ХАБИБ Р. А. (г. Ташкент)

О РОЛИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Новая программа средней школы по математике предусматривает „педагогически правильное сочетание индуктивных и дедуктивных методов“ [1]. При изучении ряда теоретических вопросов программой рекомендуются „индуктивные, в частности, опытные методы установления фактов, в том числе использование непосредственного практического опыта учащихся“ [2].

Такая точка зрения составителей программы безусловно заслуживает одобрения. Ведь уже в восьмилетней школе ученики знакомятся с большим кругом вопросов, имеющих доступные и интересные для них практические приложения.

Результаты ежегодных проверок показывают, что слабые практические навыки (измерений, построений, вычислений) являются достаточно устойчивым недостатком в математической подготовке школьников. Это, в свою очередь, приводит к формализму в знаниях, к отрыву теории от практики, сужает возможности формирования интереса учащихся к изучению математики. Среди учителей, как показал анкетный опрос, нет единого мнения о роли практических работ в процессе обучения математике, хотя по этому вопросу имеется большая методическая литература.

---

[1] „Программы средней школы по математике“. Изд. „Просвещение“. М., 1967, стр. 5.

[2] Там же.

Всякое противопоставление логического и практического исчезнет, если сформировать у учащихся представление об эксперименте как о средстве естественнонаучного исследования, которое проводится по схеме: опыт и наблюдение, гипотеза, ее проверка (опять-таки при помощи эксперимента). Этому вопросу и посвящена настоящая статья. Ее цель — рассказать об опытной работе автора в школе, направленной на установление *органической связи изучения математической теории и практической деятельности учащихся.*

Математическим экспериментом (опытом) следует считать не только выполнение измерений и вычислений, но и всякое обращение к числам при проверке различных формул, обращение к чертежу при установлении (или подтверждении) геометрических свойств. Экспериментальный (опытный) метод устанавливает связь между теоретическими свойствами и их проявлением в частных случаях, которое обнаруживается экспериментом.

Очень тесно связано (по содержанию и по форме) с проведением экспериментов использование практических работ учащихся и получение разного рода приближенных результатов измерений и вычислений для осознания и иллюстрации теоретических положений.

Эксперимент — важный элемент обучения математике

Рассмотрим этот вопрос вначале в плане возможности, а затем в плане полезности и необходимости.

1. С основными положениями и фактами математики можно ознакомить посредством эксперимента.

Конечно, не всегда проведение „наводящего" эксперимента уместно, но имеется немало возможностей проведения таких учебных работ, которые позволили бы ученикам заметить определенную закономерность, а впоследствии и проверить ее на частных случаях. В курсе планиметрии такие возможности связаны с использованием подвижных моделей, реализующих определенную геометрическую зависимость.

Следовательно, можно построить учебный процесс таким образом, чтобы подчеркнуть значение эксперимента как средства научного исследования.

2. Теперь рассмотрим, будет ли это содействовать интересам изучения математики, науки, как известно, дедуктивной, в которой экспериментальные методы не всегда применимы (например, при изучении свойства несоизмеримости отрезков).

На этот вопрос также следует ответить положительно. Во-первых, экспериментальное обоснование и опытная проверка предполагают обращение к материалу, более понятному и знакомому, чем изучаемые вопросы. Поэтому изучение текущего материала тесно связывается с жизненным опытом школьников (в этот опыт уже вошли и предыдущие разделы курса), новые данные включаются в систему привычных представлений и усвоенных фактов — все это является, согласно положениям педагогической психологии, условием сознательного усвоения изучаемых вопросов. Во-вторых, при таком подходе ученики яснее понимают связи между математическими абстракциями и действительностью, между новыми вопросами и абстракциями меньшей силы, с которыми они уже знакомы. Проф. А. И. Маркушевич справедливо отмечает, что, „если в плоть и кровь учащихся проникает убеждение в том, что нет противоположности между суждением математики и тем, что подсказывает здравый смысл и опыт, тогда они чаще будут прибегать к самоконтролю, меньше будут рассчитывать на память и ошибок будут делать меньше“ [1].

3. Простота проведения экспериментов и многих практических работ, иногда вообще не требующих лабораторного оборудования, отсутствие сложных, может быть, даже недоступных (на данном этапе умственного развития школьников) логических построений, осуществление дидактического правила „от простого к сложному“ — все это позволяет при помощи экспериментальных средств ознакомить школьников с идеями, очень важными для изучения и понимания

---

[1] А. И. Маркушевич. Об очередных задачах преподавания математики в школе, „Математика в школе“, 1962, № 2, стр. 10.

математики. Эти идеи нередко важны и в методическом отношении, так как позволяют показать ученикам в самом начале изучения математики могущество математических методов, заинтересовать их богатством практических приложений этой науки. Приведу некоторые примеры:

а) На уроках арифметики ученики измеряют длины отрезков, а затем и длины ломаных (периметр треугольника). При этом можно объяснить, каким образом производится приближенное измерение длины отрезка кривой, для чего вместо искомой длины нужно взять длину ломаной, вписанной в данный отрезок кривой линии. Умение измерять длины любых отрезков (и прямолинейных и криволинейных) ученики теперь могут применить для измерения длин рек по карте, длин государственных границ и т. п.

б) Аналогично вводится понятие о приближенном измерении площадей различных фигур (данная фигура заменяется прямоугольником, имеющим приближенно такую же площадь). Знакомство с приближенными методами измерения площадей позволит в дальнейшем экспериментальным путем получить приближенную формулу площади круга. Методика изучения этих вопросов излагается в разделе „Пути усиления роли эксперимента при обучении математике“ (стр. 136).

в) Решение многих вычислительных задач по геометрии доступно уже в V—VI классах при помощи построения данной фигуры и измерения искомых величин. Еще не владея тригонометрией, ученики могут находить приближенные решения задач, которые в старших классах решаются точными методами.

г) При помощи построения графиков функций (по точкам) ученики могут решать задачи на максимум и минимум (среди них очень много задач с практическим содержанием), т. е. для них становятся доступными приближенные решения задач, которые даются в курсе высшей математики.

Не следует опасаться того, что, узнав приемы приближенного измерения длин и площадей, способы графического решения математических задач, школьники потеряют вкус к дальнейшим исследованиям. Напротив, приближенные способы решения ставят вопросы, которые может решить только теоретиское исследование: о точности полученного результата и общности полученного вывода. И наоборот, „оценить огромные преимущества теоретических способов решения по сравнению со способами, основанными на построениях и измерениях, можно только посредством сопоставления этих способов на практике"[1].

4. Рассмотрим еще один довод в пользу введения экспериментальных методов в курс школьной математики. Ошибочно считают, что нет разницы между двумя и двадцатью опытами. Мол, все равно эти опыты не заменят дедуктивного вывода данного свойства!

Действительно, эксперимент не заменяет дедуктивного вывода. Но не следует сбрасывать со счетов психологические компоненты процесса усвоения знаний. Когда ученики еще ничего не знают о существовании определенной закономерности, полезно до проведения доказательства навести их на эту закономерность. Совпадение выводов в 20—30 случаях (по числу учеников, так как каждый проводит свой эксперимент) трудно объяснить случайностью. Так у учеников появляется уверенность в существовании какого-то свойства, появляется потребность доказать его при помощи дедуктивных средств.

„Проверяя" определенное свойство на примерах, мы также не можем утверждать, что проверка на частных случаях дает полную гарантию в правильности дедуктивного вывода. И здесь подтверждение данного свойства на 20—30 частных случаях в результате массового опыта лишь увеличивает уверенность в объективной правильности этого свойства.

Уверенность в логической достоверности опыта возрастает после того, как учащимся раскрывается прием опровержения ложного заключения примером.

Это свойство эксперимента — его способность доказывать неправильность некоторого утверждения — особенно важно. Учащимся необходимо сказать, что этот метод применяется как научный метод исследования в математической науке.

---

[1] В. М. Брадис. Вычислительная работа в курсе математики средней школы, Изд. АПН РСФСР, 1962, стр. 225.

Важен этот метод и для активизации обучения математике, когда учитель стремится развивать творческую самостоятельность школьников. Мы знаем, что при этом приходится поощрять попытки обобщения, попытки использования аналогий, попытки судить об обратной зависимости по прямой связи и т. д. Ясно, что в некоторых случаях ученики получают неверные утверждения, которые проще всего опровергнуть при помощи опыта, т. е. путем рассмотрения определенного частного случая (контрпримера).

Например, известно, что в ромбе диагонали перпендикулярны. Ошибочное же утверждение „Если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то это ромб" опровергается соответствующим построением. Если же опыт не опроверг проверяемого правила, то возникает вопрос: случайно это или нет? Возникает возможность установить закономерность, справедливую для всех частных случаев. Быстрый отбор всех не заслуживающих исследования случаев с помощью соответствующего эксперимента экономит время исследователя и предупреждает грубые ошибки.

Неумение обращаться к практике, к опыту, как правило, обесценивает знания школьников. Анализ ученических ошибок показывает, что среди них много таких, которые свидетельствуют о формальном изучении математики. Например, ошибка $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}$ у учеников V класса объясняется неоправданной аналогией с действием умножения и тем, что учащиеся за выполненным преобразованием не видят реальных фактов. Исправление ошибок обращением к опыту, к простейшим случаям, где школьников выручит их учебный и жизненный опыт, — действенная мера.

5. Обращение к опыту позволяет вести оперативный учет состояния знаний школьников. В самом деле, любая опытная проверка установленного свойства дает быстродействующую характеристику знаний учеников: если ученик „опроверг" верное свойство, значит, он не понимает этого свойства (или не умеет пользоваться инструментами, графиками, таблицами). Ценно и то, что такой взаимный контроль ведется также и самими учениками, которые всегда склонны сверять результаты своей работы друг с другом.

Необходимость введения эксперимента в школьный курс математики очевидна. Школа нуждается в методической разработке таких вопросов, так как правильное применение экспериментальных методов формирует естественнонаучное мышление школьников, поощряет их активность и самостоятельность, воспитывает у них отчетливое логическое мышление, помогает бороться с формализмом в знаниях учащихся.

С этим необходимо считаться и авторам учебников и задачников. Например, целесообразно включать упражнения на опровержение неверных утверждений в задачники, полезно в некоторых случаях заменять категорические задания типа „доказать, что...“ заданиями „проверить, справедливо ли следующее утверждение“ и др., которые поощряли бы предварительное рассмотрение конкретных моделей, частных случаев.

Учитель должен бы ь заинтересован в том, чтобы процесс обучения совершался как бы по своим внутренним законам, а не был навязан ученикам волей педагога. Эта внутренняя логика процесса обучения, разумеется, направляется учителем, но направляется так, чтобы ученики осознавали связь теории с практикой.

Учебная деятельность школьников в раскрытии этой связи должна:

1) подготавливать изучение и закрепление последующих свойств и правил;

2) служить критерием ценности изучаемого материала (ценности как чисто учебной — применение на уроках математики и других предметов, так и объективной — истинность теории проверяется практикой);

3) создавать условия для систематического применения теоретических сведений.

Пути усиления роли эксперимента при обучении математике

1. В курсе математики восьмилетней школы серьезное внимание уделяется изучению функций, осуществлению функционального подхода. Всем своим содержанием этот материал тесно связан с жизнью,

с практикой. И тем не менее изучение его нередко проводится в отрыве от опыта, вне связи с экспериментом.

В школе изучают главным образом функции, заданные аналитическими выражениями. По ним строят графики, облегчающие решение ряда задач.

На практике чаще всего получают некоторые значения функции, по ним строят график и отыскивают аналитическое выражение неизвестной функции. Из практики родилась и в настоящее время успешно решается проблема математической обработки экспериментальных данных.

Внимание к изучению элементарных методов математической обработки экспериментальных данных поможет определению роли экспериментальных и приближенных методов при обучении математике по новым программам.

Попытка ознакомления учеников с этой стороной изучения графиков описана в статье Д. К. Дашковского („Математика в школе“, 1958, № 2). Автор рассказывает, что учителя 157-й школы Ленинграда при изучении графиков линейной зависимости использовали таблицы растворимости некоторых солей в зависимости от температуры. Эти таблицы, помещенные в учебниках химии, служили материалом для построения графиков и получения приближенной формулы зависимости.

Использование таблиц из учебника по химии — конкретный пример реализации межпредметных связей. Однако в указанной попытке использованы далеко не все возможности: как и обычно, ученики обрабатывают готовый табличный материал. Собственно, такие задачи даже имеются в стабильном задачнике по алгебре (П. А. Ларичев, Сборник задач по алгебре, ч. II, Учпедгиз, М., 1958). Например, задача № 1787 дает таблицу экспериментально полученных данных зависимости скорости звука в сухом воздухе от температуры и требует: 1) начертить график зависимости v от t, 2) заменить этот график приближенно прямой линией, 3) составить приближенную линейную формулу зависимости v от t, найдя угловой коэффициент и начальную ординату посредством измерений на чертеже.

Было бы полезно и для изучения химии и дл изучения математики, если бы результаты наблюдений полученные при выполнении практических работ н уроке химии, служили материалом для работы эти же учеников на уроке математики.

Аналогичное положение с физикой. При изучени физики школьники выполняют много наблюдений доступных для графической обработки, в том числ и в восьмилетней школе: зависимость тока от прилс женного к концам проводника напряжения, изменени температуры, давления, влажности в течение дня ил недели, расход электроэнергии или газа в квартире з определенный период времени и т. п. (Л. И. Резни ков, Графический метод в преподавании физики Учпедгиз, М., 1960, стр. 49—52). Как видим, част этих наблюдений может быть выполнена даже в пс рядке домашнего задания.

2. Второй важный путь усиления роли практиче ской деятельности учащихся в процессе обучени математике в восьмилетней школе — изучение при ближенных способов измерений длин, площадей объемов.

Объем материала по этому разделу большой. Его изучение было бы целесообразно перенести на факуль тативные занятия.

Однако ознакомление учащихся с приближенным приемами измерения длин и площадей должно про исходить и на обязательных уроках, так как, во-пер вых, учащиеся убедятся, что сообщаемые им бе строгого обоснования формулы являются отражение реально существующих закономерностей, и, во-вторых сопоставление приближенных и точных методов поз волит учащимся оценить общность, точность форму и экономию времени, которую они приносят.

Изучение приближенных методов вычисления длин площадей и объемов будет иметь определенное пропедевтическое значение для изучения элементо высшей математики. В самом деле, если научить уча щихся приближенно определять площадь любой фи гуры, то это облегчит нахождение площадей с по мощью интеграла. Практические навыки приближенного вычисления площадей могут пригодиться учащимся и при изучении физики, когда им придется решать задачи, связанные с нахождением площади фигуры, ограниченной частью кривой, осью абсцисс и ординатами крайних точек кривой: вывод формул кинематики (формул равномерного и равнопеременного движения), определение величины работы пара или газа (в осях „объем — давление")[1].

Наконец, рассмотрение приближенных методов измерения позволяет учащимся приложить к решению практических задач те геометрические сведения, которые изучаются ими на уроках геометрии. Большая часть описанного здесь материала была мной проверена в школьной практике.

а) **Измерение длины дуги кривой** проводится вслед за практическими работами на измерение длины ломаной линии, периметров треугольника и многоугольника.

Теоретическая сторона приема приближенного измерения длины отрезка кривой заключается в том, что вместо искомой кривой измеряется длина ломаной, вписанной в данную кривую линию.

Заменяя отрезок кривой отрезком прямой, получаем результат, меньший искомого (повторяем свойство отрезка). Далее, заменяя каждое звено ломаной двумя звеньями, мы увеличиваем первоначальный результат, но и второе полученное число будет меньше искомого (эти факты опять-таки объясняются при помощи свойства отрезка). Таким образом, свойство отрезка помогает учащимся осознать, что чем меньше звенья ломаной, вписываемой в данную кривую, тем меньше погрешность результата, полученного при измерении длины ломаной.

Измеряем приближенно длину отрезка кривой при помощи измерения длины произвольной ломаной, вписанной в кривую.

Ставится вопрос, как упростить процесс измерения, который в первоначальном виде требует большой затраты труда. Во-первых, можно вместо измерения длины каждого звена ломаной строить сумму этих отрезков и только после этого находить значение длины ломаной.

---

[1] Л. И. Резников. Графический метод в преподавании физики, Учпедгиз, М., 1960, стр. 57.

Во-вторых, упрощение можно получить, если звенья ломаной брать одинаковыми, например по 1 *см* или 0,5 *см*, ломаную с одинаковыми звеньями строить с помощью измерительного циркуля. Здесь же выясняется, что саму ломаную вообще строить не обязательно. Вычисление длины ломаной ведется „устно“: при помощи подсчета числа „шагов“ измерительного циркуля вдоль кривой.

После введения приема приближенного измерения длины отрезка кривой полезно проверить на практике утверждение о том, что точность результата измерения повышается, если брать раствор циркуля меньше, чем в первый раз. Чтобы поддержать интерес учащихся к приему приближенного измерения отрезка кривой, мы измеряли по географическим картам длины рек (результат работы оформлялся в виде диаграммы), длины границ между государствами, длины орбит планет и искусственных спутников Земли и т. д.

В учебных целях, чтобы оценить аккуратность выполнения работы в зависимости от точности результата, я использовал следующий прием: кусок нитки измерялся при помощи линейки, затем криволинейный отпечаток этого куска нитки, окрашенной чернилами, размножался при помощи копирки. Эти листки могут готовить и сами учащиеся, и у учителя будет достаточный набор раздаточного материала, который можно использовать для кратковременных измерительных работ на уроках геометрии.

Измерение длины кривой при помощи измерительного циркуля дает неплохую точность. В этом учащиеся еще раз убедятся при измерении длины окружности. Так, например, для четверти окружности измерение раствором циркуля в 1 *см* дает результат 77 *мм*, а измерение раствором циркуля в 0,5 *см* — результат 78,3 *мм*, тогда как вычисление по формуле — 78,5 *см* (рис. 1). Однако ручаться, что при описанном приеме получаем нижнюю границу искомого результата, нельзя — большое значение имеет и то, какую погрешность имеет раствор циркуля в 1 *см* или в 0,5 *см*.

После введения формулы длины окружности можно для измерения длины отрезка кривой использовать сопоставление длины этого отрезка с длиной окружности, т. е. подвести учащихся к идее самодельного курвиметра. Измерение упрощается, если взять для измерения круг с длиной окружности в 1 *дм*, а для больших расстояний — в 1 *м*. Проверка точности измерений каждым курвиметром дает учащимся возможность составить таблицы поправок (или определить знак погрешности и ее значение в процентах к измеряемой величине).

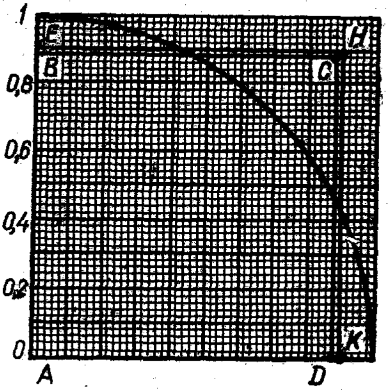


Рис. 1.

б) **Измерение площадей.** Учащиеся знакомятся с одним приближенным способом измерения площадей — при помощи палетки. Необходимо заметить, что этот прием не пользуется любовью учащихся из-за однообразия и утомительности подсчета числа клеток. На мой взгляд, этот способ можно в школьных условиях рационализировать: вписывать в данную фигуру прямоугольники (или треугольники), площади их вычислять при помощи непосредственного измерения сторон и подсчитывать лишь число клеток, не входящих в прямоугольники. Такой подход позволяет применить знания, которые имеются у учащихся, и облегчает подсчет клеток.

Второй способ приближенного измерения площадей — при помощи взвешивания. Этот способ усиленно рекомендуется для введения в школьную практику Л. И. Резниковым в упомянутой выше книге (стр. 57), однако в школе не получил признания. Между тем этот способ доступен даже ученикам V класса, и, применяя его, можно было бы пользоваться следующей методикой. Вырезают из плотной бумаги фигуру, площадь которой хотят определить, а также (из той же бумаги) единицы площади — квадратные дециметры, квадратные сантиметры, половины, четверти и т. д. этих единиц. Измерение площади происходит самым наглядным образом: фигура уравновешивается на весах каким-то числом квадратных единиц, и никаких дополнительных вычислений делать не надо.

Наконец, третий способ приближенного измерения площадей имеет самое непосредственное отношение к геометрии и должен быть поставлен, по моему мнению, на первый план, так как он доступен уже ученикам V класса и имеет более глубокие связи с геометрическим материалом, чем другие способы.

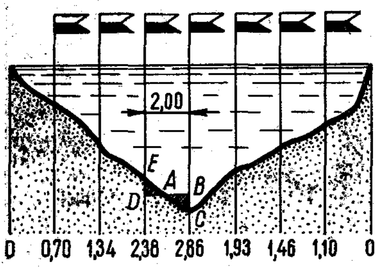


Рис. 2.

Он заключается в замене данной фигуры другой, площадь которой мы умеем вычислить, и в постепенном повышении точности приближения к искомому результату.

Предположим, надо измерить площадь сечения реки (рис. 2). Производят через равные по ширине расстояния, например через 2 *м*, измерения глубины. Далее, вместо того чтобы вычислять площади образовавшихся криволинейных трапеций, заменяем их прямоугольниками с высотами, представляющими среднее арифметическое соседних глубин, так как очевидно, что площади треугольников *ABC* и *ADE* примерно равны друг другу. Нелишне подумать, как лучше всего производить вычисление суммы площадей прямоугольников. Рационализация вычислений требует применения суммы навыков, которые должны прививаться в процессе изучения геометрии: проведения средних линий криволинейных трапеций (эти отрезки параллельны друг другу), построения суммы всех средних линий в виде одного отрезка, измерения длины этого суммарного отрезка и, наконец, вычисления общей площади прямоугольников. Этот прием смогут найти и сами учащиеся, если обратить их внимание на то, что основания всех прямоугольников равны.

Такой же прием применяем для измерения площади фигуры, изображенной на рисунке 3. Теперь очевидно, что средние линии целесообразно строить одновременно с основаниями криволинейных трапеций, проведя какую-нибудь базисную прямую. Возможно, некоторые учащиеся догадаются, что основания трапеций вообще можно не строить. Далее строим сумму средних линий криволинейных трапеций и вычисляем приближенное значение площади фигуры.

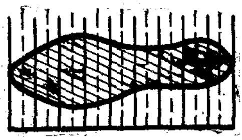


Рис. 3.

Применение миллиметровой бумаги значительно упрощает необходимые построения и расчеты. Миллиметровая бумага может быть использована при измерении площади круга, и ее применение даст хорошую точность ввиду мелкой миллиметровой сетки. На рисунке изображена четверть круга. Задаемся целью прийти к искомому результату, вычисляя площадь квадрата, приблизительно равновеликого данной фигуре. Степень приближения можно контролировать, подсчитывая число квадратных единиц несовпавших частей круга и квадрата. Из чертежа видно, что площадь квадрата $ABCD$ меньше площади четверти круга, а площадь квадрата $AEHK$ — больше (это определяется при помощи подсчета числа клеток), таким образом, сторона квадрата заключается между $0{,}88R$ и $0{,}9\ R$. Поэтому получаем для площади круга следующую оценку:

$$4 \cdot 0{,}88^2 R^2 < S_0 < 4 \cdot 0{,}9^2 R^2.$$

Это соответствует следующей оценке числа π:

$$3{,}09 < \pi < 3{,}24,$$

т. е. значение π определёно с 3 значащими цифрами. Последняя цифра ненадежная.

Многочисленные практические работы, связанные с приближенным измерением длин и площадей, могут быть использованы для более строгого обоснования формул длины окружности и площади круга. Например, сводя результаты зависимости длины окружности от радиуса в одну таблицу и строя график этой зависимости, получаем приближенную формулу этой зависимости. Аналогично может быть получена приближенная формула зависимости площади круга от радиуса.

в) **Объем пирамиды.** Учащимся даются задания изготовить модели пирамид из плотной бумаги: несколько пирамид — с основаниями в 26 $см^2$, несколько — с основаниями в 35 $см^2$, несколько — с основаниями в 48 $см^2$. Высоты моделей также задаются заранее, но возможен и другой вариант — каждый ученик измеряет насколько возможно точно высоту приготовленной им модели. Эти данные (значение высоты и площади основания) записываются. Объем приготовленной модели также измеряется (при помощи песка и мензурки), и его значение также записывается.

Каждая группа учащихся, приготовивших модели с равновеликими основаниями, оформляет полученные данные графически: на одной из осей прямоугольной системы координат откладываются значения высоты пирамиды, на другой — значения объема. Так как точек будет 4—5, то можно будет видеть, что они располагаются вдоль какой-то прямой (точнее, внутри полоски с параллельными краями). Ширина этой полоски дает учителю возможность контролировать степень точности данных, полученных опытным путем (чем она шире, тем хуже точность измерений учащихся данной группы).

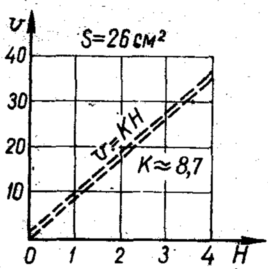


Рис. 4.

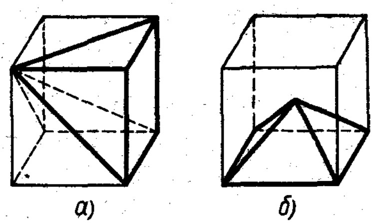


Рис. 5.

Так как указанная полоска должна проходить через начало координат (при $H=0$ объем равен нулю), то уравнение искомой зависимости надо искать в следующей формуле: $V=kH$, где k предстоит вычислить.

Каждый учащийся вычисляет[1] значение k для той точки, координаты которой получены им самим, и, сравнивая его со значениями k, полученными остальными членами группы, определяет „общее" значение k. Примерный график обработки для пирамид с основанием в 26 $см^2$ показан на рисунке 4.

Аналогичную работу производят учащиеся других групп. В итоге каждая группа получает свою формулу для нахождения объема на заданной площади, хотя все они устанавливают одну и ту же формулу зависимости объема от высоты: $V = kH$, но с различными значениями коэффициента k. Предположим, эти данные сведены в следующую таблицу:

S	26 $см^2$	35 $см^2$	48 $см^2$	55 $см^2$
k	8,7	11,7	16,0	18,3

Теперь по данным этой таблицы строим график зависимости $k = A \cdot S$ и убеждаемся, что это прямая линия, проходящая через начало координат (при $S = 0$ и объем пирамиды равен нулю, т. е. и $k = 0$).

Каждая группа вычисляет формулу этой зависимости $k = AS$, используя координаты „своей" точки. Очевидно, должно получиться значение A, близкое к $\frac{1}{3}$.

Вычисляя среднее значение A, получаем искомую приближенную формулу зависимости, например, такого вида:

$$V = k \cdot H = A \cdot S \cdot H = 0{,}35\, S \cdot H.$$

Остается сказать ученикам, что формула получилась приближенной, что в последующем будет выве-

[1] Предполагается, что учащиеся уже знакомы с задачей получения приближенной формулы зависимости, заданной при помощи графика прямой линии. Для прямых, проходящих через начало координат, эта задача сводится к решению уравнения первой степени. На прямой выбирается произвольная точка (желательно дальше от начала координат), и ее координаты подставляются в уравнение $y = kx$, что позволяет определить значение k.

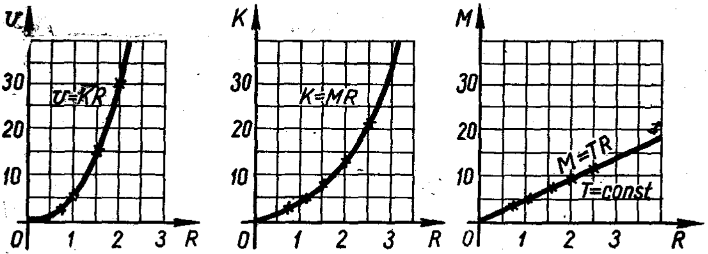
дена точная формула объема пирамиды, где значение A равно $\frac{1}{3}$.

Чтобы подвести учащихся к этой точной формуле, можно рассмотреть две пирамиды, объемы которых можно получить, вычисляя объем куба (рис. 5). И в том и в другом случае получаем формулу объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Теперь каждый ученик может проверить, согласуется ли эта формула с полученными им опытными данными, насколько велико отклонение теоретического объема от значения, полученного опытным путем.

Описанная работа дает возможность самым тесным образом связать практические задания с изучением теории. Что касается строгости обоснования формулы



R						
v						
K=v:R						
M=K:R						
T=M:R						

Рис. 6.

объема пирамиды, то здесь налицо все особенности, которыми обладают выводы, полученные экспериментальным путем.

г) **Объем шара.** Используя несколько металлических шариков различного объема, можно получить 5—6 значений для радиуса шара и его объема. Эти значения могут быть найдены по согласованию с другими учителями на уроках физики и труда: объем шаров может быть получен при помощи непосредственного измерения (путем использования мензурок с водой) или при помощи взвешивания и последующего вычисления объема по формуле $V = \frac{P}{d}$.

Строим систему координат (оси „радиус — объем“, рис. 6) и наносим соответствующие точки на чертеж. Соединяя эти точки плавной кривой, получаем график зависимости, приближенную формулу которой стремимся разыскать. (Ясно, что график должен проходить через начало координат, так как при $R = 0$ и $V = 0$.)

Выражаем искомую зависимость следующей формулой:

$$V = k \cdot R.$$

Поскольку полученный график не является прямой линией, ясно, что k не является постоянной, а также зависит от радиуса шара. (К этому же выводу приходим, подставляя координаты различных точек полученного графика в формулу зависимости $V = k \cdot R$.)

Ищем вторую зависимость k от R при помощи формулы $k = mR$, где значение m неизвестно. Используя вычисленные значения k и соответствующие им значения R, строим второй эмпирический график (система осей „радиус — величина k“). Полученный график опять покажет, что значения m также не являются одинаковыми для всех построенных точек. Это подтверждается вычислением значений m для каждой точки; вычисления ведутся несколькими группами учащихся — каждая группа последовательно вычисляет для одной определенной точки значения k, m и т. д.

Следовательно, и величина m также зависит от R. Пусть $m = t \cdot R$. Используя вычисленные значения m и соответствующие значения R, строим третий эмпирический график (система осей „радиус — величина m“)— он должен оказаться прямой, т. е. t можно найти обычным путем. Предположим, мы нашли, что $t = 4{,}2$; тогда

$$m = 4{,}2R;\ k = 4{,}2R^2;\ V = 4{,}2R^3.$$

Сравнивая значения 4,2 с $\frac{4}{3}\pi$, определяем точность полученной формулы. Проверяя опять точную формулу объема шара на тех опытных данных, которые ими получены, учащиеся могут выявить группу, которая добилась наилучших результатов в измерении радиуса и объема шара. Примерный ход построения графиков изображен на рисунке 6.