ЯСИНОВЫЙ Э. А. (г. Куйбышев)

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В VII—VIII КЛАССАХ

Ниже рассматривается система упражнений по теории делимости в VII—VIII классах. Эти упражнения имеют большое значение для общего развития школьников. Число упражнений, представленных в статье, превышает необходимый минимум. Поэтому некоторые из них могут быть опущены или предложены тем, кто проявляет особый интерес к рассматриваемым вопросам.

Занятия по теории делимости в VII классе начинались с повторения формул сокращенного умножения и деления, закрепления навыков тождественных преобразований.

Следует отметить, что торопиться с доказательством свойств делимости чисел не стоит. Вначале достаточно опираться на элементарные знания учащихся по этому разделу. Обычно все ученики знают, что:

1) если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число;

2) если из двух слагаемых одно делится на некоторое число, а другое не делится на него, то и сумма не делится на это число.

Свойства делимости целых чисел излагаются после шести-семи занятий. Вначале дается определение:

*Целое число $a$ называется делящимся на целое число $b \neq 0$ в том, и только в том случае, когда* *существует третье целое число $c$, такое, что $a = b \cdot c$.*

Делимость $a$ на $b$ записывают так: $a \vdots b$.

Затем рассматриваются свойства делимости.

1. Свойство *рефлексивности*: число кратно самому себе, т. е. $a \vdots a$. Это вытекает из того, что $a = a \cdot 1$.

2. Свойство *транзитивности*: если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Доказательство. Имеем: $a = bq_1$; $b = cq_2$. Подстановка дает:

$$a = (cq_2) q_1 = c (q_1 q_2).$$

Отсюда следует, что $a \vdots c$, что и требовалось доказать.

3. Если $a \vdots b$, то $(-a) \vdots b$, $a \vdots (-b)$, $(-a) \vdots (-b)$.

Доказательство. Из условия имеем: $a = bq$. Можно записать $-a = b(-q)$, или $a = (-b)(-q)$, или $-a = (-b) q$.

Отсюда, по определению, имеем: $(-a) \vdots b$, $a \vdots (-b)$ и $(-a) \vdots (-b)$, что и требовалось доказать.

4. Если $a_1 \vdots b$ и $a_2 \vdots b$, то $(a_1 \pm a_2) \vdots b$.

Доказательство. Имеем: $a_1 = bq_1$, $a_2 = bq_2$. Сложив или вычтя почленно, получим: $a_1 \pm a_2 = bq_1 \pm \pm bq_2 = b (q_1 \pm q_2)$.

Отсюда, согласно определению, имеем: $(a_1 \pm a_2) \vdots b$, что и требовалось доказать.

5. Если одно из чисел $a_1$ и $a_2$ делится, а другое не делится на $b$, то и сумма $a_1 + a_2$ и разность $a_1 - a_2$ не делится на $b$.

6. Если хотя бы один из множителей делится на число $b$, то и произведение делится на $b$.

7. Число нуль делится на любое число $b \neq 0$.

8. (Теорема о делении с остатком.) Для любых двух целых неотрицательных чисел $a$ и $b$ ($b \neq 0$) существует единственная пара целых чисел $q$ и $r$ таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$. Число $a$ называют делимым, $b$ — делителем, $r$ — остатком.

Свойство 5 доказывается методом от противного исходя из равенства $(a_1 + a_2) - a_2 = a_1$, или $(a_1 + a_2) - - a_1 = a_2$ (смотря по тому, какое из чисел $a_1$ и $a_2$ не кратно $b$). Свойства 6 и 7 доказываются аналогично свойствам 1, 2.

Теорема о делении с остатком иллюстрировалась на многих примерах, но доказательства ее не давалось.

После теоремы о делении с остатком решались задачи на нахождение наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел с помощью алгоритма Евклида. Затем вводились понятия: наименьшее общее кратное, простые числа, взаимно простые числа, каноническое разложение числа (без теоремы о единственности разложения), позиционная форма записи числа. Все эти понятия закреплялись при решении большого числа задач.

Выводились признаки делимости на 3, 9, 4, 25, 11. Решались уравнения в целых числах.

Мы нашли возможным решать неопределенные уравнения вида $xy+ax+by=c$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{m}$, $a^2x^2-b^2y^2=c$ — до решения уравнений вида $ax+by=c$.

До решения первых двух видов уравнений учащиеся решали примеры на исключение целой части из алгебраической дроби вида $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$, где $a \vdots a_1$.

В VIII классе давались некоторые сведения из теории сравнений, позиционная форма записи целых чисел (десятичная, двоичная и др. системы), решались неопределенные уравнения первой степени.

Учащимся VIII класса давался следующий материал.

Определение.

*Два числа $a$ и $b$ называются сравнимыми по модулю $m$, если они дают один и тот же остаток при делении на $m$.*

Сравнимость чисел $a$ и $b$ по модулю принято записывать так: $a \equiv b\,(m)$ или $b \equiv a\,(m)$ — и читать: „$a$ сравнимо с $b$ по модулю $m$“ или „$b$ сравнимо с $a$ по модулю $m$“. На примерах следует разъяснить введенное понятие.

**Свойства сравнений.** (К доказательству свойств привлекались сами учащиеся. В тех случаях, когда учащиеся затруднялись в доказательстве (например, 1-я часть свойства 2), доказательство давал учитель.)

1. Если $a \equiv b(m)$, то $(a-b) \vdots m$, и обратно: если $(a-b) \vdots m$, то $a \equiv b(m)$.

2. Свойство рефлексивности: всякое число сравнимо с самим собой по модулю $m$, т. е. $a \equiv a(m)$.

3. Свойство транзитивности: если $a \equiv b(m)$ и $b \equiv c(m)$, то $a \equiv c(m)$.

4. Число сравнимо со своим остатком, который получается от деления данного числа на модуль $m$.

5. Сравнения можно почленно складывать, т. е. если $a \equiv b(m)$ и $a_1 \equiv b_1(m)$, то $a + a_1 \equiv b + b_1(m)$.

6. Сравнения можно почленно вычесть, т. е. если $a \equiv b(m)$ и $a_1 \equiv b_1(m)$, то $a - a_1 \equiv b - b_1(m)$.

7. Сравнения можно почленно перемножить, т. е. если $a \equiv b(m)$ и $a_1 \equiv b_1(m)$, то $a \cdot a_1 \equiv b \cdot b_1(m)$.

8. Обе части сравнения можно умножить на одно и то же целое число, т. е. если $a \equiv b(m)$, то $ak \equiv bk(m)$.

9. Обе части сравнения можно возвысить в одну и ту же натуральную степень, т. е. если $a \equiv b(m)$, то $a^k \equiv b^k(m)$.

10. Обе части сравнения можно разделить на одно и то же число, взаимно простое с модулем, т. е. если $a \cdot k \equiv b \cdot k(m)$ и $(km) = 1$, то $a \equiv b(m)$.

Многие из свойств сравнений учащиеся сами смогут доказать под руководством учителя.

После доказательства каждого свойства давались примеры на их применение. Например, после доказательства свойства 9 решалась задача: „Какой остаток дает число $17^{12}$ при делении на 5?"

Решение. $17 = 2(5)$.

Возводя в 4-ю степень обе части равенства, получим: $17^4 = 16(5)$; но $16 \equiv 1(5)$. Значит, по свойству транзитивности имеем: $17^4 \equiv 1(5)$.

Возводя обе части последнего равенства в куб, получаем: $17^{12} \equiv 1(5)$, т. е. число $17^{12}$ при делении на 5 дает в остатке 1.

В IX и X классах с целью повторения учащимся периодически даются задания на применение сведений по теории делимости.

Перейдем теперь к рассмотрению задач, используемых при изучении теории делимости на факультативных занятиях в VII—VIII классах.

## VII КЛАСС

### I. Разбиение целых чисел на классы по остаткам

(задачи на делимость)

1. Разбить все целые числа по модулю 2. (Каждый класс записать также в общем виде.)
2. Разбить все целые числа по модулю 3. (Записать в общем виде.)
3. Разбить все целые числа по модулю: а) 4; б) 5.
4. Из всех целых чисел, разделенных на классы по модулю 6, выписать отдельно четные и отдельно нечетные (записать в общем виде).
5. Из всех целых чисел, разделенных на классы по модулю 8, выписать отдельно: а) четные; б) нечетные; в) кратные 4 (в общем виде).
6. Доказать, что произведение трех последовательных целых чисел кратно 6.
7. Доказать, что сумма двух нечетных чисел есть число четное.
8. Доказать, что сумма четного и нечетного чисел есть число нечетное.
9. Доказать, что сумма любых трех последовательных целых чисел делится на 3.
10. Доказать, что сумма любых пяти последовательных целых чисел делится на 5.
11. Доказать, что сумма двузначного числа и числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.
12. Доказать, что разность между двузначным числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.
13. Доказать, что сумма любых семи последовательных целых чисел кратна 7.
14. Доказать, что сумма любых шести последовательных целых чисел не кратна 6.
15. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел кратна 8.
16. Доказать, что $a^2 - a$ делится на 2 при любом целом значении $a$.
17. Доказать, что число $a^2 + a$ делится на 2 при любом целом $a$.

18. Доказать, что число $(2a+1)^2-1$ кратно 8 при любом целом $a$.
19. Доказать, что разность (сумма) квадратов двух любых четных чисел кратна 4.
20. Доказать, что разность квадратов двух любых нечетных чисел кратна 8.
21. Доказать, что при любом целом $n$: а) $n(n^3-n) \vdots 6$; б) $(n^3+5n) \vdots 6$; в) $(n^3+11n) \vdots 6$; г) $(n^3-13n) \vdots 6$.
22. Доказать, что выражение $\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$ есть целое число при всяком целом значении переменной $m$.
23. Доказать, что число $6^k+k^3+6k^2+11k+6$ кратно 6 при любом натуральном значении $k$.
24. Доказать, что если число $n$ не кратно 3, то число $n^2+2$ кратно 3.
25. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)$ кратно 3 при любом целом $n$.
26. Доказать, что сумма $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ кратна 9 при любом целом $n$.
27. Доказать, что $n^5-n$ делится на 5 при любом целом $n$.
28. Доказать, что $n^7-n$ делится на 7 при любом целом $n$.
29. Доказать, что $n(2n+1)(7n+1)$ делится на 6 при любом целом $n$.
30. Доказать, что $b(b^4-16)$ делится на 64 при любом четном $b$.
31. Доказать, что при любом четном $n$ число $n^3+20n$ кратно 48.
32. Доказать, что $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ делится на 120 при любом целом $n$.
33. Доказать, что $n^2+3n+5$ не кратно 121 ни при каком целом $n$.
34. Доказать, что $n^2+n+10$ не кратно 169 ни при каком целом $n$.
35. Доказать, что ни при каких целых значениях $n$: а) $n^2-n+1$ не кратно 5; б) $n^2+4n+6$ не кратно 5.
36. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел никогда не является квадратом натурального числа.

37. Доказать, что число вида $4n^2-5$ не может быть квадратом натурального числа ни при каком целом $n$.

38. Доказать, что $4n^2-2$ не может быть квадратом натурального числа ни при каком целом $n$.

39. Доказать, что числа вида $9n^2-1$, $9n^2-3$, $9n^2-4$, $9n^2-6$, $9n^2-7$ не могут быть квадратами натурального числа ни при каком целом $n$.

40. Доказать, что равенство $5x^2+6x+15=y^2$ невозможно ни при каких целых значениях $x$ и $y$.

41. То же самое доказать относительно равенств: а) $5x^2+16x+26=y^2$; б) $5x^2+6x+14=y^2-2y$.

42. Доказать, что $5^m+6^n+11^k$ ни при каких натуральных $m$, $n$ и $k$ не может быть квадратом натурального числа.

43. Какой цифрой может оканчиваться: а) квадрат целого числа; б) куб целого числа; в) четвертая степень целого числа?

44. Доказать, что число $m^5$ оканчивается той же цифрой, что и само число $m$.

45. Доказать, что равенство $5x^2+26x+2y=y^2+46$ невозможно ни при каких целых $x$ и $y$.

46. Доказать, что число $3^n-2$ ни при каком натуральном $n$ не кратно 10.

## II. Позиционная форма записи чисел (десятичная система)

47. Записать в позиционной форме следующие числа: $10a+b$, $100a+10b+c$, $1000a+100b+10c+d$, $100a+10c+b$, $100b+10a+c$, $100b+10c+a$, $100x+y$, $100x+10y+4$.

48. Из позиционной формы записи числа перейти к записи числа в виде суммы: $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{cba}$, $\overline{cab}$, $\overline{aaa}$, $\overline{aab}$, $\overline{aabb}$, $\overline{abdck}$.

49. Найти число $\overline{aabb}$, являющееся точным квадратом.

50. Из различных цифр $x$, $y$ и $z$ образованы все возможные трехзначные числа; сумма их в 33 раза больше трехзначного числа $\overline{xxx}$. Найти $x$, $y$ и $z$.

51. Найти 4-значное число $\overline{abcd}$, являющееся квадра-

том натурального числа, цифры которого удовлетворяют соотношениям: $a+b+c+d=\overline{ab}$, $b=c+d$.

52. Убедиться в справедливости равенств: $\overline{abc}=\overline{aoo}+\overline{bc}$, $\overline{abcd}=\overline{aboo}+\overline{cd}$, $\overline{abcdk}=\overline{abcoo}+\overline{dk}$, использовать эти равенства для доказательства признака делимости чисел на 4, на 25.

53. Убедиться в справедливости равенств: $\overline{ab}=9a+(a+b)$, $\overline{abc}=(99a+9b)+(a+b+c)$, $\overline{abcd}=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$, $\overline{abcdk}=(9999a+999b+99c+9d)+(a+b+c+d+k)$; использовать эти равенства для доказательства признака делимости чисел на 3 и на 9.

54. Число $\overline{1ab1c}$ кратно 924. Найти его.

55. Известен такой признак делимости чисел на 11: число делится на 11 тогда, и только тогда, если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11. Доказать этот признак для чисел: трехзначных, четырехзначных, пятизначных, шестизначных.

56. Найти число $\overline{abcd}$, если $a$, $\overline{cd}$, $\overline{ad}$ и $\overline{abcd}$ — квадраты натуральных чисел.

57. Решить уравнение $6\cdot\overline{xx}\cdot\overline{xy}=\overline{xxyy}$.

## III. Деление с остатком

58. Написать общий вид чисел, дающих при делении на 7 остаток, равный: а) 3; б) 5; в) 6.

59. Если число $n$ при делении на 7 дает остаток 1 или 2, то его квадрат при делении на 7 дает остаток соответственно 1 или 4. Доказать это.

60. Если число $n$ при делении на 10 дает остаток 1, 2 или 3, то его квадрат при делении на 10 дает остаток 1, 4 или 9. Доказать это.

61. Число $n$ при делении на 11 дает остаток 2. Какой остаток при делении на 11 дает куб данного числа?

62. Тот же вопрос при условии, что число $n$ при делении на 11 дает остаток 3, 4, 5 или 6.

63. Число 16 при делении на $b$ дает остаток 5. Число 30 при делении на $b$ дает остаток 7. Какой остаток при делении на $b$ дает число 46?

64. При делении чисел $a$, $b$ и $c$ на 7 получаются остатки соответственно 1, 4 и 5. Какой остаток при делении на 7 дает сумма $a+b+c$?

65. При делении чисел $a$ и $b$ на 7 получаются остатки 2 и 3. Какой остаток при делении на 7 дает произведение $a \cdot b$?

66. Числа $a$ и $b$ при делении на 8 дают остатки 3 и 5. Какой остаток получится, если $a \cdot b$ разделить на 8?

67. При делении чисел $a$, $b$, $c$ и $d$ на 5 получаются остатки соответственно 1, 2, 3 и 4. Какой остаток получится при делении $a+b+c+d$ на 5?

68. При делении $a$ на 4 получается остаток 1. Какой остаток при делении на 4 дает число $a^3+a^2+a$?

69. При делении чисел $a$, $b$ и $c$ на 5 получились остатки соответственно 1, 2 и 3. Найти остаток от деления $a^2+b^2+c^2$ на 5.

70. Число $a$ при делении на 7 дает остаток 6. Какой остаток при делении на 7 дает $a^2$, $a^3$?

71. Число $a=13\,127$ при делении на некоторое целое положительное число $b$ дало в частном $q=121$. Найти делитель $b$ и остаток $r$.

72. Числа $a$, $b$, $c$ — остатки от деления целого числа $N$ соответственно на 3, 5, 7. Доказать, что число $70a+21b+15c-N$ кратно 105.

## IV. Решение уравнений в целых числах

73. Исключить целую часть из каждой дроби:

$$\frac{x+7}{x+3};\ \frac{2x+5}{x+1};\ \frac{x+7}{x-3};\ \frac{3x-1}{x+5};\ \frac{5x+8}{x-4};\ \frac{3x+3}{-x+7};$$
$$\frac{3x+9}{-x+7};\ \frac{-4x+19}{x+3}.$$

74. Исключить целую часть из каждой дроби:

$$\frac{x+3}{x+7};\ \frac{2x+3}{2x+1};\ \frac{2x+1}{2x+7};\ \frac{x}{x-4};\ \frac{x}{x+4};\ \frac{4x-3}{x};$$
$$\frac{3x}{x-3};\ \frac{4x}{x-4};\ \frac{5x}{x+2}.$$

75. Решить уравнения в целых числах:

а) $xy+3x-5y=-3$; г) $xy+2y+x=-8$;
б) $xy+2y=7x+11$; д) $xy-3y+2x=11$;
в) $xy+4y-3x+18=0$; е) $xy-3y-25x+17=0$.

76. Решить уравнения в целых числах:

а) $3y - xy = 2x + 4$; г) $xy + 5y + 2x = -2$;
б) $3y - xy = 5 - 4x$; д) $xy - y = 2 - 3x$;
в) $xy - 2x = 3y - 13$; е) $2xy - 5y = 11 - 2x$.

77. Решить уравнения в целых числах:

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}$;
б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$;
в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$.

78. При каких целых $x$ и $y$ возможно каждое из равенств:

а) $3y = 2 + \frac{26}{3x - 1}$; в) $2y = 1 + \frac{17}{2x - 3}$;
б) $4y = 3 + \frac{7}{4x - 1}$; г) $3y = 7 + \frac{14}{2x - 3}$?

79. При каких целых значениях $x$ каждое из написанных ниже дробных выражений будет являться целым числом:

а) $\frac{2x + 8}{3x - 1}$; б) $\frac{3x + 1}{4x - 1}$; в) $\frac{5x - 1}{2x + 3}$; г) $\frac{2x - 7}{3x + 1}$;
д) $\frac{2x + 9}{x + 1}$; е) $\frac{x + 7}{2x - 3}$; ж) $\frac{x}{5x - 7}$; з) $\frac{2x - 3}{6x}$?

80. Решить в целых числах уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 15$; г) $4x^2 - y^2 = 8$;
б) $x^2 - y^2 = 33$; д) $4x^2 - 9y^2 = 7$;
в) $x^2 - y^2 = 105$; е) $9x^2 - y^2 = 27$.

81. Доказать, что уравнение $x^2 - 3y^2 = 17$ решений в целых числах не имеет.

82. Решить каждое из уравнений в целых числах:

а) $(x - 2)^2 - y^2 = 3$; в) $(x + 6)^2 - (y - 5)^2 = 33$;
б) $x^2 - (y - 3)^2 = 12$; г) $(x + 2)^2 - (y + 2)^2 = 5$.

83. Каждое из уравнений решить в целых числах:

а) $x^2 = y^2 - 6y + 44$; в) $x^2 - 6x - 19 = y^2 - 10y$;
б) $x^2 - 8x = y^2 + 6y + 13$; г) $x^2 - 8x - y^2 + 14y = 2$.

## V. Простые и составные числа. Каноническое разложение числа. Алгоритм Евклида

84. Выписать простые числа из первой сотни целы чисел, т. е. из промежутка от 1 до 100.
85. Выписать отдельно составные и отдельно просты числа из следующих чисел: 1227, 111, 299, 12 132, 137, 139, 857, 859, 1397.
86. Не пользуясь таблицей простых чисел, доказат что числа 101, 103, 107, 109, 113, 131, 733, 99 2647, 2657, 2719 являются простыми.
87. Представить в каноническом разложении следую щие числа: 12, 120, 800, 1200, 1800, 1227, 100, 100 10 000.
88. С помощью алгоритма Евклида найти НОД сле дующих пар чисел: (588, 2058), (588, 2849), (29 391), (391, 667), (6188, 4709).
89. Наименьшее общее кратное чисел $a$ и $b$ обозна чают символом $[a, b]$, их наибольший общий дели тель — символом $(a, b)$. Доказать: $(a, b) = \frac{a \cdot b}{[a, b]}$.
90. Найти: $[72, 108]$, $[40, 5648]$, $[14, 2128]$, $[588, 2058]$ $[391, 667]$.
91. Дано: дробь $\frac{a}{b}$ сократима. Доказать, что сокра тима также каждая из дробей: $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{2a+3b}{5a+7b}$, $\frac{4a+9b}{3a-2b}$.
92. Дано: дробь $\frac{a+b}{a-b}$ сократима. Доказать, что дробь $\frac{a}{b}$ тоже сократима.
93. Если неправильная дробь сократима, то после исключения целой части оставшаяся дробная часть тоже сократима. Доказать.
94. Сформулировать и доказать теорему, противоположную предыдущей.
95. Доказать, что если целые положительные числа $a$ и $b$ взаимно простые, то взаимно простыми будут также и следующие пары чисел: 1) $a$ и $a + b$; 2) $a + b$ и $2a + b$; 3) $a$ и $2a + b$.

96. Дано: $a$ и $b$ — взаимно простые числа. Доказать, что сумма $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$ после приведения к общему знаменателю не может быть сократимой дробью.

97. Доказать, что каждая из дробей $\frac{14n+3}{21n+4}$, $\frac{10n+7}{15n+11}$, $\frac{20n-6}{24n-7}$ не сократима ни при каком целом $n$.

98. Найти все целые значения $n$, при которых дробь $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}$ обращается в целое число.

99. Найти все целые значения $a$, при которых дробь $\frac{4a^2+6a+35}{2a+3}$ обращается в целое число.

100. Доказать, что каждая из дробей $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$, $\frac{2n+1}{2n^2+2n}$, $\frac{a-1}{a^2-8a+8}$, $\frac{3x+2}{3x^2-x-1}$ не сократима ни при каких целых значениях букв.

101. Узнать, при каких значениях $a$ дробь сократима: $\frac{a^2+3a-7}{a+2}$, $\frac{a-1}{a^2-4a+6}$, $\frac{3a^2+5a-6}{a^2-a+3}$.

102. Доказать, что если натуральное $x>1$, то $x^4+4$ всегда составное число.

103. Доказать, что если натуральное $x>1$, то $x^4+x^2+1$ всегда составное число.

104. Доказать, что при любом целом $x$ число $(x+1)\times$ $\times(x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+7)+15$ составное.

105. Доказать, что при любом целом $x$ число $(x+1)\times$ $\times(x+3)\cdot(x+5)\cdot(x+7)+10$ составное.

## VIII КЛАСС

### I. Неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными

106. Решить в целых числах уравнения:

1) $3x+5y=6$; 4) $23x+53y=109$; 7) $12x+17y=41$;
2) $7x-4y=2$; 5) $6x-5y=21$; 8) $11x-20y=49$;
3) $5x+y=18$; 6) $9x+14y=105$; 9) $15x+28y=59$.

107. Решить в целых положительных числах уравнения:

1) $3x-5y=11$; 4) $3x+7y=55$; 7) $7x+5y=157$;
2) $8x-3y=13$; 5) $5x+4y=3$; 8) $5x-11y=17$;
3) $4x+5y=-7$; 6) $3x+2y=10$; 9) $8x+11y=13$.

108. Разложить число 118 на такие два слагаемых, из которых одно делилось бы на 11, а другое — на 17.

109. Для упаковки самоваров имеются ящики, из которых в одни укладываются 4 самовара, а в другие — 7. Сколько нужно взять тех и других ящиков, чтобы упаковать 41 самовар?

110. Доказать, что каждое из уравнений не имеет целых решений:

1) $4x+8y=47$; 3) $12x+16y=14$;
2) $3x-12y=8$; 4) $15x-5y=6$.

111. Разложить число 100 на такие два положительных слагаемых, чтобы одно из них делилось на 7, а другое — на 11.

112. Для настилки пола шириной в 3 *м* имеются доски в 11 *см* и 13 *см*. Сколько нужно взять досок того и другого размера?

113. Для ссыпки ржи имеются мешки двух размеров: мешок одного размера вмещает 60 *кг*, другого — 80 *кг*. Сколько нужно взять тех и других, чтобы ссыпать 440 *кг* ржи и чтобы не было неполных мешков?

114. Найти общий вид чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 3, а при делении на 11 дают в остатке 4.

## II. Арифметические приложения теории сравнений

115. Даны три числа: 78, 210 и 346. Сравнимы ли они с 27 по модулю 11?

116. Среди чисел 123, 211, 134, 214, 303, 21 найти все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 5.

117. Среди чисел 135, 226, 106, 181, 225, 167, 452 найти все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 15.

118. Среди чисел 146, 1201, 182, 241 найти все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 12.

119. Записать с помощью сравнений следующие условия:

1) Число $a$ дает остаток 3 при делении на 5.

2) Число $b$ дает остаток 1 при делении на 5.

3) Числа $m$ и $n$ оканчиваются одной и той же цифрой.

4) Число $a$ оканчивается нулем.

5) Число $a$ оканчивается цифрой 7.

120. Найти остатки от деления на 8 следующих степеней: $3^{13}$, $5^{13}$, $7^{13}$.

121. Найти остаток от деления суммы $3^{13}+5^{13}+7^{13}$ на 8.

122. Найти остатки от деления на 10 следующих степеней: $3^{14}$, $7^{14}$, $9^{14}$.

123. Найти остаток от деления $13^{49}$ на 48.

124. Найти остаток от деления $2^{19}+4^{19}+5^{19}+$ $+7^{19}8^{19}$ на 9.

125. Найти остатки от деления $16^{30}$ на 3, $16^{30}$ на 5, $27^{19}$ на 4, $27^{19}$ на 7.

126. Доказать, что $43^{23}+23^{43}$ делится на 66.

127. Доказать, что $2^{55}+1$ делится на 11.

128. Доказать, что $7+7^2+7^3+\ldots+7^{44}$ делится на 100.

129. Найти две последние цифры чисел: $2^{49}$, $3^{101}$, $17^{28}$, $19^{321}$.

## III. Позиционная форма записи целых чисел

130. Записать с помощью степеней числа 10 следующие числа: 372, 4892, 21 037, 407 122, 555 555.

131. Записать в десятеричной системе следующие числа: $\overline{1011}_2$, $\overline{10\,101}_2$, $\overline{12}_3$, $\overline{1201}_3$, $\overline{21\,011}_3$, $\overline{10\,101}_3$, $\overline{10\,101}_2$.

132. Записать в десятеричной системе следующие числа: $\overline{1232}_5$, $\overline{214}_5$, $\overline{32}_5$, $\overline{23}_5$, $\overline{1042}_5$.

133. Записать в двоичной системе счисления следующие числа: 2, 3, 5, 17, 20, 27.

134. Записать в троичной системе следующие числа: 2, 3, 4, 5, 17, 28, 38.

135. Записать в пятеричной системе следующие числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 19, 28, 99.

136. Перевести в пятеричную систему счисления следующие числа: $\overline{101}_2$, $\overline{111}_2$, $\overline{1010}_2$, $\overline{111}_3$, $\overline{232}_4$.

137. Выполнить сложение в указанной системе счисления: 1) $101_2 + 111_2 + 100_2$; 2) $123_5 + 104_5$; 3) $111_2 + 11_2 + 1$; 4) $738_{10} + 252_{10}$.

138. Записать с помощью степеней следующие числа (основание степени указано внизу около числа): $\overline{xy}_2$, $\overline{xy}_3$, $\overline{xyzt}_4$, $\overline{xytt}_4$, $\overline{xyzt}_5$, $\overline{xyzt}_{10}$.

139. Выполнить умножение в указанной системе счисления: 1) $\overline{11}_2 \times \overline{11}_2$; 2) $\overline{13}_5 \times \overline{13}_5$; 3) $\overline{12}_5 \times \overline{13}_5$; 4) $\overline{10}_2 \times \overline{11}_2$.

## IV. Задачи по теории делимости целых чисел, которые могут быть решены методом полной математической индукции

140. Доказать, что число вида $9^n - 1$ делится на 8 при любом натуральном $n$.

141. Доказать, что число вида $9^n - 8n - 1$ делится на 64 при любом натуральном $n$.

142. Доказать делимость при любом натуральном $n$: 1) $(5^n - 2^n) : 3$, 2) $(8^n - 3^n) : 5$; 3) $(17^n - 11^n) : 6$.

143. Доказать, что $5 \cdot 49^n + 1 + 8^n$ кратно 41 при любом целом $n \geqslant 0$.

144. Доказать, что $4 \cdot 6^n + 5n - 4$ кратно 25 при любом целом $n \geqslant 0$.

145. Доказать, что число вида $8^n + 6$ кратно 7 при любом целом $n \geqslant 0$.

146. Доказать, что число $2 \cdot 7^n + 1$ кратно 3 при любом целом $n \geqslant 0$.

147. Доказать, что $7^n + 3n - 1$ делится на 9 при любом целом $n \geqslant 0$.

148. Доказать делимость при любом целом неотрицательном $n$: 1) $(2^{2n+1} + 1) : 3$; 2) $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) : 7$; 3) $(4^{2n+1} + 3^{n+2}) : 13$; 4) $(5^{2n+1} + 4^{n+2}) : 21$.

149. Доказать, что для любого натурального $a$ при нечетном $p > 0$ разность $a^p - a$ кратна 6.

## V. Задачи на повторение и закрепление теории делимости

**150. Доказать, что произведение 4 последовательных целых чисел кратно 24.**

**151. Доказать, что выражение $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ есть целое число при любом целом $n$.**

**152. Доказать, что числа вида $16n^2-1$, $16n^2-2$, $16n^2-3$, $16n^2-4$, $16n^2-5$, $16n^2-6$, $16n^2-8$, $16n^2-9$ не могут являться квадратами никаких целых чисел.**

**153. Сколько имеется целых положительных чисел, меньших 100 и не кратных ни 2, ни 5?**

**154. Сколько имеется натуральных чисел, меньших 1000 и не кратных ни 2, ни 5?**

**155. Доказать, что $x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$ не может равняться 33 ни при каких целых значениях $x$ и $y$.**

156. Доказать, что $a(a^4-1)$ кратно 30 при любом целом $a$.

157. Доказать, что число вида $a(a^4-16)$ кратно 15 при любом целом значении $a$.

158. Доказать, что число вида $a(a^4-81)$ кратно 10 при любом целом $a$.

159. Доказать, что $a(a^4-625)$ кратно 6 при любом целом $a$.

160. Доказать, что $a(a^4-6^4)$ кратно 5 при любом целом $a$.

161. Доказать, что $a(a^4-10\,000)$ кратно 3 при любом целом $a$.

162. Решить уравнения в целых числах:

а) $(xy-1)\cdot(x+y)=1$ в) $(x^2+y^2)\cdot(x+y)=15$

б) $(x+2y)\cdot(3x-2y)=35$ г) $(7x+3y)\cdot(5x+2y)=12$

163. Решить уравнения в целых числах:

а) $x^2-y^2=27$ в) $x^2+12x-y^2+10y=22$

б) $x^2-y^2=4$ г) $y^2-2y=x^2+6x+13$

164. Сколько существует пар целых чисел от 1 до 100, для которых $\frac{x^2+y^2}{9}$ есть целое число?

165. Сколько существует пар целых чисел от 1 до 100, для которых $\frac{x^2+y^2}{25}$ есть целое число?

166. Доказать, что числа $a^2$ и $a-1$ взаимно простые при любом целом $a$.

167. То же, что и в задаче 166, доказать относительно каждой пары чисел (буквы обозначают целые числа):

1) $2n^2+2n$ и $2n+1$; 2) $3x^2-x-1$ и $3x+2$; 3) $a^3+2a$ и $a^4+3a^2+1$; 4) $a^5+4a^3+3a$ и $a^4+3a^2=1$.

168. Доказать, что число $2x^2+2x+1$ не делится на 7 ни при каком целом $x$.

169. То же самое доказать относительно чисел $3x^2+2x+1$, $5x^2+2x+1$.

170. Показать, что произведение 4 последовательных целых чисел в сумме с единицей дает число составное.

171. Показать, что $\frac{m^4}{24}+\frac{m^3}{4}+\frac{11m^2}{24}+\frac{m}{4}$ есть целое число при любом целом $m$.

172. Доказать, что $m(m-1)\cdot(m-2)\cdot\frac{3m-5}{12}$ есть целое число при любом целом $m$.

173. Доказать, что $x^{54}-x^{22}$ делится на 10 при любом целом значении $x$.

174. Доказать, что $11^{10}-1$ делится на 100.

175. Найти остаток от деления $6^{592}$ на 11.

176. Найти последнюю цифру числа $7^{101}$.

177. Найти последние три цифры числа $243^{402}$.

178. Доказать, что если числа $n$ и 8 взаимно просты, то $n^2\equiv 1\ (8)$.

179. Доказать, что если числа $n$ и 6 взаимно просты, то $n^2\equiv 1\ (24)$.

180. Доказать, что $2222^{5555}+5555^{2222}$ кратно 7.

181. При каких целых значениях $x$ выражение $1+4x$ будет являться квадратом целого числа? (Вывести формулу для $x$.)

182. Решить в целых числах уравнение $9x+2=y\cdot(y+1)$.

183. Доказать, что $3+4x$ не может являться квадратом целого числа ни при каком целом $x$.

184. Доказать, что число $4n^2-1$ не может являться квадратом никакого целого числа.

185. Доказать, что уравнение $4x^2+8nx+1=0$ не может иметь рациональных корней, если $n$ — целое число.

186. Доказать, что уравнение $x^2+3px+1=0$ не имеет рациональных корней при целом $p$.

Б-08.—¹/₄5