БОРИСЕНКО В. П. (Москва)

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются способы построения графиков функций $P(x)+Q(x)$, $P(x)\cdot Q(x)$, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ для тех значений x, при которых $Q(x)\neq 0$. При этом учащиеся получают представление о новых для них примерах использования простейших геометрических преобразований.

1. Построение графика функции $y=P(x)+Q(x)$ по заданным графикам функций $y=P(x)$ и $y=Q(x)$

Пусть даны графики функций $y=P(x)$ и $y=Q(x)$ (рис. 1). Построим график функции $y=P(x)+Q(x)$. Для этого покажем прием построения точки A', принадлежащей искомому графику, для значе-

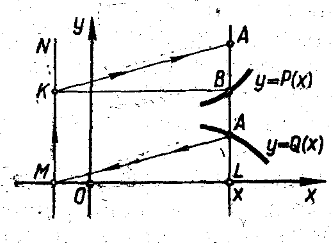

Рис. 1.

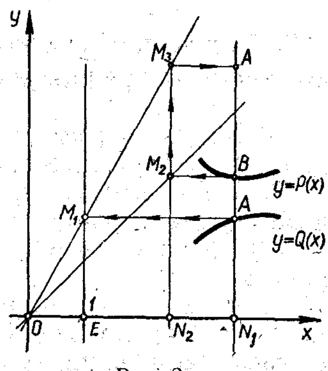

Рис. 2.

ний x из области определения функций $y=P(x)$ и $y=Q(x)$.

Возьмем на оси Ox произвольную точку M и проведем через нее вертикаль MN. Точка M может быть взята произвольно. С помощью вертикали MN построение искомой точки A' будем выполнять следующим образом:

1) Через точку A, принадлежащую графику функции $y=Q(x)$, проведем вертикаль, точку ее пересечения с графиком функции $y=P(x)$ обозначим через B.

2) Соединим точки A и M отрезком прямой.

3) Спроектируем ортогонально точку B на прямую MN, основание перпендикуляра обозначим через K.

4) Через точку K проведем прямую, параллельную прямой MA, до ее пересечения с прямой AB; точка пересечения, обозначим ее через A', и будет искомой, т. е. она будет принадлежать графику функции $y=P(x)+Q(x)$.

В самом деле, из построения следует, $\triangle LMA = \triangle BKA'$, докажем теперь, что точка A' действительно принадлежит графику функции $y=P(x)+Q(x)$. Из рисунка 1 следует, что

$$y=LA'=LB+BA'=LB+LA,$$

но точка B принадлежит графику функции $y=P(x)$, а точка A — графику функции $y=Q(x)$. Следовательно, точка A' принадлежит графику функции $y=P(x)+Q(x)$.

2. Построение графика функции $y=P(x)\cdot Q(x)$ по заданным графикам функций $y=P(x)$ и $y=Q(x)$

Пусть даны графики функций $y=P(x)$ и $y=Q(x)$ (рис. 2). Требуется построить график функции $y=P(x)\times Q(x)$. Рассмотрим прием построения точки A', принадлежащей графику функции $y=P(x)\cdot Q(x)$.

Построение будем выполнять в следующем порядке:

1) Через точку A, принадлежащую графику функции $y=Q(x)$, проведем вертикаль до ее пересечения с графиком функции $y=P(x)$. Точку пересечения обо-

значим через B. (Примечание: построение, естественно, выполняется на множестве значений x, для которых обе функции определены.)

2) Через точку A проводим горизонталь до ее пересечения с прямой $x=1$, эту точку пересечения обозначим через M_1.

3) Проводим прямую OM_1.

4) Через точку B проводим горизонталь до пересечения ее с биссектрисой первого (или третьего) координатного угла, эту точку обозначим через M_2.

5) Через точку M_2 проводим вертикаль до пересечения ее с прямой OM_1, эту точку обозначим через M_3.

6) Точка пересечения прямой AB с горизонталью, проведенной через точку M_3, — точка A' — и будет искомой, т. е. она будет принадлежать графику функции $y=P(x)\cdot Q(x)$.

В самом деле, из построения следует, что ордината точки A' в выбранном масштабе равна длине отрезка N_1A':

$$y=N_1A'=N_2M_3=EM_1\cdot ON_2=$$

(это следует из подобия треугольников OEM_1 и ON_2M_3)

$$=N_1A\cdot N_2M_2=N_1A\cdot N_1B.$$

Но N_1A — ордината точки A, а N_1B — ордината точки B, следовательно, точка A' принадлежит графику функции $y=P(x)\cdot Q(x)$.

Рассмотрим некоторые примеры построения графиков функций:

1) Построить график функции $y=xQ(x)$ по заданному графику функции $y=Q(x)$.

Из построения, приведенного на рисунке 3, следует:

$$y=NA'=EM\cdot ON=NA\cdot ON=xQ(x).$$

2) Построить график функции $y=P(x)\cdot Q(x)\cdot T(x)$ по заданным графикам функций $y=P(x)$, $y=Q(x)$, $y=T(x)$ и без предварительного построения графика функции вида $y=A(x)\cdot B(x)$. Схема построения дана на рисунке 4.

3) В некоторых случаях удобно применить следующий прием для построения графика функции вида

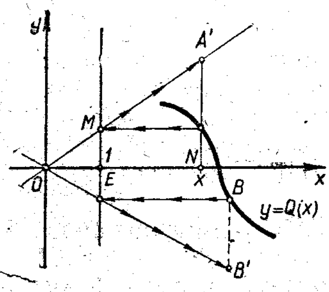

Рис. 3

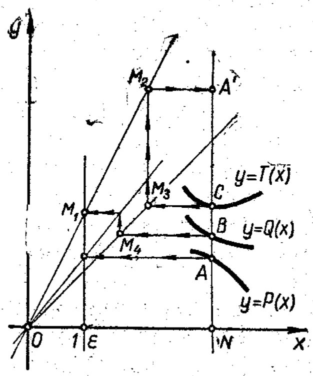

Рис. 4.

$y = P(x) \cdot Q(x)$ по заданным графикам функций $y = P(x)$ и $y = Q(x)$, представленный на рисунке 5.

Прежде всего, заметим, что точки M и N, точки пересечения графиков с осью Ox, принадлежат искомому графику. (Почему?)

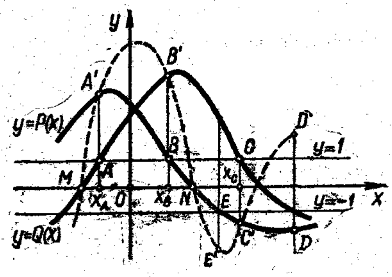

Рис. 5

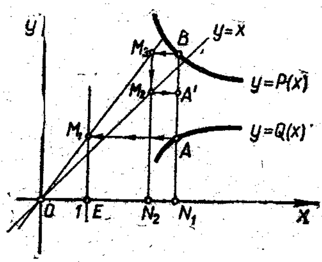

Рис. 6.

Проведем прямую $y = 1$. Предположим, что эта прямая пересекает заданные графики в точках A, B и C. Обозначим абсциссы этих точек через x_A, x_B, x_C. Легко видеть, что при значениях аргумента x_A, x_B и x_C значения функции $y = P(x) \cdot Q(x)$ будут равны $P(x_A)$, $Q(x_B)$, $P(x_C)$ соответственно.

Аналогично могут быть построены точки искомого графика при построении прямых $y = 2, 3, \dots, -1, -2, \dots$.

3. Построение графика функции $y = P(x) : Q(x)$ по заданным графикам функций $y = P(x)$ и $y = Q(x)$

Пусть даны графики функций $y = P(x)$ и $y = Q(x)$. Рассмотрим построение точки, принадлежащей графику функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (построение, естественно, будем выполнять для тех значений аргумента, при которых определены обе функции, причем $Q(x) \neq 0$). Этапы построения приведены на рисунке 6.

1) Через точку A, принадлежащую графику функции $y = Q(x)$, проведем горизонталь до пересечения ее с прямой $x = 1$, полученную точку обозначим через M_1.

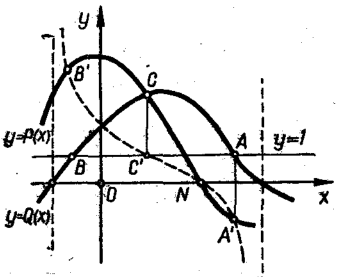

Рис. 7.

2) Проведем прямую OM_1.

3) Через точку B, принадлежащую графику функции $y = P(x)$, проведем горизонталь до пересечения ее с прямой OM_1. Точку пересечения обозначим через M_3.

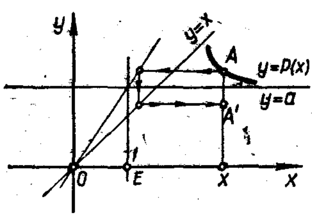

Рис. 8.

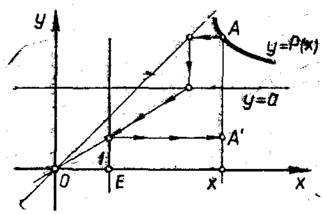

Рис. 9.

4) Через точку M_3 проведем вертикаль до пересечения ее с прямой $y = x$, точку пересечения обозначим через M_2.

5) Искомая точка, точка A', находится как точка пересечения прямой AB с горизонталью, проведенной через точку M_2.

Доказательство:

$$y = N_1A' = N_2M_2 = ON_2 = N_2M_3 : EM_1 = N_1B : N_1A,$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Для построения графика функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ удобно также использовать идею приема, рассмотренного на стр. 109 (пример 3), схема построения дана на рисунке 7.

На рисунках 8—9 показаны приемы построения графиков функций

$$y = \frac{P(x)}{a} \text{ и } y = \frac{a}{P(x)}.$$