{I}{I_0}$. Из приведенных примеров ясно, что логарифмическая функция повсюду сопутствует показательной функции.