

■

ОПЫТ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В I—II КЛАССАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕТИКО- МНОЖЕСТВЕННОГО ПОДХОДА

Начиная с 1965/66 учебного года группа учителей г. Новосибирска и Новосибирской области проводит эксперимент по программе, составленной проф. А. И. Маркушевичем. Обучение ведется по экспериментальным материалам¹ под руководством и при участии научных сотрудников сектора обучения математике Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР К. И. Нешкова, Ю. Н. Макарычева и А. М. Пышкало.

В данной статье описывается первый опыт работы по этой программе в I классе и в первом полугодии II класса.

В основу экспериментальной программы положено использование теоретико-множественных понятий.

Уже на первых уроках рассматриваются разнообразные примеры, связанные с опытом детей, поясняющие понятия „множество“, „элемент множества“. Дети узнают, что слова „семья“, „команда“, „букет“, „рой“, „коллекция“ и т. п. можно заменить словом „множество“. Например, вместо выражения „букет цветов“ можно сказать „множество цветов“.

¹ К. И. Нешков, А. М. Пышкало. Математика в начальных классах, ч. I. Под ред. проф. А. И. Маркушевича, „Просвещение“, 1968; Ю. Н. Макарычев, К. И. Нешков. Математика в начальных классах, ч. II. Под ред. проф. А. И. Маркушевича, „Педагогика“, 1970.

Каждый предмет, входящий в множество, называют элементом множества. Множество столярных инструментов состоит из таких элементов (учитель показывает): молотка, топора, пилы и стамески. Учащиеся рассматривают различные множества. Называют их элементы. Здесь широко используются сказки, знакомые детям. Приведем примеры.

1) За столом у Мухи-Цокотухи собрались насекомые (показывается рисунок из сказки). Назовите один элемент множества насекомых. Назовите каждый элемент этого множества.

2) На прием к доктору Айболиту пришли больные (показывается рисунок). Назовите и покажите один элемент множества больных. Назовите и покажите каждый элемент этого множества.



Рис. 1.

3) Изобразите элементы множества, которое состоит из следующих элементов: домика, елки, березки. Можно ли окно домика считать элементом этого множества?

Затем дети учатся, используя различные признаки предметов, выделять часть множества. Такими признаками могут быть: назначение предметов (например, назвать элементы, являющиеся предметами одежды); цвет предметов (назвать все зеленые предметы); расположение предметов. Рассмотрим подробно один пример. Я вывешиваю таблицу (рис. 1)¹, задаю детям вопросы: „Назовите каждый элемент множества, расположенный в верхней строке, в нижней строке, в средней строке. В левом столбце расположены следующие элементы: фуражка, туфли и флажок. Какие элементы расположены в правом столбце, в среднем столбце? Покажите часть множества, состоящую из животных. Назовите каждый элемент множества, состоящего из предметов зеленого цвета, и т. п.“.

Прежде чем перейти к изучению численности множества, мы знакомим детей с операциями объединения множеств, пересечения множеств и дополнения одного множества до другого, со свойствами этих операций. Все это выполняется на ярких и доступных младшим школьникам примерах. Я показываю картинки и рассказываю: „Заяц и еж наловили рыбы, развели костер и стали варить уху. Заяц и еж — рыболовы. В это время медведь и лиса возвращались с охоты. Медведь и лиса — охотники. Они увидели костер и пошли к нему. Еж пригласил гостей есть к огоньку поближе. Когда все звери уселись вокруг костра, медведь начал рассказывать про охоту. Он очень любил рассказывать, а еж и заяц любили слушать.“

Вот так объединились множества рыболовов и охотников. Получилось одно множество. Его называют объединением.

Объединение множества рыболовов и множества охотников состоит из медведя, лисицы, ежа и зайца*.

Учащиеся выполняют разнообразные упражнения. Так, например, по таблице (см. рис. 1) предлагаю учащимся показать множество предметов верхней строки (первое множество). Показать множество пред-

¹ Таблица цветная: зеленые — фуражка, елка; красные — флаг, шар; черная — собака; желтые — подсолнух, туфли; коричневые — домик, конь.

метов левого столбца (второе множество). Объединить эти множества. (Назвать каждый элемент объединения.)

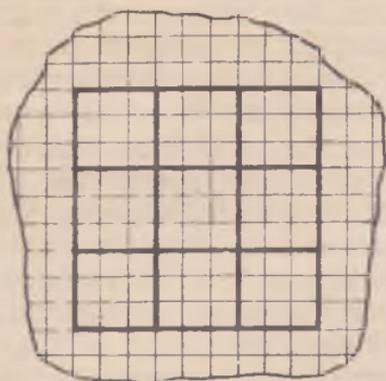


Рис. 2.

Эта работа связывается с разнообразной деятельностью детей. Например, по клеткам тетради дети вычерчивают (по линейке) таблицу (рис. 2). Я предлагаю им обвести красным карандашом каждую клетку нижней строки, затем каждую клетку среднего столбца и нарисовать круг в каждой из обведенных клеток. Или говорю детям: „Заштрихуйте клетки правой строки, клетки верхней строки. Обведите карандашом другого цвета все заштрихованные клетки“.

При объяснении операции пересечения множеств я также стараюсь привлечь как можно больше знакомых учащимся предметов, использовать имеющийся у них запас слов.

Показываю детям рисунок (рис. 3) и рассказываю: „Ребята построили город с двумя улицами. Одна —

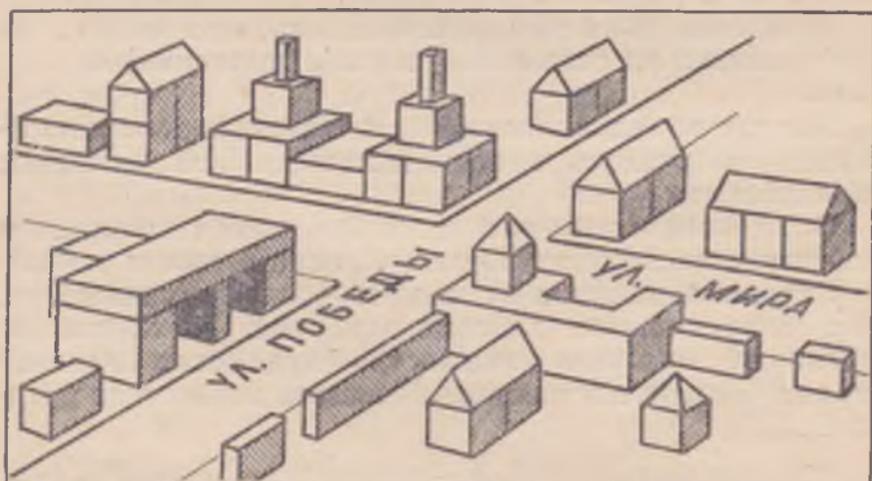


Рис. 3.

улица Мира, а другая — Победы. Красные дома (я их выделила цветом) расположены как на одной, так и на другой улице (остальные дома других цветов). Множество красных домов называют пересечением множеств домов этих улиц“.

Устанавливаем, что угловые дома являются общими элементами для обоих множеств. Затем рассматриваем несколько упражнений, в ходе решения которых дети рисуют: они, например, обводят карандашом множество клеток среднего столбца (см. рис. 2), затем множество клеток средней строки. Выясняется, имеются ли в этих множествах общие элементы (общие клетки). Детям предлагается общие клетки закрасить (или нарисовать в них какие-нибудь предметы).

Усвоение операции над множествами требует рассмотрения разнообразных примеров, связанных не только с наблюдениями или вычерчиванием (рисованием). Здесь важны и более абстрактные упражнения, например, такие:

1) Я провел у тети в гостях понедельник, вторник и среду, а моя сестра — вторник, среду и четверг той же недели. Когда мы были в гостях вместе с сестрой? В какие дни тетя принимала меня или сестру?

2) Летом Наташа побывала в Москве, Киеве и Ростове, а ее брат Коля — в Киеве, Москве и Ленинграде. В каких городах побывали ребята? В каких городах были и Коля и Наташа?

Операция *дополнения* одного множества до другого также легко усваивается первоклассниками.

Вначале рассматриваю пример, на котором вводится термин „дополнить“: „В магазине составлены наборы, в которые входят: яблоко, груша, конфета, пачка печенья и пастилы (все это я показываю). В коробку положили яблоко и грушу. Чтобы получился такой набор, это множество надо дополнить конфетой, пачкой печенья, пастилой“. Дети говорят, что в дополнение входят элементы: конфета, пачка печенья, пастилы. Затем рассматриваются разнообразные упражнения, где учащиеся находят дополнение, например:

„Дед с бабушкой тянули репку. Какими элементами (по сказке) надо дополнить это множество, чтобы вытянуть репку?“

Только после такой подготовки мы перешли к изучению чисел. Вначале установили с помощью взаимно однозначного соответствия, что значит „больше“, „меньше“, „столько же“. Для этого можно использовать закрашивание или соединение элементов множеств линиями (стрелками). Например, раскрашивая



Рис. 4.

чашки и блюда (если чашка синяя, то и соответствующее блюдо также синее), устанавливаем, что чашек больше, чем блюд, а блюдо меньше, чем чашек (рис. 4). „Соединяя“ удилица с крючком (вычерчивая леску), устанавливаем, что крючков столько же, сколько и удилиц, а поплавков больше, чем крюч-

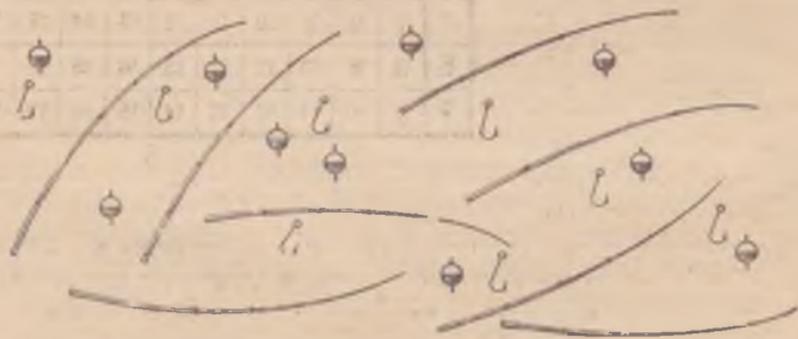


Рис. 5.

ков (удилищ) (рис. 5). Все это делается без пересчитывания элементов множеств.

После этого переходим к нахождению числа эле-

ментов множества, числа элементов объединения, пересечения и дополнения.

Дети установили, что объединение двух множеств, из которых одно содержит 3, а другое — 4 элемента, может иметь 7, 6, 5 или 4 элемента. При этом рассматривалось переместительное свойство объединения вначале двух, а затем и трех слагаемых.

Так, ребятам была предложена картина, на которой изображены три множества: вороны, сидящие на дереве; кролики, сидящие под деревом; домашние утки, плавающие в озере. Вначале нашли число элементов каждого множества. Затем стали отыскивать в различном порядке число элементов объединения этих множеств. Один ученик заявил: „А что их пересчитывать различными способами? Они все здесь: хоть 5 прибавь к 3, а затем к 4, получится 12; хоть сделай по-другому: $4+3+5=12$ или $5+4+3=12$ “.

Ученики обнаружили переместительное и сочетательное свойства суммы.

Сложение и вычитание чисел изучались сразу в пределах 20. Ознакомление детей с двузначными числами выполнялось на основе

их хороших представлений об измерении отрезков вначале в сантиметрах, затем в дециметрах и наконец в дециметрах и сантиметрах. От записи $1\text{ дм } 8\text{ см}$ переходили к записи 18 см и по аналогии от $1\text{ д. } 8\text{ ед.}$ (одного десятка восьми единиц) к 18 ед. При иллюстрации и проверке результатов сложения и вычитания наряду с набором палочек и другим счетным материалом мы широко использовали масштабную линейку. Учащиеся называли ее счетной машиной и с большой охотой пользовались ею при вычислениях, основой кото-

ТАБЛИЦА СЛОЖЕНИЯ

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Рис. 6.

рых является абсолютное знание (наизусть) таблицы сложения однозначных чисел. Таблица разучивалась с применением переместительного свойства сложения. При этом широко применялась таблица с двумя входами (рис. 6). Одновременно учащиеся выполняют с ее помощью и операцию вычитания.

При изучении таблицы (решении задач и примеров на сложение и вычитание) в пределах 20 дети усвоили термины „слагаемые“, „сумма“, „уменьшаемое“, „вычитаемое“, „разность“, научились находить неизвестное слагаемое, уменьшаемое, вычитаемое. Во втором полугодии выполнение сложения и вычитания в пределах 100 производилось и в столбик.

Очень много внимания уделяется формированию понятий „выражение“, „значение выражения“.

С составлением простейших выражений дети знакомятся рано. Вначале даются упражнения такого вида: „Составить выражение из чисел 23 и 11 и знака „—“ (или „+““).

Дети получают: $23 - 11$.

Они очень быстро усваивают, что если выполнить действие, то получится число (12), которое называют значением выражения.

В связи с составлением более сложных выражений вводятся скобки. Их роль выясняется в ходе решения большого числа упражнений. Значительное место в обучении занимает решение задач путем составления выражений по условию.

В заключение курса I класса дети знакомятся с умножением и делением в пределах 100. Наряду с традиционным подходом к введению операции умножения (произведение — сумма одинаковых слагаемых) общий смысл умножения выясняется на основе изучения декартова (прямого) произведения множеств (в I—II классах это делается без употребления теоретико-множественной терминологии и символики).

Рассматривается, например, множество чисел $\{1, 2, 3\}$ и множество букв $\{a, б, в, г\}$. Составляются всевозможные пары из одного числа и одной буквы. Такие пары, как 1а, 1б, 1в, применяют, например, для обозначения классов в школе. Сколько элементов в множестве таких пар? Чтобы не пропустить при состав-

лении и подсчете ни одной пары, можно ввести следующую запись:

	а	б	в	г
1	1а	1б	1в	1г
2	2а	2б	2в	2г
3	3а	3б	3в	3г

Теперь легко подсчитать число пар. В каждой строке — по 4 пары, таких строк — 3. Можно подсчитать иначе. В каждом столбце — по 3 пары, а таких столбцов — 4; $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Учащиеся получают очень важное представление, что при решении задач, в которых требуется узнать число пар, можно составлять таблицы. С помощью таблиц решаются задачи:

1) Пусть $\{3, 4\}$ и $\{1, 2, 5, 6, 9\}$ — два множества цифр. Составить всевозможные двузначные числа, первая цифра которых берется из первого множества, а вторая — из второго. Сколько получилось двузначных чисел? Подсчитайте двумя способами.

2) Пусть $\{а, о, у\}$ и $\{м, п, р\}$ — два множества букв. Составить множество слогов из двух букв. Первая буква берется из второго множества, а вторая — из первого. Сколько получилось слогов? Подсчитайте двумя способами.

Затем изучается операция умножения как результат сложения одинаковых слагаемых. Дети знакомятся с терминами „произведение“, „множители“. Вначале произведение отыскивается с помощью сложения. При этом применяется переместительное свойство. („Как легче найти произведение $3 \cdot 9$?“) Сразу же рассматриваются задачи, в которых по условию составляется произведение. Затем последовательно изучается таблица умножения.

В ходе усвоения таблицы умножения рассматриваются задачи на нахождение неизвестного множителя (по известным произведению и другому множителю).

Знакомство с множествами облегчило и изучение в I классе темы „Измерение площади прямоугольника и квадрата“.

До сих пор эта тема полностью изучалась в IV классе и представляла значительную трудность. Учащиеся I класса разобрались в ней, не испытывая затруднений. Этому способствовало хорошее знакомство детей с множествами, наличие навыков работы с таблицами: умение перечислить элементы, расположенные в верхней строке, средней строке, нижней строке, элементы, расположенные в левом столбце, среднем столбце, правом; умение подсчитать их число.

Объединяя множества, находя число элементов объединения, ученик уже проделывает по существу операцию измерения (вычисления) площади.

Когда в III четверти мы начали изучать умножение, то вычисление площади оказалось для учащихся делом совсем нетрудным, оно использовалось как иллюстрация для изучения таблицы умножения.

Однажды я задала вопрос ученикам: „Можно ли, не пересчитывая все клетки на доске (одна половина классной доски разлинована в клетку), узнать, сколько их всех?“ — „Да, — ответили ученики, — для этого надо сосчитать клеточки верхней строчки и клеточки одного столбца и полученные числа перемножить“.

Когда было введено понятие „квадратный сантиметр“, ребята спросили: „Квадратный метр тоже бывает? И дециметр? И километр?“ Послышалось ироническое: „Чудаки, неужели и квартиру измеряют квадратными сантиметрами?“ А потом, когда с помощью модели квадратного сантиметра измеряли площадь начерченного в тетради прямоугольника, заметили: „Вот работы было бы, такой малюткой пол измерить!“ Спустя несколько дней была решена задача: „Во дворе лежат пластинки линолеума размером в 1 кв. м. Можете ли вы принести их ровно столько, сколько надо, чтобы закрыть всю поверхность пола?“

Ребята дружно подняли руки и дали ответ: „Да, можем. Надо только измерить метром две стенки в классе: ту, что у доски, и ту, где находится дверь (длину и ширину они не знали), а затем перемножить их. Какое число получится, столько и надо пластинок“.

Изучив таблицу умножения, учащиеся познакомились с площадью прямоугольника и вычисляли ее, разбивая каждый прямоугольник на квадратные сан-

тиметры. При этом преследовались цели: научить измерять, делать разбивку фигур на единичные квадраты и выполнять вычисления. И эти цели были достигнуты: в конце года ученики I класса могли определять площадь различных фигур.

Вычисление площадей связывалось с изучением таблицы умножения. В I классе по программе не требовалась формулировка правила вычисления площади прямоугольника. Упражнений по подсчету квадратных сантиметров было проведено очень много, поэтому учащиеся хорошо усвоили этот раздел. Это не были одинаковые упражнения: черчение чередовалось с подсчетом, штрихованием, вклеиванием и т. п.

Характерно, что никто из 42 учеников не облегчал себе работу: каждый выполнял свой чертеж, каждому хотелось сделать работу на более сложном чертеже. Надо сказать, что геометрический материал для ребят совсем новый. С ним они впервые встретились в школе, может быть, поэтому к нему проявляется повышенный интерес: желание сделать все самому, проверить, например, что в многоугольнике столько же сторон, сколько и вершин, и обратно.

Учебный год учащиеся закончили хорошо: только 7 человек имели оценку „3“ по математике и другим предметам.

В течение лета ребята почти ничего не забыли из пройденного в I классе.

Вычисление площадей во II классе пошло по линии уточнения представлений. Сначала ребята познакомились со свойствами сторон прямоугольника. Это было сделано в ходе решения практических задач: проверили равенство прямых углов, изготовив для этого их модели, измерили и сравнили противоположные стороны класса, крышки стола. На одном из уроков труда учащимся было предложено начертить многоугольник, вырезать его. Найти периметр. С работой справились все.

Убедившись, что учащиеся твердо усвоили понятие периметра, я перешла с ними к вычислению площади фигуры.

Формулировка правила вычисления площади прямоугольника была введена на основе рассмотрения большого числа разнообразных упражнений:

1) Сколько клеток в раме окна? в фрамуге над дверью?

2) Сколько черных и белых клеток на шахматной доске? (Многие увлекаются шахматами.)

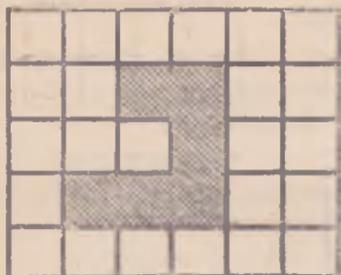


Рис. 7.

3) Сколько плиток надо для ремонта пола (рис. 7)?

4) Подсчитать число квадратов, на которые разбиты фигуры (рис. 8—11).

5) Начертить прямоугольник по заданным размерам.

6) Вычислить площадь фигуры, разбив ее на квадраты.

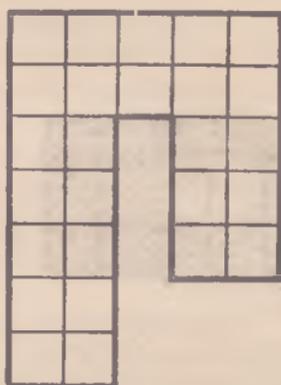
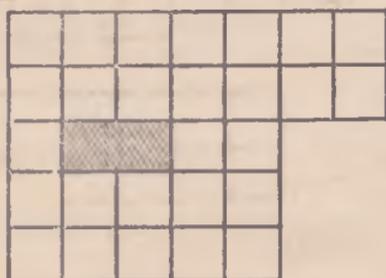


Рис. 8.

7) Составить таблицу вида:

Длина прямоуг.	Ширина прямоуг.	Площадь прямоуг.
7 см	1 см	7 кв. см
7 см	2 см	14 кв. см
7 см	3 см	21 кв. см
7 см	4 см	28 кв. см
7 см	6 см	42 кв. см
7 см	8 см	56 кв. см
7 см	10 см	70 кв. см
7 см	11 см	77 кв. см
7 см	12 см	84 кв. см

8) Вывести правило. („Площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины“).

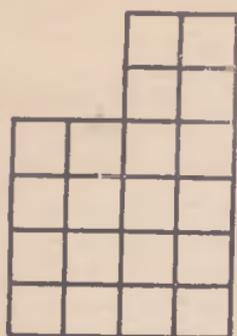


Рис. 9.

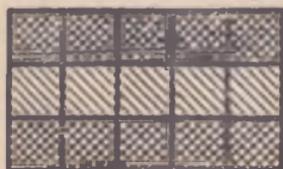
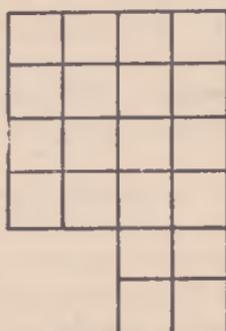


Рис. 10.

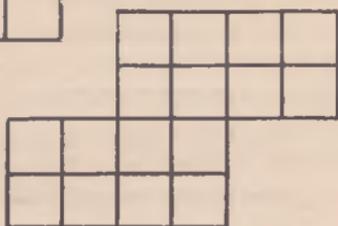


Рис. 11.

9) Вычислить площадь прямоугольника по данным длине и ширине (без чертежа).

10) Начертить и вырезать фигуры с прямыми углами. Вычислить их площади (рис. 12). (Эту практическую работу выполнили все учащиеся на „4“ и „5“. Вспоминаю, что раньше многие учащиеся IV классов слабо справлялись с такой работой.)

11) Найти одну из сторон прямоугольника по данной площади и другой стороне.

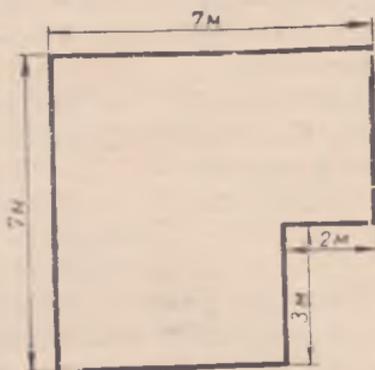


Рис. 12.

12) Найти площадь квадрата по его периметру.

13) Начертить прямоугольник заданной площади.

В первом полугодии все учащиеся II класса имели хорошие навыки вычисления площади прямоугольника. Работа с геометрическим материалом велась на каждом уроке, являлась неизменным элементом урока, выполнялась учащимися с удовольствием.

В программе II класса много времени отводится изучению множеств. Учащимся постепенно сообщаются новые понятия, вводятся символы, которые нужны для дальнейшего изучения математики. Эти понятия отрабатываются до полного усвоения всеми учащимися. Изучая тему „Обозначение множеств буквами“, учащиеся познакомились с буквами латинского алфавита.

Затем буквы стали применять и при обозначении точек, отрезков, многоугольников. С помощью буквы обозначаем неизвестное число в уравнении. Затруднений в работе это не вызвало, постепенно буквы вошли в обиход. Не заучивая правила, ученики научились находить любой компонент суммы, разности, произведения и частного. Начиная с I класса учились составлять выражения из чисел, букв, по условию задачи составлять уравнения.

Приведем примеры:

Задача 1. В зоопарке были крокодилы, медведи и обезьяны. Крокодилов было 17, медведей — в 3 раза больше, чем крокодилов, и в 2 раза меньше, чем обезьян. Что можно узнать, используя эти сведения? (Сколько было медведей? $17 \cdot 3$. Сколько было обезьян? $17 \cdot 3 \cdot 2$. Сколько было всего зверей? Крокодилов — 17, медведей — $17 \cdot 3$, обезьян — $17 \cdot 3 \cdot 2$. Получили выражение $17 + (17 \cdot 3) + (17 \cdot 3 \cdot 2)$. Затем нашли значение выражения.)

Задача 2. После того как из кассы выдали 2509 руб., в ней оставалось 802 руб. Сколько рублей было в кассе?

Решение. $x - 2509 = 802$.

$$x = 802 + 2509.$$

$$x = 3311.$$

Проверка.

$$3311 - 2509 = 802.$$

Решение задач с помощью уравнений и составления выражений нравится детям. Они предпочитают эти способы решению с составлением плана, хотя мы

практикуем и этот вид решения задач. Часто на уроке одна и та же задача решается по-разному.

„Швейная фабрика сшила 183 мужских пальто, женских — в 3 раза больше, чем мужских, а детских — на 251 пальто меньше, чем женских. Сколько всего пальто сшила швейная фабрика?“

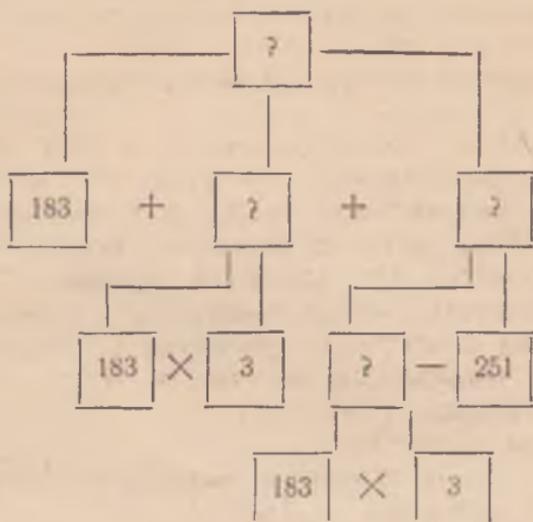
1. Краткая запись условия:

М. — 183.

Ж. — $183 \cdot 3$.

Д. — $183 \cdot 3 - 251$.

2. Схема — анализ.



3. Решение с вопросами.

1) Сколько сшили женских пальто?

$$\begin{array}{r} \times 183 \\ \quad 3 \\ \hline 549 \end{array}$$

2) Сколько сшили детских пальто?

$$\begin{array}{r} 549 \\ - 251 \\ \hline 298 \end{array}$$

3) Сколько всего пальто сшили на швейной фабрике?

$$\begin{array}{r} 183 \\ + 549 \\ 298 \\ \hline 1030 \end{array}$$

Ответ. На швейной фабрике сшили 1030 пальто
4. Составление выражения:

$$183 + (183 \cdot 3) + (183 \cdot 3 - 251) = 1030.$$

$$\begin{array}{r} \times 183 \\ \quad 3 \\ \hline 549 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 549 \\ - 251 \\ \hline 298 \end{array} \quad \begin{array}{r} 183 \\ + 549 \\ 298 \\ \hline 1030 \end{array}$$

Ответ. На швейной фабрике сшили 1030 пальто.

Устный опрос и проведенные контрольные работы показали, что пройденный материал ребята усвоили прочно.

Однажды после уроков мы читали книгу Н. Носова „Витя Малеев в школе и дома“. Встретились там задачи:

1) В магазине было 8 пил, а топоров — в 3 раза больше. Одной бригаде плотников продали половину топоров и 3 пилы за 84 рубля. Оставшиеся топоры и пилы продали другой бригаде плотников за 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила? (Задача по программе 40-х годов решалась в IV классе, сейчас решается в V классе.)

2) Мальчик и девочка рвали в лесу орехи. Они сорвали всего 120 штук. Девочка сорвала в 2 раза меньше мальчика. Сколько орехов было у мальчика и сколько у девочки? (III кл.)

Ребята-второклассники рассмеялись: „Витя, ученик IV класса, не может решить такие простые задачи“. Я приняла это за бахвальство и, прекратив чтение, предложила решить первую задачу. Ее решили правильно 7 человек. Легко была решена и вторая задача.

Учителя, часто посещающие уроки в наших экспериментальных классах, в своих отзывах отмечают не только хорошие вычислительные навыки детей, наличие у них большого запаса геометрических представлений, но и их хорошее общее развитие (дети более успешно занимаются и другими предметами школьного курса).