Библиотека учителя математики

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В 6—8 КЛАССАХ

СБОРНИК СТАТЕЙ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

74.262.7
П 72

Рекомендовано к изданию
Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР

П72 Преподавание геометрии в 6—8 классах. Сб. статей /Сост. В. А. Гусев.—М.: Просвещение, 1979.—281 с, ил. — (Б-ка учителя математики).

В статьях сборника освещаются некоторые вопросы преподавания геометрии в восьмилетней школе. Наряду с такими общими проблемами, как межпредметные и внутрипредметные связи, повышение эффективности урока, методика применения задач в обучении, рассматриваются частные вопросы преподавания геометрии* векторы, геометрические преобразования, логические основы, решение задач.

Книга предназначена для учителей, а также может быть полезна читателям, которые интересуются указанными вопросами.

О $\frac{60501 — 718}{103 (03)—79}$ подписное 4306010400 74 2627
513

ОГЛАВЛЕНИЕ

Библиотека учителя математики

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ
В 6-8 КЛАССАХ
СБОРНИК СТАТЕЙ

ИБ *N2* 4235
Редакторы В. И. ЕФИМОВ,
Л. В. ПРИВЕЗЕНЦЕВА
Художник Б. Н. ЮДКИН
Художественный редактор
Е. Н. КАРАСИК
Технические редакторы
Л. Е. ПУХОВА,
М. И. СМИРНОВА
Корректор К. А. ИВАНОВА

Сдано в набор 1.02.79. Подписано в печати 30.07.79. Формат 60x90»/ie* Бум. типограф. JSfa 3. Гари литерат. Печать высокая. Уел. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 17,39. Тираж 250 ООО экз. Заказ 54. Цена ?5коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, [полиграфии и книжной торговли, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Советская школа за последние годы претерпела серьезные изменения в области содержания обучения. Особенно существенные изменения произошли в преподавании школьного курса геометрии. Математики, методисты и педагоги всегда считали одной из сложнейших проблем — преподавание геометрии в средней школе. Сейчас в восьмилетней школе действуют программы и учебные пособия по геометрии, созданные под руководством академика А. Н. Колмогорова. В 1978 г. наши школы полностью закончили первый этап перехода на новое содержание школьного математического образования. Это позволяет подвести некоторые итоги,* обобщить опыт.

Решения XXV съезда КПСС и декабрьское (1977 г.) постановление ЦК КПСС определяют новые серьезные задачи перед нашей школой в деле совершенствования школьного математического образования. Это в значительной степени относится к вопросам совершенствования преподавания курса геометрии в 6—8 классах, который в настоящее время вызывает серьезные трудности у учащихся и учителей.

Дело в том, что при построении курса геометрии изменился не только язык (он стал более современным), не только методика изложения различных тем и порядок их изучения, но изменилась сама основа построения курса, те основополагающие идеи, которые в нем заложены. Перед школой встают многочисленные проблемы, связанные с совершенствованием методики реализации этого нового содержания, с решением проблем воспитательного и мировоззренческого порядка, с обеспечением политехнического и профориентационного характера построения учебного материала, а также с вопросами обеспечения предметов естественнонаучного цикла необходимым математическим аппаратом. Охарактеризуем некоторые трудности в реализации указанных направлений,

I. Говоря о совершенствовании методики изложения содержания нового курса геометрии, нельзя не обратить внимания на структуру этого курса. Дело в том, что в настоящее время геометрический материал, изучаемый учащимися в школе, можно разбить на четыре основных этапа: I — начальная школа (1—3 классы); II — пропедевтический геометрический материал

(4—5 классы); III — систематический курс планиметрии (6—8 классы); IV — систематический курс стереометрии (9—10 классы). Уже само перечисление этих этапов показывает необходимость строгого очерчивания содержания каждого из этих этапов, а также вскрытия основных психологических, педагогических и методических принципов, заложенных в процессе обучения учащихся данного возраста. При изучении геометрического материала на каждом из указанных этапов учащиеся сталкиваются с изучением одних и тех же понятий, при этом некоторые из них в процессе перехода от одного этапа к другому получают свое уточнение и развитие, другие уже с самого начала (или почти с самого начала) формулируются строго математически, многие из встречающихся понятий формируются посредством изучения геометрического материала предыдущих периодов и т. д. Содержание каждого этапа прохождения геометрического материала имеет большие пересечения не только при формировании понятий, но и при рассмотрении свойств геометрических фигур и отношений между ними, Можно привести в качестве примера вопросы, связанные с изучением геометрических преобразований. Первоначальные представления об основных видах перемещений появляются в 4—5 классах, в 6—8 классах в курсе планиметрии даются определения преобразованиям плоскости, а в курсе стереометрии 9—10 классов — определения преобразованиям пространств. Все это уже само по себе заставляет серьезно задуматься над методикой формирования указанных понятий.

Особо следует отметить вопросы использования полученных знаний при изучении последующих разделов курса. В качестве примера рассмотрим вопросы, связанные с изучением центральной темы курса — «Векторы». Так, для формирования понятия «вектор» необходимо усвоить такие понятия, как «отображение», «перехмещение», «направление», «параллельность», «сонаправленность», «параллельный перенос» и т. д. Само же понятие «вектор» в курсе планиметрии является основой для изучения гомотетии и ее свойств, служит основой для получения соотношений между элементами в прямоугольном треугольнике, находит весьма существенное применение при изучении перпендикулярности в пространстве и т. д.

II. Школьный курс геометрии, как и любой другой предмет, изучаемый в средней школе, должен преследовать общие установки общеобразовательной средней школы — формирован^ марксистско-ленинского мировоззрения учащихся. Действительно, на материале школьного курса геометрии есть полная возможность формировать элементы этого мировоззрения, так как при изучении содержания геометрического материала мы встречаемся с такими категориальными .фундаментальными понятиями, как «материя», «время», «движение», «пространство» и т. д. Другой стороной воспитания мировоззрения учащихся является ознакомление их с методологическими проблемами науки: фактами истории борьбы материализма с идеализмом, формированием материалистической концепции теории познания, например концепции о решающей роли

человеческой практики как средства добывания научных знаний и как главного критерия их истинности. Большое внимание должно быть уделено принципу историзма.

III. Никакое математическое содержание не может быть усвоено 'учащимися, а главное, не может заинтересовать их, если ученик сам не увидит тех приложений, которые имеют изученные им математические факты. Современные школьные учебники и учебные пособия недостаточно показывают те приложения, которые имеет курс геометрии. В этом отношении следует констатировать тот факт, что элементы политехнизма в изучении курса школьной геометрии еще недостаточно изучены. По мнению многих ученых, вся математика является наукой прикладной. И здесь следует выделить аспекты, которые необходимы для ее собственного развития, а также для развития других естественнонаучных дисциплин.

Анализ современных учебников и учебных пособий показывает, что в них имеется незначительное количество задач, имеющих прикладную направленность, заметим, что содержание многих из них также малоудовлетворительно. Все сказанное означает, что разработка таких задач, методика их внедрения в школу является первостепенной и неотложной задачей. Говоря о политехнизме в обучении геометрии, следует неразрывно соединять элементы прикладной направленности построения курса с профессиональной ориентацией учащихся.-Совершенно ясно, что на уроках геометрии довольно трудно полностью показать учащемуся основной характер и содержание работы человека какой-либо профессии, но показать, как геометрические знания могут быть использованы в работе человека определенной специальности, безусловно, можно.

IV. Одно из центральных мест в решении проблем преподавания геометрии в средней школе является отражение в нем межпредметных связей. Во всех предыдущих разделах мы так или иначе уже затрагивали эти вопросы, поэтому мы ограничимся перечислением тех основных разделов курса геометрии, которые наиболее часто используются при изучении дисциплин естественнонаучного цикла. Достаточно указать на то, что включение темы «Векторы» в курс геометрии 7 класса вызвано тем, что с первых -уроков физики в 8 классе векторы постоянно используются. Говоря об этом, следует отметить, что в настоящий момент вопросы взаимосвязи материала, связанного с изучением векторов курса геометрии и физики, еще полностью не решены. Весьма важным и близким к только что рассмотренному разделу является изучение величин на уроках геометрии и физики. Другие преобразования плоскости, изучаемые в геометрии, также находят свое применение при рассмотрении вопросов курса физики, так в частности, изучение прямолинейного, вращательного и криволинейного движения тесно связано с поворотами и композициями поворотов и векторов.

Весьма тесны связи курса геометрии и алгебры, геометрии и алгебры и начал анализа. Это и применение преобразований плос-

кости к построению графиков, геометрические иллюстрации уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств; изучение тригонометрического материала в курсе геометрии 8 класса и в курсе алгебры и начала анализа в 9—10 классах; изучение площадей и объемов в геометрии и алгебре и началах анализа.

Многие из перечисленных выше проблем находят свое решение (или пути к решению) в статьях настоящего сборника.

Статьи сборника можно условно разбить на две группы. Первые три из .них и последняя посвящены общим вопросам преподавания геометрии в 6—8 классах, остальные — решению более частных методических вопросов. В некоторых из этих статей можно найти обсуждение одних и тех же проблем преподавания геометрии в 6—8 классах, однако решено было оставить этот материал, так как авторы по-разному подходят к их решению.

Остановимся кратко на содержании рассматриваемых в этих статьях вопросов и на возможностях практического применения имеющихся там рекомендаций.

В первой статье В. А. Гусева и С. С. ***Варданяна «Преподавание геометрии в 6—8классах: внутрипредметные и межпредметные связи»*** затрагивается широкий круг вопросов, связанных с изучением планиметрии в школе. При этюм материал статьи затрагивает в основном проблемы внутрипредметных и межпредметных связей этого курса. Рассматривая проблемы внутрипредметных связей, авторы анализируют структуру изложения материала курса геометрии средней школы, используемую в нем символику, взаимосвязь некоторых наиболее важных разделов курса, вопросы формирования понятий, навыки в проведении доказательств теорем, взаимосвязи во введении и использовании аксиоматик плфскости и пространства и т. д. Менее детально рассматривается проблема межпредметных связей. Авторы выделяют взаимосвязи планиметрии с алгеброй, с алгеброй и началами анализа, останавливаются на системе прикладных задач, обеспечивающей в той или иной мере решение проблем межпредметных связей, затрагивают некоторые аспекты связей геометрии и физики.

В статье Г. Г. Масловой ***«Пути повышения эффективности урока»*** ставится важный для школы вопрос — поиск путей эффективности обучения, в частности нормализации нагрузки учащихся. В статье предложены конкретные рекомендации по устранению имеющихся существенных недостатков в организации учебного процесса.

В статье Ю.М. Колягинаи Д. С. Зейналова «***Вопросы методики применения задан в обучении геометрии***» формулируются важнейшие требования к отбору системы задач при изучении программного материала. При этом авторы показывают роль, место и функции задач в обучении, их развивающее и воспитательное значение. *

В статье Г. И. Саранцева *«О* ***методике решения планиметрических задач»*** рассматриваются эффективные методы обу-

чения учащихся решению задач. Автором разработан метод поэлементного формирования умений в применении геометрических преобразований, векторов и координат к решению задач.

В статье А. М. Абрамова «***Начальные понятия геометрии***» дается анализ системы аксиом курса школьной геометрии, предложенной академиком **А.** Н. Колмогоровым, обосновываются основные факты, освещаются вопросы, вошедшие в учебное пособие. В этой статье рассматриваются все аксиомы, кроме аксиомы подвижности, которая не входит в обязательный для учащихся материал. Эта аксиома и следствие из нее обсуждаются в другой статье сборника того же автора «***Аксиома подвижности и ее следствия».***

В статье В. А. Гусева, Ю. М. Колягина, Г. Л. Луканкина, Д. И. Хана«***Векторы и их применение к решению задач»*** рассмотрен весь круг вопросов, связанный с введением и использованием векторов в курсе планиметрии. Здесь рассматриваются все операции над векторами на плоскости, методика решения задач с использованием векторов, а также система таких задач. В статье затронуты некоторые вопросы, не входящие в программу 6—8 классов (скалярное произведение векторов, перемещение векторов). Однако учителю, работающему в 6—8 классах, необходимо представлять весь векторный аппарат на плоскости, так как ученик должен быть к нему подготовлен, тем более что в старших классах векторам на плоскости уделено мало внимания.

В статье 3. А. Скопеца и Л. И. Кузнецовой ***«Избранные вопросы теории преобразований подобия плоскости и ее применение к решению задач»*** дан обширный материал по преобразованиям подобия плоскости, расширяющий и углубляющий знания учителя по данному вопросу. Как известно, в школьных программах мы знакомим учащихся лишь с одним преобразованием подобия — гомотетией. В статье показано, как это преобразование может активно работать при решении геометрических задач.

Заключает сборник статья Р. *А. Хабнба «К* ***проблеме формирования знаний учащихся о логическом строении школьного курса математики».***

Совершенно ясно, что-статьи одного сборника не могут полностью охватить все проблемы преподавания геометрии в 6—8 классах средней школы. Вместе с тем в них имеется, с нашей точки зрения, ценный материал для учителя, позволяющий ему повысить свою общую математическую подготовку и получить полезные рекомендации для практической деятельности в школе.

Составитель сборника и авторы статей приносят свою глубокую благодарность академику *А. Н. Колмогорову,* который сделал ряд существенных замечаний', а также рецензентам: профессору *И. М. Яглому,* методистам *Ф. М. Барчуновой* и *Ю. П. Дудницину,* учителю *В. Л. Кронгаузу,* чьи предложения и замечания способствовали улучшению содержания и оформления книги.

В. А. Гусев

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В 6—8 КЛАССАХ; ВНУТРИПРЕДМЕТНЫЕ И МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ

В. А. Гусев,
С. С. Варданян

На современном этапе развития науки весьма заметна дифференциация знаний, порождаемая быстрым накоплением многообразных научных фактов, углублением исследовательского процесса, индустриализацией научных исследований и стремительным увеличением численности научных работников.

Но наряду с этим явлением развивается и противоположный процесс — интеграция знаний. Предметом наук в настоящее время считают не только отдельные формы движения материи, но и их связи и взаимодействия.

Изучение математических понятий и методов, их применение на практике требуют знания не только различных разделов математики, но и соответствующих разделов смежных наук — физики, черчения, астрономии, химии, географии и др. Разрозненное преподавание предметов естественнонаучного цикла ведет к формированию метафизических представлений у школьников.

В новых учебных планах и программах, вводимых в практику работы советской школы, большое внимание уделяется научности и систематичности обучения, т. е. такому построению учебного плана и учебно-воспитательного процесса, которые обеспечивают формирование у школьников общей естественнонаучной картины мира. «При изучении общих научных понятий в курсах физики, математики и химии рекомендуется согласовывать глубину раскрытия их содержания и преемственность изложения в различных учебных предметах», — говорится в объяснительной записке к переработанным программам средней школы (Математика в школе, 1978, № 4).

Высший уровень систематизации знаний учащихся может быть достигнут только при *осуществлении межпредметных связей*, под которыми мы понимаем возможность и необходимость использования знаний, приобретенных учащимися при изучении одних учебных дисциплин; *комплексное применение* приобретенных знаний для выполнения разного рода практических задач; возможность полноценной подготовки гражданина коммунистического общества, способного к целостному познанию законов природы.

Известно, что прочность и практическая значимость приобретенных знаний зависит и от того, насколько они применяются не только в этой области, где эти знания приобретены, но и в различных ситуациях других областей наук. Учащиеся при этом убеждаются в том, что сила научного знания заключается не только в логических построениях одной области знаний, но и в универсальности фундаментальных положений науки.

Особенно возросло политехническое значение межпредметных связей в современных условиях, когда любому специалисту необходимо опираться на достижения смежных областей знаний.

В настоящее время в средней школе некоторые вопросы, идеи, даже приборы рассматриваются по нескольку раз при изучении разных предметов. Правильное установление межпредметных связей исключает дублирование учебного материала различными предметами естественнонаучного цикла, что может дать значительную экономию учебного времени.

Можно выделить три вида связей:

а) Связь между учебными предметами, заключающаяся в размещении отдельных тем программы в определенном порядке, не нарушающем стройность и логику данного предмета, и учитывающая необходимость использования полученных учащимися знаний при раскрытии новых тем смежных предметов, — так называемая понятийно-временная связь.

б) Связь, предусматривающая использование знаний учащихся по другим смежным предметам для осуществления единого подхода к формированию общих понятий, умений и навыков, — так называемая объединяющая связь. При установлении такого вида связей предусматривается рассмотрение отдельных вопросов в комплексе.

в) Связь, когда на начальном этапе формирования понятия при изучении какого-либо учебного предмета дается ориентация на наиболее глубокое усвоение этого понятия при изучении других смежных учебных предметов в будущем, — так называемая дополняющая связь.

Новое содержание школьного курса геометрии поставило много проблем как при изучении самого этого курса, так и при использовании геометрического материала в смежных дисциплинах.

Так, говоря о временно-понятийной связи и дополняющей связи курса геометрии, следует выделить так называемые внутрипредметные связи, которые решают проблемы согласования используемой символики, распределения учебного материала по главам и классам. С другой стороны, все три вида связей находят свое использование при согласовании изложения курса геометрии с другими математическими и естественнонаучными дисциплинами.

Все сказанное свидетельствует о том, что изучение внутрипредметных и межпредметных связей курса геометрии 6—8 классов является весьма актуальным. В особенности это актуально сейчас,

когда перед школой поставлены новые серьезные задачи по совершенствованию процесса обучения всем предметам, в том числе и геометрии.

§ 1. Основные этапы обучения геометрии в средней школе

Многие трудности в преподавании геометрии по новой программе связаны с плохой ориентацией учителей во всем объеме геометрического материала, изучаемого в средней школе. Современные требования к математическому образованию, новые методы изучения различных вопросов школьной математики превратили школьную математику, в частности геометрию, в сложную, многоэтапную систему, каждое звено которой выполняет свойственные только ему функции, взаимодействует с другими звеньями, оказывает серьезное влияние на формирование мировоззрения учащихся.

Созданные в настоящий момент программы, учебники и учебные пособия позволяют вычленить четыре основных этапа в обучении геометрии в средней школе.

Первый включает 1—3 классы, второй — 4—5, третий — 6—8 и четвертый — 9—10 классы средней общеобразовательной школы.

В 1—3 классах происходит формирование у учащихся первых геометрических представлений. Особое внимание при этом уделяется вычерчиванию, вырезыванию различных фигур, распознаванию фигур на чертеже и в окружающей обстановке, выполнению простейших измерительных работ. Уже на этом этапе происходит первая подготовка к пониманию учащимися роли определений, однако задача поисков и формулировки определений еще не ставится.

На втором этапе, в 4—5 классах, расширяется круг рассматриваемых геометрических фигур, их свойств, появляются первые определения. Общий индуктивный уровень изложения на этом этапе еще сохраняется, но появляются и дедуктивные умозаключения.

В учебном материале 4—5 классов значительное место уделяется пропедевтике перемещений фигур на плоскости, решению задач на построение, проведению доказательств, что должно обеспечить успешное изучение систематического курса геометрии.

Третий этап обучения геометрии — систематический курс планиметрии в 6—8 классах.

Переход к такому систематическому изучению курса геометрии естественным образом должен быть с новых позиций связан с повторением и объединением основных фактов, усвоенных в предыдущих классах.

Курс геометрии 6—8 классов по новым программам существенно отличается от традиционного. Перечислим некоторые основные особенности этого курса:

1) Логическое строение курса.

Современный курс геометрии 6—8 классов строится на основе аксиоматики, предложенной А. Н. Колмогоровым и состоящей из 12 аксиом. Основным отличием этой аксиоматики от традиционных изложений планиметрии является использование в качестве одного из неопределенных понятий понятия «расстояние». Построение геометрии в 6—8 классах хотя и базируется на четкой аксиоматике, но не является строго аксиоматическим. Далее будет сказано о той работе, которая должна проводиться в этом отношении. Большое внимание при обучении планиметрии уделяется привитию учащимся умений и навыков в определении понятий и в проведении доказательств теорем.

2) Теоретико-множественный подход.

Планиметрия строится, исходя из определения фигуры как произвольного множества точек. Этот подход приводит к активному использованию в курсе геометрии 6—8 класса теоретико-множественного языка и символики, что позволяет ввести в курс школьной геометрии современный математический язык.

Теоретико-множественный подход привел к введению в школьный курс геометрии понятия «конгруэнтность» фигур, обозначений геометрических фигур, четкому разграничению понятий фигуры и величины и т. д. (см. § 2).

3) Отображения в курсе геометрии.

Отличительной особенностью курса геометрии 6—8 классов является широкое использование в нем идеи функциональной зависимости. При этом центральное место занимает понятие «отображение плоскости на себя», через которое определяются преобразования плоскости — перемещения и преобразования подобия. Практически нет такой темы курса, где бы не использовались преобразования плоскости.

Многие классйческие теоремы планиметрии получили новые доказательства, использующие те или иные преобразования плоскости. Особое значение уделено решению геометрических задач методом преобразований.

Кроме преобразований плоскости, в курсе геометрии 6—8 классов учащиеся знакомятся с тригонометрическими функциями. При этом как само введение тригонометрических функций, так и некоторые их свойства изучаются с чисто геометрических позиций, не вдаваясь в аналитический характер этих свойств.

4) Использование векторов в курсе геометрии.

Особую роль в курсе геометрии занимают векторы. Первое ознакомление с ними происходит в 7 классе. Это связано не только с нуждами курса математики, но в основном с курсом физики, где с первых уроков в 8 классе векторы находят постоянное применение. Кроме того, векторы тесно связаны с перемещениями на плоскости. Они вводятся как один из видов этих перемещений — параллельный перенос.

Подробный анализ четвертого заключительного этапа (9—10 классы) не входит в задачу данной статьи. Однако здесь мы

перечислим те вопросы курса геометрии, которые закладываются на предыдущих этапах:

1) развитие пространственных представлений;

2) завершение ознакомления учащихся с основами логического построения курса геометрии;

3) продолжение знакомства учащихся с элементами векторной алгебры и с применением векторов к изучению свойств фигур;

4) ознакомление учащихся с перемещениями пространства;

5) знакомство с координатным методом в пространстве;

6) изучение вопросов измерения геометрических фигур.

§ 2. Символика и теоретико-множественный язык геометрии

Составители программ и учебников много внимания уделили выработке единого теоретико-множественного языка и символики, применяемой в обучении геометрии:

1. Теоретико-множественные и логические символы,
2. Обозначения геометрических фигур.
3. Обозначения величин.
4. Обозначения отношений и отображений.

Первый раздел достаточно подробно освещен в литературе и не нуждается в особых комментариях.

Новыми для нашей школы явились следующие три раздела:

Обозначения геометрических фигур

Фигура в геометрии определяется как множество точек, и для оперирования с этими фигурами вводятся соответствующие обозначения:

A, B, C ... — точки
a, Ь, c — прямые
(*AB*) —прямая, проходящая через точки *A* и *B*
a, р, Y — плоскости
(*ABC*) —плоскость, проходящая через точки *A, B, C*
[Л В] — отрезок *AB*
[ЛВ) — луч *AB*
Z- AOB — угол
wCD, - COD— дуга окружности *CD* или дуга окружности *COD*
окр. (О, *г*) — окружность с центром в точке *O* и радиусом *г*
кр. (*O, г*) — круг с центром в точке *O* и радиусом *г*

Обозначения величин

Изучение величин занимает одно из центральных мест в предметах естественно-математического цикла. Методические вопросы изучения конкретных величин, их свойств, а также взаимосвязи при изучении величин — в известной степени трудные вопросы для учителя. О некоторых аспектах этих проблем будет сказано ниже, а вначале перечислим обозначения для величин, встречающихся

в курсе геометрии, которыми следует пользоваться и при изучении других смежных дисциплин:

' $\backslash AB\backslash$ — расстояние от точки A до точки B (или от B до A)

ABC — величина угла ABC

AC — угловая величина дуги AC

S_{ABC} — площадь треугольника ABC

V — объем

a, р, y — углы поворота, углы между лучами, углы между векторами, углы многоугольников

a, b, c — стороны многоугольника

Замечание. Как видно, в обозначении некоторых величин существуют определенные повторения с обозначениями фигур. Эти повторения существовали всегда, и новая программа их не ликвидировала. Кроме этого, говоря об элементах многоугольников, следует иметь в виду, что в курсе существуют определенные «вольности речи», которые позволяют, например, «стороной многоугольника называть и звено его границы, и длину этого звена». (Аналогично для углов многоугольника, радиусов окружности и т. д.)

Следует особо обратить внимание на такие понятия: «угол поворота», «угол между лучами» и «угол между направлениями» (между векторами). Каждая из этих величин определяется как меньшая из величин указанных углов.

■ *Отношения, отображения*

В курсе геометрии часто встречаются понятия, которые при первом ознакомлении учащихся с ними не называются отношениями, это перпендикулярность, параллельность, сонаправленность лучей, равенство, конгруэнтность, подобие и т. д. Однако учащиеся знакомятся с обозначениями этих отношений. Перечислим их:

= — отношение равенства объектов

— отношение конгруэнтности фигур

— отношение подобия фигур

f-t- — отношение сонаправленности лучей

— отношение противоположной направленности лучей

|| — отношение параллельности

J. — отношение перпендикулярности

Перемещения

Ro — поворот вокруг центра O на угол а

Zo — центральная симметрия с центром в точке O

$S[$ — осевая симметрия с осью I

$T, \overrightarrow{a}$ — параллельный перенос (вектор)

Преобразование подобия

Ho — гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k.

Говоря о правилах использования этой символики, следует помнить, что в записи дублировать слова и обозначения следует

лишь в двух случаях — это «расстояние |Л£|»и «вектор $\overrightarrow{a}$». В других случаях, например «прямая $A\ B$», «луч AC» и т. д., дублировать слова и символику не следует. Говоря о перемещениях, мы указали обозначения самих перемещений. Если надо указать образ точки в данном перемещении, то употребляют следующую запись:

$a\ (X) = ?$ — вектор a отображает точку X на точку X_x

$Но\ (X) \sim X_г$ — точка $X_г$ есть образ точки X при гомотетии с центром в точке О и коэффициентом k

Использование символов для обозначения геометрических фигур очень удобно в сочетании с теоретико-множественной символикой, например:

$(A\ B)$ П ICDI = K. —прямая $A\ B$ пересекается с отрезком CD в точке K

$[AC)$ с: a — луч AC лежит на прямой a

$(AD)\ cz\ (ACD)$ —прямая AD лежит на плоскости ACD

(AB) Покр. (О,/?)=—прямая AB пересекает окружность с центром в точке О и радиусом R в точках C и D
$= \{C \setminus D)$

Для всего геометрического материала с 1 по 10 класс указанная символика является единой, чего нельзя сказать о других смежных дисциплинах (например, о физике). Об этом будет сказано ниже.

§ 3. Понятия, теоремы и аксиомы планиметрии

Систематический курс планиметрии построен таким образом, что его разделы, изучаемые в разных классах, имеют весьма ясные связи. Это означает, что каждый следующий раздел базируется на предыдущем материале и развивает его. Часто эти взаимосвязи внешне малозаметны, что затрудняет работу учителя по новым программам.

На протяжении всего курса планиметрии учащиеся знакомятся с элементами аксиоматического построения геометрии: неопределяемыми понятиями, аксиомами, теоремами и т. д. Учащиеся постепенно знакомятся с системой аксиом геометрии: им сообщается 9 из 12 аксиом, а полный список аксиом появляется лишь в 8 классе. И здесь, по-видимому, возникает одна из самых трудных задач — научить учащихся умению видеть необходимость появления той или иной аксиомы и ее дальнейшего использования. В учебных пособиях ознакомление учащихся с элементами аксиоматического построения курса планиметрии проводится постепенно. Аксиомы не перечисляются в начале курса, как это делается при строгом аксиоматическом построении курса, а вводятся постепенно, по мере их необходимости.

В качестве общего методического принципа знакомства учащихся с аксиоматическим методом в курсе геометрии принимается следующий путь: из интуитивных знаний выделяется система основных понятий, указываются взаимосвязи этих основных понятий,

задаваемых в виде системы аксиом; далее после составления списка основных понятий всякое новое понятие, исходя из интуитивных представлений, определяется формально, а после установления системы аксиом всякое новое сконструированное предложение доказывается на базе введенных определений и сформулированных аксиом.

Остановимся на формировании общих представлений о логическом строении курса геометрии. Это прежде всего знакомство учащихся с элементами аксиоматического построения геометрии, как и любой математической теории.

Нельзя считать, что указанный выше методический принцип знакомства учащихся с элементами логического строения геометрии полностью реализуются в курсе геометрии 6—8 классов средней школы. Так, в планиметрии затрагиваются лишь его отдельные стороны, в курсе стереометрии они проводятся более последовательно. Эта работа не может быть проведена на одном уроке или на нескольких. Для успешного усвоения этого сложного момента нужна целенаправленная работа в процессе всею преподавания курса геометрии. Заметим, что эта работа не является самоцелью. Она обеспечивает понимание и усвоение понятий, позволяет приучить учащихся к обоснованности вводимых фактов, к возможности и необходимости проведения доказательств.

Формирование понятий

Анализируя вновь формулируемые понятия, учащиеся должны уметь вычленять входящие в них понятия, которые в свою очередь также должны быть подвергнуты анализу. В процессе изучения систематического курса учащимся необходимо усвоить, что мы имеем дело с неопределяемыми понятиями, а также с понятиями, которым даются строгие определения, и наконец с понятиями, вводимыми описательно без строгого математического определения.

Работа по введению и формированию этих понятий является сложным процессом, пронизывающим весь курс школьной математики, и в частности планиметрии. Существует много понятий, о которых в учебнике явно не сказано, к какому виду они относятся. Так, говоря о неопределяемых понятиях, следует иметь в виду, что мы пользуемся не только четырьмя неопределяемыми геометрическими понятиями: «точка», «прямая», «расстояние», «плоскость», но и другими общематематическими неопределяемыми понятиями, к которым в первую очередь относится понятие «множество». Вторая группа понятий, определения которых даны явно в учебном пособии, является более простой для усвоения, хотя, как уже указывалось, учащиеся должны уметь проанализировать эти определения, выделив при этом входящие в него понятия.

Особенно четко необходимо разобраться в понятиях третьей группы. К ним можно отнести довольно широкий круг понятий: «соответствие», «отношение», «число», «величина», «площадь», «объем», «величина угла», «длина окружности» и т, д. Ни одному из

перечисленных понятий в курсе планиметрии определений не дается. Вместе с тем подавляющее число тем курса планиметрии тесно связано с ними.

Условно эти понятия можно классифицировать так:

а) понятия, относящиеся к обязательному курсу и определения которым будет дано в старших классах;

б) понятия, определения которых можно рассмотреть на факультативных и внеклассных занятиях;

в) понятия, определения которых не входят в содержание классных и внеклассных занятий.

Из определений первой группы особую важность представляют понятия площади и объема. Этот вопрос тем более важен, что данные понятия используются при изучении всех смежных дисциплин (физики, химии, биологии и т. д.).

В курсе планиметрии понятие площади впервые встречается в 7 классе. В теме «Общие сведения о площадях фигур» говорится о площадях многоугольников. Внимание учащихся обращается на то, что площадь многоугольника — это неотрицательная величина, а следовательно, для нее выполняются все свойства величин, рассмотренные в п. 3 учебного пособия для 6 класса под редакцией А. Н. Колмогорова.

-При получении формул для площадей многоугольников в 6—8 классах используются свойства площадей, которые принимаются без доказательства:

L Конгруэнтные многоугольники имеют равные площади.

2. Если многоугольник составляется из непёрекрывающихся. многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников. (Многоугольник составлен из неперекрывающихся многоугольников, если он является объединением этих многоугольников и никакие два из этих многоугольников не имеют общих внутренних точек.)

Кроме этого, без полного доказательства принимается тот факт, что площадь прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле $S = a \cdot Ь$.

В учебнике геометрии 7 класса дан вывод этой формулы в случае, если a и b — натуральные числа.

Таким образом, в курсе планиметрии дается довольно полное аксиоматическое определение понятия площади многоугольника. При этом мы получаем достаточно широкий набор формул для вычисления площадей многоугольников, правда опираясь на недоказанную формулу вычисления площади прямоугольника.

В курсе геометрии средней школы не рассматриваются площади произвольных фигур. Этот вопрос рассматривается лишь в частных случаях. Так, в п. 119 «Площадь круга» дается интуитивный вывод формулы для вычисления площади круга, а в § 65 учебного пособия «Геометрия» для 10 классов под редакцией 3. А. Скопеца «Обобщение задачи измерения объемов, объем цилиндра» рассматривается достаточный для уровня средней школы вывод этой фор-

мулы. О теории площадей произвольных фигур говорится в курсе «Алгебра и начала анализа».

Отметим еще, что учителю следует исключить из обихода такие неудачные выражения, как: «Отрезок примем за единицу длины» или «Квадрат примем за единицу площади». Все это противоречит общему представлению о площади как о величине, поставленной в соответствие некоторой фигуре.

Понятие объема фигуры детально изучается в курсе геометрии старших классов. Однако первое и довольно обстоятельное знакомство с этим понятием происходит в 8 классе. Так, в теме «Общие свойства объема» закладываются представления о самом понятии объема и о способах его вычисления. Приведем основные факты.

Задача состоит в том, чтобы всем многогранникам (а по возможности и другим фигурам) поставить в соответствие определенное число V (Ф) ^ 0, обладающее такими свойствами:

1. Если фигуры $Ф_x$ и $Ф_2$ конгруэнтны, то

$$1/(Ф_1)=^(Ф_2).$$

^ 2. Ес, многогранник Ф является объединением многогранни-
* ков $Ф_x$ и Ф/Г^е имеющих общих внутренних точек, то

$$1/(ф) = 1/_1(ф_1) + У(ф_3).$$

Если фигура Ф есть часть фигуры $Ф_г$ (т. е. Ф — подмноже-
^тв& Ф^, то

$$У = (ф)<У(ф_1).$$

4. Для куба E с длиной ребра e $V(E) = e^3{}_t$

Можно доказать, что при заданной единице длины e эта задача для многогранников имеет одно-единственное решение. Только одним-единственным образом можно каждому многограннику Ф поставить в соответствие число V (Ф) с соблюдением требований 1—4.

В учебном пособии приводится вывод формулы объема прямоугольного параллелепипеда для случая, когда численные значения длин его ребер являются рациональными числами.

В этой трактовке понятие объема истолковывается как число. Такой подход типичен для математической литературы, однако вся работа по изучению чисел и величин, начатая с 6 класса, заставляет нас считать объем неотрицательной скалярной величиной, а число, фигурирующее в приведенном выше тексте, есть численное значение этой величины при выбранной единице измерения.

В старших классах .(§ 55 учебного пособия для 10 класса), говоря об объемах многогранников, формулируются три свойства, указанные выше, исключая свойство 3, про которое говорится, что его можно вывести из свойства 2. Здесь же дается доказательство теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда и развитие этого понятия (§ 65 учебного пособия для 10 класса): класс фигур, для которых определяется и вычисляется объем, расширяется,

т. е. рассматриваются круглые тела — цилиндр, конус, шар, фигуры вращения. При определении объемов указанных фигур формулируются только два свойства:

а) конгруэнтные фигуры имеют равные объемы;

б) если фигура Φ_x содержится в фигуре Φ_2, то объем фигуры Φ_x не больше объема фигуры Φ_2.

Учителю следует понимать: полной теории площадей и объемов в классе рассмотреть не удается и делать этого нет необходимости. Вместе с тем учащиеся получают довольно обстоятельные сведения по этим вопросам уже в восьмилетней школе, где рассмотрены многие вопросы о площадях многоугольников и объемах многогранников.

Говоря о понятиях, отнесенных к группе б), следует прежде всего сказать о понятиях площади и объеме произвольных фигур, которые могут быть полностью раскрыты на факультативных занятиях.

Для иллюстрации понятий третьей группы можно рассмотреть, например, определение понятия «величины угла». Прежде чем рассмотреть это понятие, надо заметить, что само понятие угла очень многопланово и пронизывает практически весь курс геометрии. Определение угла можно трактовать по-разному: как объединение двух лучей, как аргумент тригонометрических функций, как объединение двух лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости. В учебном пособии по геометрии угол как геометрическая фигура определяется в последнем смысле. Однако мы имеем дело и с понятиями угла в иных смыслах — угол между лучами, угол между направлениями, угол поворота, двугранный угол, линейный угол двугранного угла, плоский угол, трехгранный угол и т. д. Отметим основное различие, которое всегда следует иметь в виду: угол — геометрическая фигура и угол — величина. Так, в частности, угол между лучами, угол между направлениями, угол поворота — величины. Отдельно следует сказать об углах треугольников и четырехугольников, где, говоря «угол треугольника» или «угол четырехугольника», мы подразумеваем и его величину, и соответствующую фигуру. Но не только это надо понимать, оперируя с углами. То определение угла, которое дано в учебном пособии для 6 класса под редакцией А. Н. Колмогорова, базируется на понятиях «область» или «часть плоскости, ограниченной двумя лучами», введение которых само по себе не просто (см. статью А. М. Абрамова).

Система аксиом

В начале этого параграфа указывалось, что курс планиметрии базируется на системе аксиом. В сборнике имеются статьи А. М. Абрамова, в которых дается анализ этой системы аксиом, а также рассмотрены наиболее важные следствия из них. В этом пункте мы коротко остановимся на методических особенностях использования системы аксиом в курсе планиметрии.

Можно сформулировать следующие три аспекта, которые следует иметь в виду, когда мы говорим о методике использования системы аксиом при изучении курса геометрии:

1. Причины появления той или иной аксиомы.
2. Место аксиомы в логическом построении курса.
3. Моменты использования аксиом в доказательстве утверждений.

Говоря о причинах появления аксиом, мы имеем в виду, что аксиомы являются косвенными определениями неопределяемых понятий курса. Так, в частности, группу аксиом принадлежности можно рассматривать как косвенное определение неопределяемого понятия прямой. Кроме этого, эти аксиомы решают вопрос существования прямой и существования точек на прямой. Аналогично аксиомы расстояния являются косвенным определением неопределяемого понятия «расстояние».

* В указанной выше статье А. М. Абрамова подробно анализируется роль и место аксиомы подвижности плоскости в курсе планиметрии. Можно сказать несколько слов о роли и месте аксиомы параллельных в курсе планиметрии.

Одной из теорем, которую можно доказать, опираясь на одиннадцать аксиом (без аксиомы параллельных), является такое утверждение: «Центрально-симметричные прямые параллельны», откуда следует, что через любую точку A можно провести прямую, параллельную данной прямой р. Именно это следствие решает вопрос о существовании прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку.

Но без новой аксиомы нам не удалось бы доказать, что такая параллельная существует только одна. Прихбдится ввести еще одну аксиому — аксиому параллельных.

Через точку A проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой р.

Аксиома параллельных появляется в курсе планиметрии довольно поздно. Все теоремы, помещенные в учебном пособии до этой аксиомы, могут быть строго доказаны, опираясь на одиннадцать других аксиом.

Вопросы использования аксиом при доказательстве теорем являются весьма тонкими и сложными. При проведении доказательств мы далеко не всегда следим за моментами применения той или иной аксиомы, которые в силу их очевидности при доказательстве не оговариваются. Это относится, например, к использованию аксиом расстояния и аксиомы параллельных, ссылки на которые не всегда делаются в процессе доказательств. В следующем разделе мы остановимся на этом вопросе подробнее.

Доказательство теорем

Говоря о выполнении логической схемы построения курса, следует указать на еще один чрезвычайно важный в математическом образовании учащихся момент — проведение доказательств теорем.

Сам вопрос о проведении доказательств математических утверждений весьма многогранен: это само *понятие «доказательство», формы и методы* проведения доказательств, *правила логического вывода*, *воспитание потребности* к проведению доказательств и т. д. Охарактеризуем ниже те утверждения, с которыми приходится иметь дело учащимся в 6—8 классах, а также те основные требования, которые учитель должен предъявлять к доказательству теорем.

Теоремы, которые встречаются в курсе геометрии 6—8 классов, как и понятия, можно условно разбить на три группы:

1. Теоремы, которые явно доказываются внутри курса.

2. Теоремы, доказательство которых в учебнике не приводится, но они могут быть' предложены интересующимся учащимся.

3. Теоремы, доказательство которых не входит в школьное математическое образование.

Во всех трех случаях важно одно.— и учитель, и учащийся должны их видеть в прочитанном тексте, не считаясь с тем, к какой из групп может быть отнесено их доказательство. Это категорическое требование относится к завершающему этапу обучения геометрии, но о нем следует постоянно помнить и стараться выполнять.

При проведении доказательств теорем следует обращать серьез-
. ное внимание на обоснование каждого его шага. Приведем текст доказательства теоремы о пропорциональных отрезках из учебного пособия для 7 класса.

«Рассмотрим гомотетию с центром О, при которой точка A отображается на точку В. При этой гомотетии прямая OA_1 отображается на себя, а прямая AA_X— на параллельную ей прямую, проходящую через точку B, т. е. на прямую BB_1 (по условию *(AAJ || || {BB]))*. Поэтому образ точки $A_г$ — точка B_v Но при гомотетии с коэффициентом k расстояния между точками изменяются в отношении \k\. Значит, \ OB\ = |£| |ОЛ|и |ОВ$_x$| =s \k\ \ OA_x\, откуда \OB\ : |ОЛ| = |ОВJ : |ОЛ$_x$| и

$$10Л_X1 :\backslash ОЛ1 = I\ ОВj.\ 1:\ [\ ОВ\ 1».$$

Выделим основные шаги в данном доказательстве и проведем их обоснование.

1. При данной гомотетии прямая $0A_X$ отображается на себя.

2. При этой же гомотетии прямая AA_t отображается на параллельную ей прямую, проходящую через точку В.

3. Прямая $AA_{,L}$ отображается на прямую $BB_г$.

4. Образом точки A_t является точка B_v

5. При гомотетии с коэффициентом k расстояния между точками изменяются в отношении k.

Справедливость первого шага вытекает из свойства гомотетии ... (п. 63 учебного пособия «Геометрия, 6—8» под редакцией А. Н. Колмогорова), второй шаг следует из свойства гомотетии (см. тот же пункт). Тот факт, что прямая AA_X отображается именно на прямую ВВ$_X$, является следствием аксиомы параллельных, в силу этой

единственности точка $A_г$ отображается на точку $B_г$. Справедливость пятого шага следует из свойства гомотетии.

Учителю не всегда удается проводить такой анализ на уроках геометрии. Да это и не всегда нужно делать. Со временем учащийся не сможет иначе проводить доказательства теорем. Таким образом, ‘ работа по привитию учащимся навыков в проведении доказательств должна быть распределена практически по всем урокам геометрии.

Мы не будем подробно останавливаться на примерах теорем второй и третьей групп, так как некоторые из них уже упоминались выше.

§ 4. Согласование изучения планиметрического и стереометрического материала

Взаимосвязи в изучении планиметрии и стереометрии включают в себя многочисленные вопросы. Частично они перечислены в § 1 настоящей статьи. Рассмотрим подробнее вопросы согласования новых для средней школы разделов: аксиомы геометрии и преобразования плоскости и пространства.

В проблеме согласования системы аксиом курса планиметрии и стереохметрии сложность заключается вовсе не в том, что аксиомы иногда внешне отличаются или развивают одна другую. Основной проблемой является воспитание у учащихся чувства единой логической системы, начатой в восьмилетней школе и продолжающейся в старших классах. Как уже указывалось, в курсе планиметрии не рассматривается полный список аксиом, правда, не известными для учащихся являются только три аксиомы, из которых аксиома подвижности со своими применениями не очень проста. Вместе с тем в 9 классе аксиомы планиметрии считаются известными. Это и заставляет задуматься над методической стороной стыковки этого материала.

Первой основной идеей, которую должны усвоить учащиеся, является включение аксиоматики плоскости в аксиоматику пространства. При этом каждая группа аксиом (их в пространстве также пять, хотя внешне это не так) устроена по-своему. Иногда это просто те же аксиомы, иногда несколько видоизмененные, а иногда и совершенно новые, каких в планиметрии не было.

Проанализируем систему аксиом стереометрии.

Первая группа аксиом пространства — аксиомы принадлежности. Их в пространстве 5. Последние 3 из них (аксиомы 3—5, см. учебное пособие «Геометрия, 9» под редакцией 3. А. Скопеца) можно считать'новыми, они не входят в аксиоматику плоскости, хотя первое представление о них имеется в стереометрическом материале учебного пособия «Геометрия, 8» под редакцией А. Н. Колмогорова.

Уже чисто внешнее сравнение остальных аксиом принадлежности позволяет увидеть их большое сходство. Во-первых, они

утверждают, что прямая и плоскость (неопределяемые понятия) существуют и являются фигурами, содержащими по крайней мере по одной точке, а во-вторых, что они являются подмножествами пространства. Кроме этого, из этих аксиом следует, что вне любой плоскости в пространстве есть не принадлежащая ей точка. Аналогично и для каждой прямой есть не принадлежащая ей точка.

Из сформулированных аксиом стереометрии в учебном пособии «Геометрия 9» под редакцией 3. А. Скопеца следующие три аксиомы (6—8) являются аксиомами расстояния. Внешне они полностью совпадают с аксиомами расстояния планиметрии. Может сложиться впечатление, что эти аксиомы можно и не формулировать, а просто сослаться на соответствующий материал курса планиметрии и, кроме того, что эти аксиомы можно доказать, используя все другие аксиомы стереометрии. .-

В книге для учителя «Геометрия в 9 классе» под редакцией Г. Г. Масловой показано, что эти аксиомы для пространства необходимо сформулировать отдельно.

Особое место в системе аксиом стереометрии занимает последняя аксиома — 9: «Для каждой плоскости выполняются известные из планиметрии аксиомы порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых». Как видно, содержание этой аксиомы чрезвычайно широко. Во-первых, следствием ее и других аксиом является полное перенесение всех фактов планиметрии на любую плоскость пространства. Во-вторых, из этой аксиомы следует, что прямые и плоскости в пространстве содержат бесконечное множество точек, а следовательно, и пространство содержит бесконечное множество точек.

Знакомя учащихся с аксиомой 9, следует иметь в виду, что они не знают аксиому подвижности. В силу ограниченности времени на изучение системы аксиом следует отнести знакомство с аксиомой подвижности к моменту изучения преобразований пространства.

Очень коротко остановимся на преемственности в изучении преобразований плоскости и пространства, которые составляют идейную основу построения всего курса.

Мы ^уже указывали выше на те виды преобразований, которые изучаются на каждом этапе обучения геометрии. Уже сам этот список показывает на значительное пересечение определений в изучении преобразований. Так, например, многие свойства перемещений плоскости и пространства формулируются одинаково, одними и теми же являются определения центральной симметрии, вектора, гомотетии и т. д. Однако не следует забывать и о существенных различиях. Так, свойства осевой симметрии в пространстве существенно отличаются от свойств осевой симметрии плоскости, а поворот в пространстве вокруг точки рассматривать бессмысленно и т. д. Особенно существенные трудности появляются при решении задач с использованием преобразований пространства.

Сформулируем то общее, что есть в преобразованиях плоскости и пространства.

Перемещение на плоскости и в пространстве обладает следую* щими свойствами:

, а) тождественное преобразование есть перемещение,

б) композиция двух перемещений есть перемещение,

в) при композиции трех перемещений выполняется ассоциа* тивный закон,

г) преобразование, обратное перемещению, есть перемещение.

Следовательно, множество перемещений на плоскости, а также множество перемещений в пространстве образуют группу. Разумеется, что этот факт и нижеследующие обобщения доводить до сведения учащихся не обязательно.

При перемещении на плоскости и в пространстве выполняются также следующие свойства:

а) три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, отображаются на три точки A, B, C, также лежащие на одной прямой с сохранением порядка,

б) луч отображается на луч,

в) прямая отображается на прямую,

г) полуплоскость отображается на полуплоскость,

д) фигура отображается на конгруэнтную фигуру.

Кроме этого, при перемещении в пространстве:

а) плоскость отображается на плоскость,

б) две параллельные плоскости отображаются на две параллельные плоскости,

в) параллельные плоскость и прямая отображаются соответственно на параллельные плоскость и прямую,

г) полупространство отображается на полупространство.

Преобразование подобия на плоскости и в пространстве обладает следующими свойствами:

а) тождественное преобразование есть преобразование подобия,

б) композиция двух преобразований подобия есть преобразование подобия,

в) при композиций трех преобразований подобия выполняется ассоциативный закон,

г) преобразование, обратное преобразованию подобия, есть преобразование подобия.

Следовательно, так же как множество перемещений, множество преобразований подобия на плоскости, а также в пространстве образует группу.

При преобразовании подобия на плоскости и в пространстве имеем: *•%

а) три точки A, В и С, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A, B, C, также лежащие на одной прямой с сохранением порядка,

б) отрезок отображается на отрезок,

в) луч отображается на луч,

г) прямая отображается на прямую,

дКпараллельные прямые отображаются на параллельные прямые,

е) угол отображается на конгруэнтный угол,

ж) окружность (круг) отображается на окружность (круг).

Кроме вышесказанного, при преобразовании подобия в пространстве выполняются свойства:

а) плоскость отображается на плоскость,

б) две параллельные плоскости отображаются на две параллельные плоскости,

в) сфера отображается на сферу,

г) сохраняется угол между прямой и плоскостью.

Группа перемещений является подгруппой группы преобразований подобия.

§ 5. Взаимосвязи школьных математических дисциплин

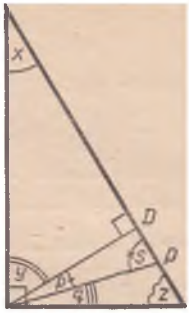
Остановимся на взаимосвязях школьной геометрии с другими разделами школьной математики. Последнее время много говорят об интеграции в обучении математике, т. е. о том, чтобы различные разделы были объединены настолько, насколько это возможно, что была бы ликвидирована точка зрения о геометрии, алгебре и других разделах математики как о совершенно различных разделах школьной математики. Предмет «Геометрия» является одним из связующих звеньев в объединении на первый взгляд разных разделов математики.

В ходе перехода школ на новое содержание математического образования происходили довольно серьезные изменения. Так, например, не стало в школьной математике предмета «Тригонометрия», а тригонометрический материал распределился между курсами геометрии 8 класса и алгеброй и началами анализа 9—10 классов. Очень тесными стали связи курсов геометрии и алгебры в 6—-8 классах. Так, понятие отображения (функции)‘формируется на уроках алгебры, а затем широко используется в геометрии. При этом в курсе геометрии происходит дальнейшее формирование и развитие этого понятия (обратимые отображения, обратные отображения, отображения на себя, тождественное отображение). На уроках алгебры широко стали применяться геометрические примеры для формирования указанных понятий.

Аналогичная работа проводится и при рассмотрении свойств отношений, в частности отношений эквивалентности. Так, в учебнике алгебры первый пример отношений эквивалентности — это отношение конгруэнтности треугольников.

Существенным для изучения обеих дисциплин является проникновение алгебраических методов в геометрию и наоборот. Несомненно, учителю важно овладеть такими методами, а также быть в курсе различных вопросов взаимопроникновения наук.

Геометрические и алгебраические методы часто рассматриваются неразрывно друг от друга. Даже простое использование обозначений углов, площадей, дуг буквами в геометрии часто превращает геометрическое доказательство в выполнение соответствующих алгебраических операций.



Например, на рисунке 1, где ЛВС —ADB= = 90° и \$AB\ — \$AP\, нужно доказать, что [BP] делит пополам Z-CBD.

Введя обозначения для всех рассматриваемых углов, мы получаем следующие равенства:

$$g + 2 = s,$$
$$P + У = s,$$
$$x + г — 90°,$$
$$v + y = 90°.$$

Выполняя преобразования, получаем, что

$$y = z \text{ и } p = g.$$

На рисунке 2, где | ЛВ|=| ЛС[, \ AP\=\/>Q|= = | Q/? | == |В7?| = | ВС I, необходимо избежать разнообразия обозначений величин углов, которые должны быть обозначены через x, $2x$, $3x$, $4x$, чтобы составить уравнение $9x$ — 180°, отсюда x = $20°$. Таким образом находим величину угла при вершине треугольника.

ив|«И

Рис. 2

Алгебраический подход часто делает возможным намного облегчить решение определенных задач. Так, например, в примере, проиллюстрированном на рисунке 3, следует доказать, что

$$4 \text{ I } PQf^2 = | AB \text{ I}^2 + | BD |^2 + | CD \text{ I}^2 + \\ + \backslash AC\backslash^* - \backslash AD\backslash^* — \backslash BC\backslash\backslash$$

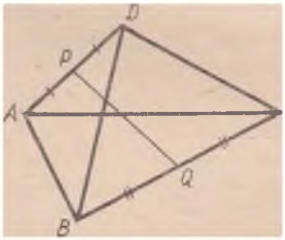


Рис. 3

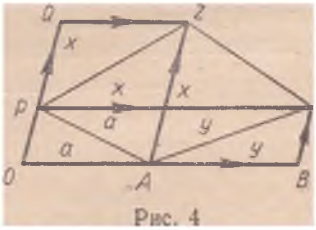


Рис. 4

Рис. 5 Рис. 6

где P и Q — точки, обозначающие середины противоположных сторон четырехугольника. Решение наиболее рационально получается, если мы введем обозначения: |BC| = *2а*, *AC*\ = *2Б*, *AB*\ = *= *2с*. *AD*\ «я *2р*, | *BD*| == *2q*, *CD*\ = *2г*.

Площади также могут быть обозначены буквами, и, следовательно, задачи могут быть превращены в алгебраические. Докажите, если параллелограммы *OBYP* и *OAZQ* имеют равные площади, то *(PA)* параллельна (*ZY*) (рис. 4).

Доказательство. Обозначив площади соответствующих Треугольников через *а, х, у,* условие задачи можно записать так: *2а + 2у* =5 *2а + 2х,* откуда *х — у,* а значит, *а + х — а + у,* что означает, что $S_{APAZ} = S_{APBG}$, откуда *(PA)* || *(ZY)*.

Геометрические задачи, которые сводятся к решению уравнений, можно проиллюстрировать такими задачами.

На рисунке 5 требуется найти радиус большей окружности. Решение этой задачи легко сводится к решению уравнения

$$(г + 2)^2 = (г — 2)^2 + (8 — г)^2.$$

На рисунке 6 требуется найти длину отрезка хорды. Она находится из уравнения $x\ (x + 4) = 81$.

Ясно, что при решении таких задач мы пользуемся фундаментальными фактами геометрии — теоремой Пифагора, теоремой о сумме углов треугольника и т. д. Однако техническая часть решения выполняется с использованием алгебраического аппарата.

Сущность слияния областей математики может быть показана и в следующих примерах.

Задача. В игре «Зарница» участвовало 72% всех школьников города. Из числа участников 60% были мальчики, а остальные, на которых приходилось 9000 человек, — девочки. Сколько школьников не участвовало в игре? >

Данные задачи можно занести в таблицу:

	Участвовало 72%	Не участвовало 28%
Девочки Мальчики	40%—9000 60%—?	

Обычный путь решения — найти количество участвовавших ^9000 • из чего количество неучаствующих может быть вы*

ведено путем умножения на —.[28]

Количество неучаствовавших: $9000 \cdot \frac{100}{40} \cdot \frac{28}{72} = 8750$.

Геометрия может сыграть очень важную роль здесь, объясняя метод пропорции таким образом (рис. 7,а): точка D делит $[BC]$ в отношении 72 : 28; точка E делит $[AD]$ в отношении 60 : 40. Площадь $ABED$ — 9000 см^2. Найти площадь $AADC$. Площадь каждого треугольника на диаграмме представляет группу учащихся (в масштабе: 1 см^2 представляет 1 учащегося):

S_{ABE} — представляет число мальчиков,

S_{BED} — представляет число девочек,

S_{ADC} — представляет число не участвовавших в игре учащихся.

Эту ситуацию геометрически можно представить с помощью прямоугольников или параллелограммов (см. рис. 7, *б)*. Этот квадрат получен из треугольника на рис. 7, *а,* где каждый треугольник BAD и ADC достроен до прямоугольника.

Несомненно, что самым важным в отношении взаимосвязи между геометрией и алгеброй является то, что посредством алгебраической функциональной зависимости можно получить функцию $Y — f\{x)$ или $F\ (x,y) = 0$, исследование которой -приводит к искомому результату.

Доказано, что каждый геометрический результат имеет алгебраический эквивалент. Это одна из самых мощных и удивительных математических способностей «проникновения», самое важное в развитии математических наук.

Например, такая задача: «Отрезок данной длины перемещается так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. При каком положении этого отрезка площадь отсекаемого треугольника будет наибольшей?»

Обозначив катеты образовавшегося прямоугольного треугольника через x и y, сводим задачу к нахождению наибольшего значения функции:

$Цx.y) = \triangle$

Аналогично можно решать и такую задачу: «Какую наибольшую прямоугольную площадь можно ограничить проволокой, имеющей длину 200 м?»

Обозначив стороны прямоугольника через x и у,

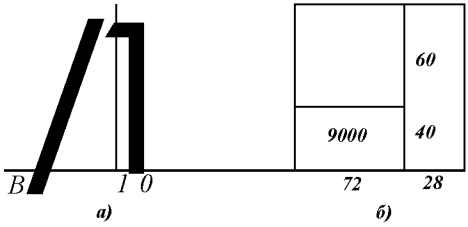


Рис. 7

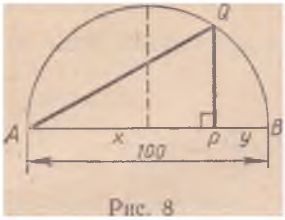


Рис. 8

сводим задачу к нахождению максимума функции /(*x*, *y*)—*x*, у=(100—*x*). Интересно знать то, что, введя параметр *t*, такой, что *x* = 50 *i*, а у = 50 — *x*, получим *xy* = 2500 — *f* -< 2500. Равенство имеет место, если *x* = у == 50.

Пример того, когда геометрическая иллюстрация дает сразу решение, изображен на рисунке 8; *x* + *y* — постоянная величина. Известно, что |PQ|^2 = *PA* • |*PB*\.Спрашивается,при каких *x* и *y* |P<2|^{2}имеем *x* • *y* = *PA* | • *PB*\ =|*PQ|^2, но это произведение максимально, когда jPQ|— осьсимметрии, т. е. *x* = *y*.

Мы ограничились рассмотрением связи геометрических и алгебраических методов, однако здесь применимы и методы математического анализа, и тригонометрические идеи. Такие задачи являются примерами «изопериметрической задачи», которая, вообще говоря, доказывает, что из всех фигур с' данным периметром круг имеет наибольшую площадь.

Родство между вышеописанной задачей и задачей нахождения минимального периметра прямоугольника данной площади очевидно, и кажется, что оптимальная форма должна быть квадратом. Геометрически (рис. 9) *xy* — *OA*\ |OB| = const и *x* + *y*— наименьшая, т. е. хорда *AB* имеет минимальную длину, когда она занимает положение прямой (*PQ*), перпендикулярной прямой *(OC)*, так что *x* = *y*, как и ожидалось.

Аналогично геометрические соображения позволяют получить результат решения следующей задачи: «Прямоугольник имеет данную диагональ, равную 10 см. Найдите его размеры для максимальной площади».

Вписав прямоугольник в окружность и зафиксировав одну диагональ (рис; 10), видим, что максимальная площадь прямоугольника будет, когда точка *B* лежит на оси симметрии *[AC* 1. Алгебраически мы имеем: $(x - y)^2 > 0$, откуда $x^2 + y > 2xy$. Но $x^2 + y^2$ = =в 100, так что *xy* 50, равенство выполняется, когда *x* — *y*.

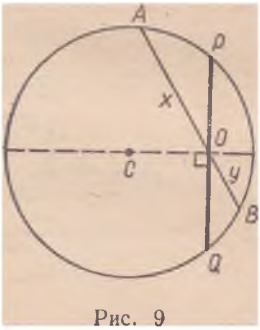


Рис. 9

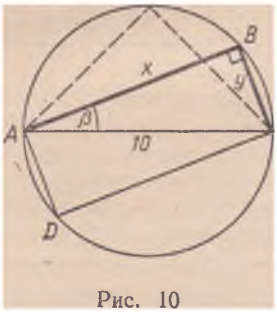


Рис. 10

Тригонометрически xy — 10 cos (5 • 10 sin P = 50 sin 2JJ < 50. Максимум получаем при р = 45°. Ясно, что можно воспользоваться и элементами математического анализа, однако геометрический образ здесь является наиболее убедительным. Заметим, что все эти три простые задачи на максимум и минимум являются вариантами одного факта: > Ya -f b, где а> 0, Ь > 0.

§ 6. Прикладная направленность геометрических знаний

Наиболее сложным и малоисследованным вопросом является проблема межпредметных связей геометрии с дисциплинами естественнонаучного цикла, такими, как география, астрономия, физика, биология, ботаника и т. д. Нет сомнений в том, что велико значение математических знаний при изучении этих дисциплин. Однако если просмотреть материал указанных дисциплин и заданный материал курса математики, то станет ясно, что вопрос о прикладной направленности геометрии остается открытым и ждет своего решения.

Проблема связей курса геометрии с дисциплинами естественнонаучного цикла многопланова. Выделим некоторые пути установления этих связей. При этом следует отметить, что под связями геометрии с дисциплинами естественнонаучного цикла понимается и связь геометрии с жизнью, с практикой.

Остановимся на некоторых взаимосвязях при изучении теоретического, материала курсов геометрии и физики. При изучении курса физики постоянно используется математический аппарат, а на уроках математики мы часто пользуемся примерами из физики, поэтому проблемы согласования терминологии, содержания приводимых примеров и иллюстраций должны быть постоянно в поле зрения учителя.

Острота этого вопроса связана и с новым содержанием математического образования, вводимого в данный момент в наших школах.

К 6 классу учащиеся уже готовы к восприятию фигуры как произвольного множества точек. Само понятие точки для них неопределяемое понятие, они знают, что в случае точки мы абстрагируемся от каких бы то ни было размеров. Вот здесь-то и необходимо подкрепить это обстоятельство реальной практикой, и у физики здесь неограниченные возможности, так как рассмотрение материальной точки, ее поведения — связей ее поведения и самого тела, понятие траектории как множества точек и т. д. — все это совершенно необходимо для изучения самой физики и в то же время это бесценная помощь математикам, так как именно здесь учащимся требуется подкрепление абстракции практической применимостью.

Выше было сказано, что особенностью аксиоматики школьного

курса планиметрии является включение понятия «расстояние» в качестве неопределяемого и введение аксиом расстояния. Понятие «расстояние» широко используется и в курсе физики. При этом в пособиях по физике для обсуждения одних и тех же вопросов используются как понятие «расстояние», так и понятия «путь», «длина пути», «траектория», «длина траектории». Теоретико-множественный подход к изложению курса геометрии сразу резко разграничивает понятия пути и длины пути, траектории и длины траектории, кроме этого, отождествление понятий расстояния и длины пути (длины траектории) возможно только при прямолинейном движении тела, и об этом ученику должно быть четко сказано как на уроках математики, так и на уроках физики.

Особое место в вопросах межпредметных связей курсов математики и физики занимает векторный аппарат. Изучение векторов в 7 классе курса геометрии вызвано прежде всего потребностями курса физики, где векторы начинают активно работать с первых уроков в 8 классе. G другой стороны, появление векторов в середине 7 класса в курсе геометрии позволило активно их использовать и при изучении различных разделов курса геометрии. Так, определение гомотетии дается через операцию умножения вектора на число, свойства гомотетии также получают, пользуясь векторами. В 8 классе вводятся координаты вектора, которые позволяют получить соотношение между элементами в прямоугольном треугольнике и т. д.

Однако активное введение векторного аппарата в курсе математики и физики требует согласования его использования. Прежде всего это связано с определением вектора. Традиционно вектор определялся как направленный отрезок. Теоретико-множественный подход, распространенный сейчас в школьном курсе математики, не позволяет принимать такое определение вектора. На эту невозможность указывают в последнее время и в вузовской литературе.

Естественно, что разные авторы могут давать различные определения вектора, однако было бы чрезвычайно вредно, чтобы эти определения расходились в школьных курсах математики и физики.

В настоящее время мы исходим из определения вектора — параллельного переноса, принятого в учебном пособии по геометрии под редакцией академика А. Н. Колмогорова.

Традиционно сложилась терминология, отождествляющая понятия вектора и векторных величин, которые занимают важное место в курсе физики. Трудно утверждать, что такая «вольность речи» не может иметь места, но во всяком случае об этом должно быть явнб сказано. Учащиеся должны понимать, что, несмотря на то что в учебниках физики написано: сила — вектор, скорость — вектор, однако ни физик, ни математик такие векторы не складывает.

Вектор в математике вводится как свободный вектор, т. е. он может быть отложен от любой точки плоскости. Важно понимать, что математический векторный аппарат может быть с успехом

применен при изучении векторных физических величин и что математику совершенно не интересует конкретный вид этой величины* Выбрав определенный масштаб и зная направление действия величин, к ним можно применить векторный аппарат.

Самым тесным образом примыкает сюда и вопрос употребления понятия «перемещение», которое в данный момент в курсах физики и математики используется в разных смыслах. Весь курс геометрии строится на основе понятия перемещения как отображения плоскости на себя с сохранением расстояний между соответствующими точками, а курс физики нельзя себе представить без понятия перемещения как «направленного отрезка прямой, соединяющего начальное положение тела с его последующим положением».

Вряд ли здесь можно было бы предложить совершенно иные определения и другие названия этим понятиям.

Вместе с тем учитель должен объяснить ученику отличие трактовок понятия перемещения в курсе математики и физики, так как в противном .случае вряд ли можно рассчитывать на усвоение этих понятий учащимися. В качестве возможных пояснений можно указать на то, что перемещение в физике характеризуется лишь парой точек, а перемещение в математике — это отображение всей плоскости, т. е. множество соответственных пар точек.

Говоря о политехнизме при обучении геометрии, следует в первую очередь остановиться на правильном подборе задач, отражающих приложения геометрических фактов, а также над возможностями иллюстрации теоретического материала различными примерами из практики.

Одной из причин «трудности» геометрии для учащихся и быстрого забывания изученного материала является отсутствие на многих уроках живого интереса учащихся к предмету, а также недостаточное внимание учителя к формированию прочных и разнородных ассоциаций изучаемого материала с отдельными элементами их умственной деятельности.

Добиться успешного овладения учащимися курсом геометрии со всеми нюансами его логики и идей можно лишь при условии, когда учащийся убеждается, что знание свойств геометрических понятий с успехом применимо к разрешению многочисленных и разнообразных задач, возникающих в повседневной жизни, в технике, в естествознании.

Рассмотрим теорему, которая имеет интересную трактовку,— теорему о том, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в таком же отношении, в котором находится отношение сторон, образующих этот угол.

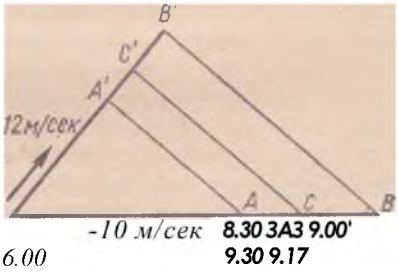


Рис. 11

Рис. 12 Рис. 13

Рассмотрим такую ситуацию.

Два корабля (рис. 11) выходят из точки O в 8 ч и плывут в разных направлениях $O\ A$ и $O\ A'$ со скоростями 20 м/с и 12 м/с. Положения пароходов Л, A' в 8.30 и В, В' в 9.00 показаны на рисунке II, так как скорости постоянные, то точки A *и* A' — середины отрезков $O\ B$ и OB'. Что можно утверждать о [Л Л']. Он параллелен $[BB']$ по теореме о средней линии треугольника. Другими словами, человек, стоящий на первом корабле и видящий второй корабль в направлении северо-запада в 8.30, увидит, что в 9.00 второй корабль будет также на северо-западе. То же самое можно наблюдать в 8.15, в 8.43 $[CC]$ также параллелен $[AA']$ и $[BB']$. Таким образом, *положение* одного корабля, если на него смотреть с другого, постоянно в течение движения двух кораблей, начатого из точки О. Здесь необходимо заметить, что этого не будет в случае, когда они выходят из разных точек (рис. 12), и не будет в том случае, если корабль меняет либо скорость, либо курс.

Теперь повернем корабли в 9,00 и проследим их пути. Они достигнут точек С и С' в 9.17, и ясно, что условные линии, соединяющие два корабля, остаются параллельными в течение их движения до встречи в точке O. Мы замечаем такой факт, что если человек, находящийся на одном корабле, наблюдая за другим кораблем, видит его все время в одном и том же постоянном направлении, то кораблям грозит столкновение.

Теперь мы можем решить, такую задачу о столкновении: «В 11.30 корабль P видит корабль Q в указанном на рисунке 13 положении, и известно, что Q плывет по курсу 75° со скоростью 15 м/с. В каком направлении должен плыть корабль P, чтобы пересечься с кораблем Q, если его скорость 15 м/с?»

Задача решается путем отметки положения корабля Q, например, через час (или в любой подходящий интервал времени) в точке R. Тогда точка R в то же время должна лежать на прямой, проходящей через R и параллельной (QR) (см. текст вначале).

Таким образом, в 12,30 наш корабль должен находиться на этой прямой, а также на окружности с центром в точке *P* и радиусом 25 единиц (в выбранном масштабе). Поэтому направление нужного движения задается лучом *PS* и столкновение, очевидно, случится в точке O, если ни один корабль не предпримет соответствующих действий, чтобы избежать его.
Конечно, если бы корабль *P* заменить торпедой, нацеленной на корабль Q, то наша задача была бы предметом военных учений на море.

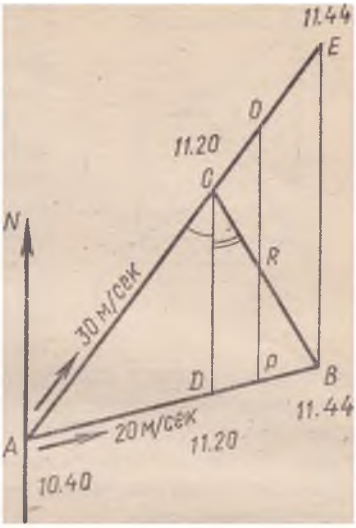


Рис. 14

Теперь мы подходим к теореме о биссектрисе угла. Флагманский корабль выходит из точки *A* (рис. 14) в 10.40 в направлении 80° к северо-востоку со скоростью 20 м/с. Два эскадренных миноносца в этот же момент выходят из точки *A* и идут в направлении *AC* со скоростью 30 м/с.
В 11.44 позиции флагманского корабля и миноносцев — точки В и £ и линия, а соединяющая флашанский корабль и миноносец всегда в фиксированном положении, параллельна *(BE)*. Так, например, в 11.30 позиции кораблей — *P* и Q, а *(P0)* || *(BE)*.

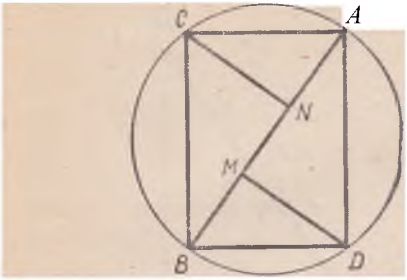
Теперь предположим, что одному из миноносцев приказано вернуться к флагманскому кораблю к 11.4,4, он сделал это в 11.20, изменив курс без изменения скорости, и наконец присоединился к кораблю в отмеченной точке в 11.44. Тогда *CB*\ =|C£| и если точка *D* — положение флагманского корабля в11.20, мы можем легко показать, что *[CD)* — биссектриса угла *AC B*. Расстояния *AC*\ и *CB* \ находятся в том же соотношении, что и | *AD*\ и *DB-b* а именно 5 : 3, т. е. соотношение интервалов времени.

Итак, мы показали возможный вариант интересного прикладного подхода к доказательству одной из теорем планиметрии. В процессе подхода к ее доказательству многие геометрические факты получили прикладное толкование: понятия направления, параллельности, средней линии треугольника, пропорциональность отрезков и т. д. Главное заключается в том, что ученика будет связывать с этой теоремой стратегия поведения миноносца, которая наверняка его заинтересует. Кроме этого, учащиеся получат первоначальные представления о морском деле, о навигации.

Приведем другие примеры прикладных геометрических задач по некоторым темам курса.

Многоугольники

1. При постройке мостов, крыш, подъемных кранов и других сооружений скрепляют опорные брусья или балки так, чтобы они



образовали систему треугольников. Почему такое расположение балок лучше обеспечивает неизменность формы сооружения и ее прочность, нежели иное?

Решение. Балки таких сооружений сами по себе почти не поддаются ни заметному растяжению, ни сокращению длины (сжатию). Под действием внешней силы возможно было бы лишь изменение их взаимного наклонения. Но с тремя сторонами данной длины может существовать только один треугольник, так как все треугольники с соответственно равными длинами сторон конгруэнтны между собой. Поэтому при неизменной длине балок, скрепленных в форме треугольника, хотя бы шарнирами, углы, составленные ими, должны оставаться неизменными. Отсюда постоянство формы всего сооружения, составленного из треугольников, — это так называемое свойство жесткости треугольника.

2. Две точки поверхности океана, лежащие на экваторе (или вообще на дуге большого круга), отстоят одна от другой по дуге на 60° и соединены прямой линией. Проходит ли эта линия целиком в воде или частично расположена под дном океана? (Пусть наибольшая глубина океана не превосходит 10 км.) Какую форму имеет дно этого океана: вогнутую, плоскую или выпуклую? Радиус земного шара взять равным приблизительно 6400 км.

Решение. Первая часть задачи сводится к определению разности между радиусами кругов: описанного около правильного шестиугольника и вписанного в него. Она равна *г* — *]/3* = x X (2 — *V3)* ~ 0,134 ч« 857,6 км. Следовательно, глубина залегания хорды намного глубже дна океана. Отсюда само собой вытекает, что дно океана должно иметь выпуклую форму.

3. Из всех брусьев, какие возможно вырезать из данного бревна, наибольшей прочностью отличается тот, у -которого отношение сторон прямоугольного сечения равно 1 :]/2. На практике профиль такого бруса получают следующим образом: делят диаметр бревна на три равные части и черезточки деления проводят к противоположным сторонам перпендикуляры до пересечения с окружностью; последние точки соединяют с концами диаметра. Доказать: 1) что при этом получается прямоугольник, 2) стороны его относятся как 1 :]/"2.

Решение. Первое ясно из того, что углы *C* и *D* опираются на диаметр и ч?о $BC + BD = BC\ A$ (рис. 15).

Второе следует из соотношения

$$\frac{|BC|^2}{|AC|} \sim \frac{|AB| \cdot |BN|}{|AB| \cdot |AN|} \sim \frac{|BN|}{|AN|}, \quad \text{откуда } |BC| : |AC| = 1 : \sqrt{2}.$$

4. Рабочему дали треугольную металлическую пластинку и предложили составить из нее пластинку прямоугольной формы, допустив при этом только два распиливания. Площадь полученного прямоугольника должна быть равна площади треугольной пластинки. Как надо распилить пластинку?

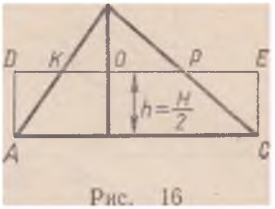


Рис. 16

Р е ш е н и е . Обозначим основание треугольника через *а,* а его высоту через *И* (рис. 16). Имеем:

Если основание искомого прямоугольника принять тоже за а, а высоту его обозначить через /г, то его площадь будет $a \cdot h$.

Зная, что площади этих фигур одинаковы, получим:

$$\frac{a H_и}{} = a\text{-}h, \text{ откуда } n = {}^{и}\_\bullet \; H$$

Итак, искомая прямоугольная пластинка имеет основание, равное основанию треугольника, и высоту, равную половине высоты треугольной пластинки.

Следовательно, для изготовления прямоугольной пластинки распиливаем треугольник по его высоте и по прямой, проходящей через середину этой высоты параллельно основанию треугольной пластинки.

Доказательство, используя рисунок 14, оформить несложно.

5. Граница, отделяющая два земельных участка, заключенных между параллельными межами, идет по ломаной линии *МКС.* Требуется, не изменяя площадей участков, выпрямить границу и сделать ее кратчайшей.

У к а з а н и е . Провести прямую через середины отрезков *МК* и KC_f а потом через середину проведенной прямой провести перпендикуляр к параллельным межам.

6. Земельный участок имеет форму прямоугольной трапеции, основания которой имеют длицу 50 и 30 м, а высота трапеции 20 м. Его нужно разбить на две равновеликие части, поставив между ними изгородь под прямым углом к основаниям трапеции. На каком расстоянии от межи надо поставить изгородь? (О т в е т: 20 м.)

7. Тракторным пятикорпусным плугом (ширина захвата каждого корпуса 35 см) вспахано за смену (8 ч) 5,6 га. С какой скоростью двигался трактор? (О т в е т : 4 км/ч.)

8. Танк легкого типа весит 68 800 н, ширина его гусениц 0,35 м, длина части гусениц, соприкасающихся с грунтом, 2,05 м (с каждой стороны). Какой вес приходится на 1 дм^2 рабочей площади гусениц? (О т в е т : ^ 48& н/дм^2.)

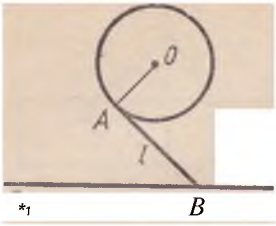


Рис_ 17

Окружность и круг

1. Диск Солнца просматривается с Земли в среднем под углом в 32°. Зная расстояние от Земли до Солнца (150 млн. км), вычислить величину истинного диаметра Солнца.

B_2 Р е ш е н и е . Вопрос сводится к вычислению длины дуги в 32° при радиусе в 1,5 • 10^8 км. Полная окружность такого радиуса равна 2 я • 1,5* 10^8, а длина дуги в 32° равна

glb-5:10.8..-jg. да 1 390 ООО (км).
360-60

Отсюда можно определить поверхность и объем Солнца.

2. Ползун *B* стержневого шарнирного механизма при повороте стержня *AO* вокруг точки *O* совершает поступательное движение вдоль оси $B^{\wedge}B_2$ (рис. 17). Вычислить ход ползуна (путь, который проходит ползун из левого крайнего положения в правое крайнее положение), если радиус стержня *O A* равен г, длина ползуна $\backslash AB\backslash$ = 7, а расстояние точки *O* от оси B_XB_2 равно *h*. (О т в е т: 2 **V(r** + /)^2 – **Ж)**

3. Вычислить наибольшее возвышение водной выпуклости озера над линией, соединяющей две противоположные точки берега, расположенные на расстоянии* 130 км друг от друга (устья рек Вуоксы и Олонки на Ладожском озере). (Ответ: 325 м (выше Эйфелевой башни).)

4. Определить длину бесконечного ремня, перекинутого через два шкива диаметром 1 м каждый, если расстояние между осями 2,25 м и оба шкива вращаются в одну сторону.

Р е ш е н и е. Так как шкивы вращаются в одну сторону, то передача не перекрестная. Поэтому искомая длила ремня равна

2 • ±$_{,l}$ + 2 • 2,25 да 7,64 (м).

5. Наклон почвы не замечается нами, если высота подъема не превышает ~ его основания («заложения»). Сколько приблизительно градусов в угле такого наклона?

Р е ш е н и е . Длину меньшего катета весьма вытянутого прямоугольного треугольника, получающегося при этом, можно без ощутительной погрешности приравнять длине дуги, описанной радиусом, равным другому катету. Задача сводится, следовательно,

к вычислению угловой величины дуги, длина которой равна —

длины радиуса. Из соотношения л; : 360 = ^ : 2*пг* имеем:

6. Длина окружности вала после обработки равна 39,25 см, толщина снятой стружки 0,5 см. Определить длину окружности вала до обработки. (О т в е т : « 42,4 см.)

7. Глубина резания при обработке вала была 1 см, длина окружности вала до обработки равна 78,5 см. Определить длину окружности вала после обработки. (О т в е т : 23 я см « 72,2 см.)

8. На сверлильном станке. производится сверление отверстия диаметром 20 мм, глубиной 80 мм. Определить время сверления, если скорость резания равна 160 мм/с и подача на один оборот— 0,22 мм. (О т в е т : ж 2,38 мин.)

9. Землетрясения распространяются по земной поверхности со скоростью до 800 м/с. Какую площадь может охватить землетрясение через 1 мин после своего возникновения? (Кривизны земной поверхности в расчет не принимать.)

Р е ш е н и е , я • (800 • 60)^2 « 7235 (км^2). Полезно также вычислить величину дуги (в градусной мере), которая при этом расчете принималась за прямую линию, чтобы оправдать приравненные в данном случае длины дуги длине хорды.

10. На заводском дворе, представляющем собой квадрат 70 X X 70 м^2, имеются три прямоугольных строения размерами 20 • 10, 25 • 15 и 30 • 30 м^2, а также два круглых бака диаметром 10 м. Докажите, что на этом дворе мо^кно .еще разбить клумбу диаметром 10 м.

Р е ш е н и е . Центр клумбы может располагаться в любой точке двора, удаленной от забора и от каждого из пяти сооружений не менее чем на 5 м. Такие точки заведомо найдутся, если площадь «внутреннего» квадрата со стороной 60 м, расположенного концентрично забору, окажется больше общей площади всех пяти сооружений и окаймляющих их пятиметровых полос. Эта последняя площадь равна S — Si -f- S_2 -f- ••• -f S_5 -f (l_x ••• 5яX^2, где 5; — площадь *i-го* сооружения, l_t — его периметр *(i* = 1, 2, 3, 4, 5), а я = 5 м. Подставляя сюда данные из условия задачи, проверьте, что 5 < 3540 < 60^2 (м^2). Заметим, что форма сооружений несущественна для решения. Достаточно было бы знать лишь число сооружений, общую площадь, занимаемую ими, и сумму периметров.

11. На каждый квадратный сантиметр площади поршня паровой машины пар давит с силой 8,5 кг. Вычислить полное давление на поршень, если диаметр поршня D = 420 мм. (О т в е т : P =* — 11,77 т.)

12. Из квадратного листа жести со стороной, длина которой равна 20 см, вырезан круг наибольшего диаметра. Найти, какой процент площади листа жести составляют площади отрезков.

Р е ш е н и е . Площадь квадратного листа 400 см^2. Площадь вырезанного круга яг^2 = 314 см^2. Площадь отрезков равна 400— — 314 = 86 см^2. Искомый процент = 21,5%. (Ответ: 21,5%.)

А в А ПЧ,В

Рис. 18 Рис. 19

13. Определить машинное время, необходимое для фрезерования дисковой фрезкой шпоночной канавки длиной 160 мм, если диаметр фрезы 40 мм, скорость резания 31,4 м/мин, глубина резания 8 мм и подача на один оборот фрезы равна 0,75 мм. (О т в е т : *t* да 1 МИН.)

14. Надо заменить трубу с площадью сечения 78,5 см^2 четырьмя трубами одного и того же диаметра так, чтобы площадь сечения четырех труб меньшего диаметра равнялась площади сечения трубы большего диаметра. Найти диаметр меньших труб. (О т в е т : да 5 см.)

15. По окружности требуется разместить центры отверстий для 15 болтов так, чтобы расстояние между ними было равно 30 мм. Какую длину должен иметь радиус окружности? (О т в е т : *R* да 72 мм.)

16. Два прожектора, находящиеся на противоположных берегах озера на расстоянии 12 км один от другого, могут освещать местность в радиусе 10 км каждый. Определить площадь, освещаемую этими прожекторами. (О т в е т: 45 км^2.)

Подобие

1. Паркетная плитка, имеющая форму ромба с диагоналями 30 см и 40 см, окаймлена рамкой, площадь которой равна площади плитки. Определить ширину рамки. (О т в е т : 12(1/2 — 1).)

2. Какой длины должна быть поднога стропильной фермы, если длина стропильной ноги равна 10, а длина ригеля составляет $\frac{}{8}$ от длины затяжки. $[AB]$ — затяжка, $[KL]$ — ригель, $[AC]$ — стропильная нога, [Л/Cl — поднога (рис. 18). (О т в е т : 3,75.)

3. Длина пролета треугольной строительной фермы AB равна d, а уклон $\frac{|CD|}{1}$ равен у Определить длину раскоса DN, если известно, что |LW| = |£W| (рис. 19). (О т в е т: j

4. Уменьшенная деревянная модель проектируемого железного сооружения имеет высоту 20 см^3 и массу 240 г. Сооружение должно иметь высоту 20 м. Определить массу сооружения. Железо тяжелее дерева в 16 раз.

Р е ш е н и е. Сооружение имеет линейные размеры, в 100 раз большие, чем у модели, и, следовательно, объем его больше объема модели в 100^3 раз. Отсюда масса проектируемого сооружения равна 240 X 100^3 x 16 =s 3,84 • 10^9 г — около 3 840 т.

5. Диаметр Солнца больше диаметра Земли в 100 раз. Среднее расстояние от Земли до Солнца 150 000 000 км. Определить длину тени, отбрасываемой земным шаром.

Р е ш е н и е. Длину | CE | конуса земной тени, считая от центра Земли, находим из соотношения

$$\frac{|CE|}{|CS|} = \frac{|BE|}{|AS|} = \frac{1}{109}$$

Обозначим $|CE|$ через X, тогда

$$|CS| = |C£| + |£S| = * + 150\ 000\ 000,$$

Далее получим:

$$\frac{x}{150\ 000\ 000 + *} = \frac{1}{109}$$

откуда $x = \dfrac{150\ 000\ 000}{108} = 1\ 388\ 000.$

Итак, длина земной тени, считая от центра Земли, равна 1 388 000 км.

6. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 0,75 м, а длинное плечо 3,75 м. Как высоко поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого опускается на 0,5 м? (О т в е т: 2,5 м.)

7. Изображение дерева на задней стенке фотографической камеры получилось равным 32 мм. Найти высоту дерева, если оно находится на расстоянии 29 м от объектива фотоаппарата, а глубина фотокамеры 16 см. (О т в е т: 5,8 м.)

8. Параллельно прямой дороге на расстоянии 500 м от нее расположена цепь стрелков, расстояние между крайними стрелками равно 120 м, дальность полета пули равна 2,8 км. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цели? (О т в е т : « 5630 м.)

9. Две параллельные улицы пересечены двумя улицами, выходящими из одной точки A. Части параллельных улиц, заключенные между лучевыми улицами, равны 0,75 км и 1,25 км. Трамвай идет по одной из лучевых улиц от точки A до первой параллельной улицы 15 мин. Сколько времени он при той же скорости будет идти по той же лучевой улице от первой до второй параллельной улицы. (О т в е т : 10 мин.) ,

Метрические соотношения

1. G наблюдательного пункта замечают под углом 63? 30' самолет, пролетающий над башней, высота которой 79,5 м. Прямая, проведенная из того же наблюдательного пункта к верхней точке башни, образует с горизонтальной плоскостью угол 20° 45'. На какой высоте находится самолет? (О т в е т : « 4 2 0 м .)

2. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 20° 45', находится тело массой 40 кг. Определить, с какой силой оно стремится скатиться по наклонной плоскости и какое давление оно производит на эту плоскость. (О т в е т : 14,7 кг; « 37,2 кг.)

3. Силы в 7,25 и 10,3 кг действуют на одну и ту же точку тела под прямым углом друг к другу. Определить равнодействующую этих сил и величины углов, образуемых ею с каждой из составляющих. (О т в е т : ^ 12,6 кг; 36°; « 64°.)

4. Силу, равную 23 кг, требуется разложить на две, составляющие с направлением данной силы углы соответственно 47° и 54°. Определить величину каждой из этих сил. (О т в е т : ^ 19 кг; « 17 кг.)

5. На вершине горы *А* произвели взрыв. Звук взрыва услышали у подошвы горы в точке *К* через 4 сек после взрыва. Определить высоту горы, если из точки *О (ЮЮ* X *[КА\)* ее вершина видна под углом 29° 30', а скорость звука 333 м/сек. (О т в е т : *\ А О* = 660 м.)

6. С вертолета, находившегося над шоссейной дорогой, была замечена двигавшаяся колонна неприятеля. Начало колонны видно было под углом понижения 35°, а конец — под углом 30°. Определить длину колонны, если вертолет находился на высоте 1650 м. (О т в е т : *| ВС|* ^ 500 м.)

7. Поезд идет со скоростью 12 м/с, и пассажиру из вагона кажется, что капли дождя падают под углом 30° к отвесному направлению. Определить среднюю скорость падения дождя. (О т в е т : 21 м/сек.)

8. Движущаяся лестница (эскалатор) Московского метрополитена имеет 170 ступенек от пола наземного вестибюля до пола подземной станции. Ширина ступенек 40 см, высота 20 см. Определить: 1) длину лестницы, 2) угол наклона ее и 3) глубину станции (по вертикали). (Ответ: ^ 76 м; 34 м; ^ 26,°34Л.)

9. Прожектор, расположенный в 1200 м от батареи, обнаружил зенитным лучом (вертикальным) неприятельский самолет, наблюдатель с батареи в то же время увидел этот самолет под углом 25° 17'« Определить,, на какой высоте летел самолет и на каком расстоянии от батареи. (О т в е т : 1567 м, 2810 м.)

10. Механическая пожарная лестница была выдвинута на 50,5 м при предельном угле подъема в 72°. Какой высоты достиг верхний конец лестницы, если ее нижний конец отстоит от поверхности земли на 1 м? (О т в е т: 49 м.)

ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ
Г. Г. Маслова ЭФФЕКТИВНОСТИ УРОКА

В постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду» (1977 г.) подчеркнута необходимость выработки у учащихся навыков самостоятельной творческой работы, воспитания высоких идейно-нравственных качеств, подготовки школьников к жизни, трудовой деятельности, последовательного осуществления принципа органического единства обучения и воспитания.

В связи с этим требуется привести в соответствие с содержанием образования методы обучения и воспитания.

Реализация постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР предполагает осуществление целого комплекса мероприятий, в том числе нормализацию нагрузки учащихся за Счет сокращения учебных программ (исключения излишней информации и второстепенного материала) и через повышение эффективности урока.

Уже с 1978/79 учебного года курс геометрии 6—8 классов несколько сокращен. (См.: О коррективах к учебным программам общеобразовательных школ на 1978/79 учебный год. — Математика в школе, 1978, № 3, с. 9—10. О нормализации нагрузки учащихся. Там же, с. 11 —16.) Из программы исключены отдельные вопросы, не имеющие большого общеобразовательного значения и сохранявшиеся в курсе лишь в силу традиции: теоремы о зависимости между расстоянием хорды от центра, ее длиной и угловой величиной стягиваемой ею дуги (7 класс), теоремы о свойстве углов описанного четырехугольника и о свойстве сторон вписанного четырехугольника и обратные им теоремы (8 класс).

Уменьшено число теорем, которые учащиеся должны уметь доказывать. Это относится прежде всего к теоремам, содержание которых учащимся достаточно очевидно, а их доказательства не имеют ничего поучительного. Например, теоремы о пересечении прямой и окружности, о пересечении двух окружностей, об углах между направлениями, о конгруэнтных отрезках (6 класс).

При пересмотре программы проведен и более четкий отбор материала, впервые включенного в школьный курс математики. При этом

учитывались изменения, внесенные в стабильные учебники 4—5 классов, а именно уже в учебники 4—5 классов введены такие теоретико-множественные понятия, как «пересечение» и «объединение множеств». В связи с этим в 6 классах на уроках геометрии отпала необходимость отводить время формированию этих понятий.

При рассмотрении путей нормализации нагрузки учитывался и характер изложения того или-иного материала в учебниках. Отдельные вопросы, изложение которых было для учащихся трудным и усвоение их требовало неоправданной затраты учебного времени, из обязательного материала были исключены. Именно по этой причине от учащихся не требуется воспроизведения определения ломаной (6 класс), многогранной поверхности (10 класс). Исключено как трудное доказательство теоремы Фалеса, но сама теорема находит широкое применение при решении задач.

Проведен также более тщательный отбор упражнений и задач. Из их числа исключены наиболее трудные, представляющие лишь специальный, а не общеобразовательный интерес. Таким образом, содержание курса приведено в большее соответствие с задачами обучения в общеобразовательной школе.

Освободившееся в результате время можно использовать для более глубокого изучения материала, главным образом для отработки навыков решения задач.

Однако вводимое с 1978/79 учебного года некоторое сокращение программы только часть мероприятий по нормализации нагрузки учащихся. Большая роль в решении этой важнейшей задачи, конечно, принадлежит учителю — центральной фигуре учебно-воспитательного процесса.

Анализ уроков, изучение материалов систематически проводимых проверок знаний и умений учащихся показывает, что при обучении по одним и тем же программам и учебникам результаты нередко оказываются существенно разными. Наблюдается большой разрыв в знаниях не только между учащимися класса при выполнении одной и той же работы, что иногда может быть объяснено какими-то индивидуальными особенностями усвоения материала, но и между учащимися школы, района и т. д.

Каковы же пути повышения эффективности обучения? Это прежде всего повышение методической квалификации учителя. Весьма важно хорошо представлять себе место курса математики, и в частности геометрии, в общей системе школьного образования и принципы его построения, тенденции совершенствования математического образования.

Можно выделить такие основные тенденции совершенствования математического образования в средней школе:

расширение общеобразовательной роли курса математики, в связи с этим включение в курс математики новых понятий и методов, важных как в общеобразовательном плане, так и для проведения профориентационной работы, освобождение курса от устаревшего

и потерявшего свое значение материала при сохранении довольно значительного основного ядра курса;

усиление прикладной направленности школьного курса.

Анализ программы с точки зрения отражения в ней тенденций совершенствования математического образования позволит более целенаправленно вести обучение. Эти тенденции взаимосвязаны. Так, включенные в программу вопросы важны в идейном плане и в прикладном аспекте. Например, свойства преобразований, понятие вектора и элементы векторной алгебры позволяют более «экономно» доказывать многие теоремы, решать задачи (т. е. «обслуживают» собственно геометрию) и^имеют важное прикладное значение. Вместе с тем знакомство на основе этих понятий с общими методами математики весьма ценно и с общеобразовательной точки зрения.

Следует заметить, что указанные выше тенденции проявляются в любой системе школьного математического образования, как в советской школе, так и за рубежом. Однако их конкретное проявление определяется рядом факторов, основными из которых являются политический и социальный строй общества, уровень научно-технического и культурного развития стран, особенности школьной системы образования. Тенденция обогащения школьных курсов математики новыми идеями многими зарубежными педагогами была воспринята как необходимость построения курса в духе Н. Бурбаки. В связи с этим некоторые так называемые «современные» программы по математике весьма формальны и уделяют внимание тонкостям, отвлекающим учащихся от усвоения общих, принципиальных идей. Неверно с наших позиций в этих странах реализуется тенденция повышения общеобразовательной роли курса математики. Так, например, в большинстве капиталистических стран программы, предлагаемые тем учащимся, чья будущая профессия не связана с математикой, включают в основном описательный материал и тренировку в действиях по образцу. Таким образом, повышение общеобразовательной роли курса понимается как значительное уменьшение внимания к сознательности усвоения знаний, к логической культуре школьников, т. е., по сути дела, снижает общеобразовательную роль курса. В условиях капиталистического общества разделение учащихся по потокам, обычно осуществляемое на уровне старших, а иногда и средних классов, связывается с получением профессиональной подготовки. Таким образом, будущее каждого ученика определяется уже в школе на этапе выбора учеником того или иного профиля. Задача подготовки к проддлжению образования и самообразования для этих школьников не ставится.

В нашей школе расширение общеобразовательной роли курса предусматривает повышение теоретического 'уровня изложения, теоретическое обоснование практически важных методов, развитие логического мышления учащихся. Повышение теоретического уровня изложения материала достигается современной трактовкой понятий, использованием современной математической терминологии и символики, строгостью доказательств. Последнее отнюдь

не означает, что весь курс геометрии должен строиться на явно сформулированной системе аксиом, что все теоремы курса и следствия из них должны быть доказаны. Многие из них принимаются без доказательства, однако приводимые доказательства свободны от недомолвок и неточностей.

Усиление прикладной ориентации курса в нашей школе направлено на раскрытие перед учащимися роли математики и в описании и исследовании явлений действительности, роли практики на развитие науки и служит целям формирования у школьников умений и навыков, важных как в повседневной жизни, так и для продолжения образования, содействует подготовке школьников к выбору профессии. Этому способствует увеличение внимания в восьмилетней школе координатному методу, включение в программу элементов векторной алгебры, применение метода и свойств геометрических преобразований к решению задач и доказательству теорем. Следует заметить, что расширение внимания к изучению математических методов, применение их к решению задач способствуют реализации политехнического принципа в обучении математике. (См.: Семушин А. Д. Политехническое содержание школьного курса математики. — Математика в школе, 1977, № 4, с. 20—26.)

Расширение целей среднего образования, в том числе математического, оказало существенное влияние на систему принципов построения школьного курса математики. К ним относятся:

построение курса на основе небольшого числа опорных понятий, группировка всего материала вокруг системы этих понятий и обеспечение на этой основе внутрипредметных связей. Оптимальным проявлением этого принципа явилось бы создание единого (интегрированного) курса математики без его деления на отдельные предметы (как уже это сделано в 4—5 классах);

сдвиг изучения значительного числа вопросов традиционного материала в более младшие классы, достаточно раннее введение математической терминологии;

выделение различных уровней усвоения материала, формирование понятий и навыков на простом и доступном материале в течение достаточно длительного времени, постепенное усиление роли доказательств и формализация материала, расширение педагогических функций упражнения.

Эти принципы должны учитываться в повседневной работе каждого учителя.

Рассмотрим примеры:

1. Опорными понятиями курса являются множество, отношение, число, величина, высказывание. На их основе формируются остальные понятия курса. Это позволяет с единой точки зрения рассматривать, например, такие вопросы, как функция в алгебре и преобразования в геометрии и т. п. Связь между различными понятиями курса, таким образом, уже заложена в программе и в учебниках, но раскрыть ее для учащихся — одна из задач учителя.

2. Выделение различных уровней усвоения материала нашло отражение и в учебниках. Если прежде фактически весь материал учебника считался обязательным для изучения, то в современных учебниках наряду с текстом, которые ученики должны знать, включен довольно большой описательный материал, исторические экскурсы, пояснительный текст. В связи с этим, например, в 8 классе понятия о перпендикуляре к плоскости (п. 122), об ортогональном проектировании (п. 123), об общих свойствах объемов (п. 125) разъясняются на моделях. Определение этих понятий и воспроизведение свойств объемов от учащихся не требуется. Кроме того, в учебники наряду с обязательными включены задачи повышенной трудности.

Изучение опыта школы работы свидетельствует о том, что иногда нарушаются указанные выше принципы — от всех учащихся, например, требуется умение решать все задачи, помещенные в учебнике, хотя отдельные из этих задач предназначены лишь для учащихся, которые проявляют повышенный интерес к изучению математики. Возникает искусственная перегрузка школьников.

Анализ передового опыта позволяет выделить наиболее характерные черты современного обучения математике:

активизация и постепенное усиление познавательной деятельности учащихся на всех этапах обучения от класса к классу;

воспитание в процессе обучения;

подготовка учащихся к восприятию нового, способствующая более полному его усвоению;

внимание к использованию трансформированных для школы методов научного познания: наблюдение, эксперимент, абстрагирование, обобщение, выдвижение гипотез и их проверка;

моделирование содержания понятий и приемов доказательства теорем;

более глубокое проникновение в сущность понятий и раскрытие связей и отношений между понятиями;

развитие творческого мышления учеников на основе глубокого усвоения ими программного материала;

учет индивидуальных особенностей и склонностей учащихся;

целенаправленная организация самостоятельной работы с учетом индивидуальных особенностей учащихся;

обеспечение систематической связи «ученик—учитель» и своевременное внесение на этой основе корректив в общий процесс обучения.

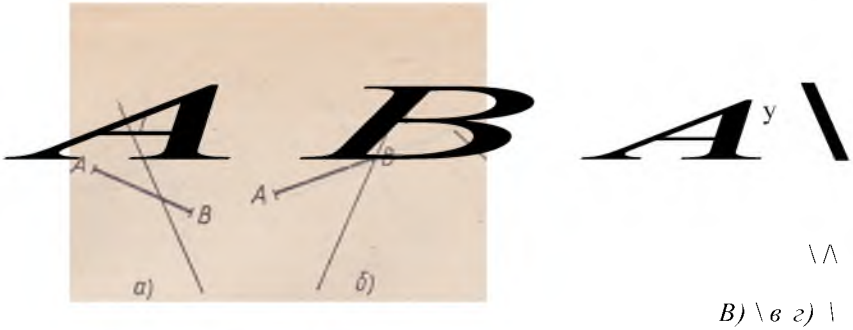
Все эти особенности современного обучения непосредственно влияют на повышение эффективности урока. Однако изучение опыта работы школы показывает, что возможности повышения эффективности обучения используются еще не в полной мере, а потому проблема отыскания путей дальнейшего повышения эффективности урока сохраняет свое первостепенное значение.

Естественно, что в рамках этой статьи нет возможности рассмотреть весь комплекс вопросов, связанных с решением данной задачи. Остановимся только на некоторых из них. *

В рекомендациях секции «Совершенствование учебно-воспитательного процесса в общеобразовательной школе» Всесоюзного съезда учителей в июне 1978 г. подчеркивалась необходимость добиваться того, «чтобы каждый урок обеспечивал школьникам глубокое овладение основами наук, вырабатывал у учащихся практические умения и навыки, формировал коммунистические черты личности. При объяснении учебного материала, при закреплении знаний и опросе концентрировать внимание школьников на главных, наиболее существенных моментах содержания учебного материала». На что в этом плане следовало бы обратить внимание при изучении геометрии в восьмилетней школе?

В ряде случаев недостаточно отрабатываются на уроках некоторые элементарные умения, важные для дальнейшего изучения материала и входящие в перечень обязательных (причем эти умения не всегда связаны с новыми вопросами программы, а нередко относятся к ее стабильному ядру, и школа в большинстве случаев имеет достаточный опыт обучения этому материалу). Результаты такой недоработки сказываются впоследствии: приходится возвращаться к тому, чем уже должны были бы овладеть ученики. На это уходит время, не предусмотренное программой. В итоге возникает перегрузка. Например, большое число ошибок ученики допускают при построении высот треугольника (главным образом прямоугольного и тупоугольного). Причем ошибки такого рода носят устойчивый характер. Они отмечались как массовые при проверках, проводившихся в 50—60-е гг. в 6—10 классах. Причина этих ошибок, конечно же, не в трудности материала, а в том, что при введении понятия высоты треугольника учащимся 6 класса не предлагаются задачи на фактическое построение высот (хотя бы от руки). В результате практическое умение строить высоты оказывается не сформированным. Можно было бы, конечно, отработать навык построения высот при рассмотрении перпендикуляра к прямой (при различных случаях ее расположения).

Почти так же обстоит дело и с понятием осевой симметрии. Многие пятиклассники не могут решить такую элементарную задачу, как построение отрезка, симметричного данному относительно оси (при произвольном их расположении), и не потому, что ученики ошибаются в проведении через данную точку перпендикуляра к данной прямой, а потому, что пятиклассники (а позже и шестиклассники) не видят, как должен быть расположен отрезок,симметричный данному относительно данной прямой. И если в предыдущем примере нужно было обратить внимание на фактическое проведение высот треугольника, то в данном случае хорошим средством формирования у пятиклассников представления э симметричных отрезках является, например, такое упражнение. На листе бумаги изображены отрезок $A\ B$ и некоторая ось симметрии (рис. 1, а, б, в). Ученику даются стержни такой же длины, что и отрезок на чертеже, и предлагается поместить их на каждом чертеже так, чтобы они оказались симметричны отрезку AB, В зависимости от кон-



Рис, 1

кретных условий эта работа может быть проведена и в 6 классе, она может быть как фронтальной (соответствующий рисунок выполняется на доске), так и индивидуальной (выполняют некоторые ученики). Хорошим упражнением для формирования у учащихся представления о симметричных отрезках (фигурах) может быть также и построение отрезков (фигур), симметричных данным, выполняемое от руки.

В дальнейшем этот материал следует там, где это возможно, повторять (например, можно предложить учащимся провести высоты треугольника при рассмотрении площади треугольника и пр.).

Другой пример. В 8 классе вводится понятие координат вектора. Этот материал в целом усваивается. Ученики свободно называют координаты вектора, отложенного от начала координат. Но ни в учебнике, ни на уроке обычно не разъясняется рисунок 20 учебника геометрии, 8 класс (см. рис. 2). В результате ученики не могут указать координаты векторов, изображенных на рисунке 3. Причина — формирование какого-либо понятия предусматривает его всесторонний анализ, а в данном случае не были рассмотрены упражнения, при выполнении которых заданный вектор надо было предварительно отложить от начала координат, т. е,. прийти к случаю, отмеченному в учебнике. А для тех, кто проявляет интерес к занятиям математикой, упражнения, данные в учебнике, можно было бы дополнить такими, как «От точки *A* (1; —2) отложить вектор с координатами (1; 2)».

При формировании понятий очень важно возможно шире использовать наглядность, воспитывая у учеников умение использовать модели для иллюстрации высказываемых ими соображений. Так,

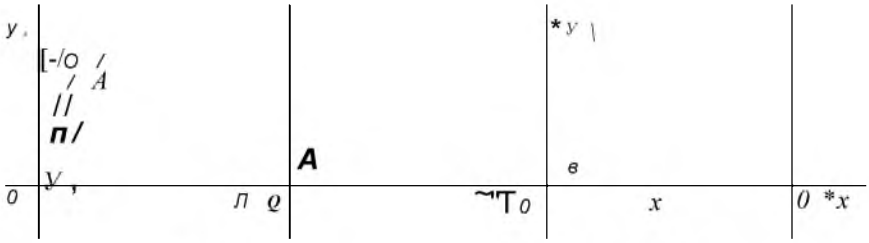


Рис. 2 Рис. 3

например, ^при решении задачи: «Даны прямые a, b и c\ a _L b, b _L c. Что можно сказать о взаимном расположении прямых a и 6?» — нужно, чтобы ученик не только сослался на соответствующую теорему, но мог бы и продемонстрировать свое заключение на модели, используя для этого, например, карандаши.

Своевременное обращение к наглядности позволяет предупредить многие ошибки школьников. Так, в курсе геометрии под углом между двумя прямыми понимается угол, лежащий в пределах от О до 90°. Легко проверить, хорошо ли усвоили этот материал ученики, предложив указать, верно ли на рисунках отмечены углы между прямыми (рис. 4).

Привычка обращения к модели окажется вёсьма полезной и в последующих классах, например при геометрической интерпретации определения предела последовательности, предела функции, производной и т. д.

Таким образом, внимание к формированию понятий на этапе их введения позволит в дальнейшем более рационал-ьно использовать учебное время.

Определенный резерв времени может быть получен в результате обучения учащихся рациональным методам решения задач. Определенные условия для этого созданы включением в школьную программу геометрических преобразований. Во многих случаях использование свойств геометрических преобразований позволяет более экономно, более изящно решить задачу по сравнению с решением, основанным на традиционном применении свойств конгруэнтных или подобных треугольников. Но для того чтобы обучить этому учеников, сам учитель должен овладеть этим новым для него методом.

Рассмотрим примеры.

З а д а ч а 1. В трапеции $ABCD$ $[BC]$ j| $[AD]$, O — точка пересечения диагоналей, \$AO\ = 5 см, |ОС| = 4 см, \$BD\ — 15 см. Найти длину отрезка BO (рис. Б).

c C

Р е ш е н и е . На основе:

свойств подобных треугольников

Так как $(BC) \parallel (AD)$, то /A Z_2; Z.3 ^ Z.4 как вертикальные (рис. 6). Треугольники BOC и DOA подобны по третьему признаку подобия треугольников, и, следовательно, имеет место соотношение

$$[АЩ \quad \_pO\backslash$$
$$\mathrm{I}\ OC| \quad |ов\ 1 * '$$

откуда $\frac{}{4} = \frac{}{15 - x}$ и т, д.

свойств гомотетии

Так как $(BC) \parallel (AD)$, то точка О является центром гомотетии с коэффициентом

$$\frac{\backslash AO\backslash}{\backslash oc\backslash} = 5$$

таким образом,

$$\frac{x5}{15-л} \quad \frac{}{4} \text{ИТ, д,}$$

З а д а ч а 2. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке О, а продолжения боковых сторон $A\ B$ и CD — в точке М; точки P и Q — середины ее оснований BC и AD соответственно (рис. 7). Докажите, что точки $M,\ P_S\ O$ и Q принадлежат одной прямой.

Известно, как трудоемко традиционное решение этой задачи. С помощью свойств гомотетии она решается весьма просто.

Р е ш е н и е . Так как $[BC] \parallel IAD]$ и $O = [AC\backslash \Pi\ IBD\backslash,\ M = (AB)\ ft\ (CD),$ то точки O и M можно принять за центры гомотетий.

При гомотетии $H^{к}\ P = H^{k}{}_{0}\ (Q)$ и $O \in$ (PQ).

При гомотетии $H^{k}{}_{M}\ P — H^{k}{}_{M}\ (Q)$ и $M \in (PQ)$. Следовательно, точки $M,\ P_{y}\ O$ и Q лежат на одной прямой.

Рациональное использование учебного времени предполагает внимательный анализ учителем ошибок учащихся и на основе этого их предупреждение. На одну из таких ошибок нам хотелось бы здесь обратить внимание. При решении задач на вычисление иногда наблюдается формальное использование учащимися обозначений — разные величины обозначаются одними и теми же буквами. Так, например, при решении задачи: «Найти отношение стороны треугольника к стороне равновеликого ему квадрата» — и сторона треугольника, и сторона квадрата обозначаются буквой a. И, получив, что

$$a^2 У3\_,,2$$
$$“Т“ \quad /$$

многие из сделавших такую запись не смогли найти ошибку.

Аналогичная ошибка была допущена и в 10 классе при нахождении отношения радиуса шара к радиусу равновеликого ему цилиндра,

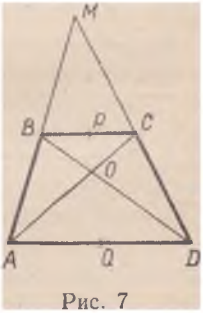


Рис. 7

осевое сечение которого — квадрат. Учащиеся, получив, что

$$.1\ nR^3 — 2л:^{\wedge 3},$$

не смогли выяснить причину полученной нелепости.

Эти ошибки вызваны, по-видимому, недостаточным количеством решаемых на уроке задач и недостаточно четкой проверкой выполняемых учащимися работ. О последнем свидетельствует и тот факт, что в классных и домашних работах учащихся остается неотмеченным большое число ошибок, неточных записей. Так, при изучении стереометрического материала учащиеся допускают много ошибок в построении изображений пространственных фигур — эллипс изображается с «острыми углами» и др. С введением различных обозначений для отрезка $A\ B$, прямой $A\ B$ и длины отрезка $A\ B$ увеличилось и число неверных записей. Встречаются, например, такие, как $\backslash AB\backslash$ J_ (CD), хотя ученику ясно, что длина отрезка $A\ B$ не может быть перпендикулярна прямой CD. Однако такие ошибки нужно исправлять, ибо накопление их в конечном итоге приводит к нерациональному использованию учебного времени.

Во многих случаях отмеченным оказывается только неверный результат решения задачи, а то место, где была допущена ошибка, не отмечается. В результате учащиеся повторяют ошибки, допущенные и ранее.

Формирование прочных умений и навыков обеспечивается только через практику — построение, выполнение упражнений, решение задач. В связи с этим необходимо обратить внимание на следующее весьма важное обстоятельство. Особенностью учебников по математике, по которым работают наши школьники, является органическое объединение в них теоретического и практического материала. В учебниках дана основа упражнений, и она, конечно, не может учесть конкретные условия работы в каждом отдельном классе. Дополнительные упражнения учитель может найти в дидактических материалах и методических пособиях к учебникам, выпущенных для каждого класса. И конечно, решающая роль при отборе упражнений принадлежит учителю. Именно он определяет, какие упражнения должны быть решены на данном этапе. В одних случаях в зависимости от конкретного класса, конкретного ученика число упражнений должно быть увеличено, в других — уменьшено.

Отметим в связи с этим, что работа учителя — творческий процесс и он не может быть жестко регламейтирован с точностью до содержания одного-двух уроков. Поэтому приведенное в методических' пособиях планирование времени является ориентировочным. В соответствии с конкретными условиями в планы уроков могут вноситься изменения, Точно так же не могут быть обязательными все самостоятельные работы, приведенные в дидактических материалах. Дело самого учителя решать, какие из этих работ должны быть предложены всем учащимся, какие задания должны быть даны только некоторым из них.

Другое дело — время на изучение тем программы, Здесь отклонения не могут быть большими, так как это время отражает программные требования к глубине и объему изучаемого материала.

Недостатком многих уроков является их большая насыщенность и теоретическим, и «задачным» материалом. В результате работа ведется в спешке и не все успевают осмыслить доказательство теоремы или решение задачи, подумать о возможности другого варианта решения. Поэтому некоторые ученики вынужденно оказываются пассивными наблюдателями (здесь следует иметь в виду, что некоторые школьники в силу своих' индивидуальных качеств не могут быстро переключаться с одного вида работы на другой, переходить от одной задачи к другой и т. д.). Бывает, что внешне урок прошел эффективно, а по сути — бесполезно. Цель урока не была достигнута. Домашнее задание оказалось непосильным. В результате у учеников появляется чувство дискомфорта, неверия в свои силы, а поэтому теряется интерес к изучению математики. Иногда это же чувство возникает, если задание и посильно, но оно настолько велико, что его приходится выполнять в спешке или только частично. Излишне большой объем домашних заданий приводит к тому, что они не проверяются на уроке, ошибки не выявляются и не исправляются, происходит своеобразное накопление ошибок.

Таким образом, одно из условий повышения эффективности урока — тщательное планирование нагрузки учащихся, учитывая их темы работы.

Анализ уроков позволяет выявить и другие пути повышения их эффективности. Нередко в 6—8 классах излишне много времени уделяется оформлению решения всех задач, даже тех, которые могли бы быть решены устно. *1

Следует отметить следующее обстоятельство. Введение простейших теоретико-множественных понятий и понятий математической логики, соответствующей терминологии и символики позволило значительно усовершенствовать и «осовременить» школьный математический язык, сделать более компактными многие записи. И при обучении этим записям учитель, естественно, должен обращать внимание на правильный перевод текста, записанного символически. Обучение такому «переводу» — один из важных компонентов работы учителя (здесь можно провести аналогию с обучением иностранному языку, при котором систематический перевод с иностранно^ на русский и обратный перевод — необходимое условие обучения^ ч j!j$_{a}$ первых порах этому следует уделять больше внимания, с тем ч^обы ученики освоили символические записи. Впоследствии достаточно лишь выборочно, в нужных случаях, проверять (обычно при ус.$_{хных}$ ответах) понимание учащимися символических записей.

Однако в ученических работах (в том числе и на выпускных, и вступительных экзаменах) встречается, как правило, перевод символического язьт$_{Ка\ на}$ обычный (и обратно). Создается впечатление, что учащиеся не .доверяют символике. Пояснения становятся много-

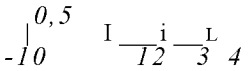


Рис. 8

словными, но не полными, впускаются существенные моменты (ссылки на необходимые теоремы и др.).

Вызывает опасение и намечающееся в настоящее время стремление ввести какие-то единые правила оформления решения задач, сделать обязательными записи доказательств теорем с использованием логической символики. В связи с этим иногда оказывается, что доказать теорему или решить задачу легче, чем оформить доказательство или решение, т. е. опять имеют место неоправданные затраты времени, а такое «регламентирование» деятельности учащихся снижает их активность, не позволяет им проявить инициативу. Нужны правильные, грамотные записи, форма же их может быть различной. Это относится и к геометрии, и к алгебре.

Так, например, при решении системы неравенств

$$\begin{cases} 2x \text{ “i- } 3 \wedge 2, \\ x - 3 < 1 \end{cases}$$

ответ может быть дан, например, в виде записей **[—0,5;** 4), **—0,5** ^ ^ $x < 4$, **{*1 —0,5** ^ $x < 4$ или в виде чертежа (рис. 8).

При решении задачи на построение во многих случаях можно обойтись без письменных пояснений — само выполнение построений и результат могут свидетельствовать о правильности решения задачи.

Ю. М. Колягин, Д. С. Зейналов

ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

I. Наряду с глубоким и прочным усвоением основ математики выпускник средней школы должен проявлять умение изучать математику самостоятельно и творчески, обладать способностью мобилизовать все свои знания, умственные, нравственные и другие качества для успешной трудовой деятельности независимо от того, какой профессией он овладеет в дальнейшем. Тем самым будут созданы необходимые предпосылки к активному применению математических знаний там, где это необходимо. Поэтому в опыте работы передовых учителей эффективность обучения математике (да и вообще любому учебному предмету) проявляется прежде всего в том, что основной акцент ставится не на запоминание школьниками учебной информации, а на ее глубокое понимание, сознательное и активное усвоение, на формирование у школьников умения творчески применять эту информацию в рамках учебной практики.

Важнейшим средством формирования у школьников высокой математической культуры, мощным средством активизации обучения математике являются эффективная организация и управление учебной деятельностью школьников в процессе решения различных математических задач.

Именно при решении математических задач школьники сознательно и прочно овладевают системой знаний, умений и навыков, которая отражена в школьном курсе математики. Более того, в процессе решения математических задач у школьников самым естественным образом могут быть сформированы качества, присущие творческой личности.

Правильная постановка задач в обучении математике во многом определяет современную методику обучения, так как они могут служить многим конкретным целям. Так, например, задачи могут использоваться для введения новой учебной темы; самостоятельного установления школьниками какого-либо математического факта, подлежащего изучению, иллюстрации этого факта, глубокого усвоения теоретического материала; выработки необ-

Рис. 1

ходимых умений и навыков; контроля знаний и самоконтроля; возбуждения и развития интереса к математике и, наконец, для приобщения учащихся к деятельности математического характера — поисковой и творческой, развития у школьников математического мышления.

Умение решать математические задачи является наиболее яркой характеристикой математического развития учащихся, уровня их математического образования.

Проиллюстрируем сказанное на примере следующей задачи, адресованной учащимся 8 класса (З ем л я к о в А., И в л е в Б. Вопросы по геометрии. — Квант, 1978, № 1): «Сколько существует перемещений плоскости, отображающих первый из указанных на рисунке отрезков (сторон прямоугольника) на второй (см. рис. 1)?»

Чтобы успешно решить эту интересную задачу (с очень простой и ясной для учащихся формулировкой), учащемуся необходимо:
а) знать определение и свойства перемещения, все (изученные им) виды перемещений плоскости, свойства прямоугольника и других фигур; б) уметь строить образы фигур при различных перемещениях, в) проявлять способности к пространственному воображению, уметь выделять существенное, обладать гибкостью мышления (способностью перехода от одного способа решения задач к другому).

Заметим, что, несмотря на кажущуюся простоту данной задачи, она нестандартна для учащихся. Условно ее можно охарактеризовать как задачу с четко определенным условием (первый отрезок) и целью (второй отрезок); способ решения (вид перемещения, переводящий первый отрезок во второй) и обоснование решения (определение и свойства используемого перемещения) предстоит отыскать, причем с требуемой в задаче полнотой число всех таких перемещений плоскости.

Таким образом, даже на одной задаче мсжнс^ осуществить реализацию достаточно большого числа конкретных дидактических целей.

Продолжая рассмотрение данного примера, представим задачу в иной формулировке: «Построить образ стороны AB прямоугольника $A\ BCD$ при параллельном переносе BC» или «Построить образ $[AB]$ — стороны прямоугольника $A\ BCD$ при центральной симметрии с центром $O = (AC) \cap (BD)$».

Задача стала менее интересной. Не так ли? И это понятно: число реализуемых в ходе ее решения дидактических функций резко сократилось. Основной стала функция обучающая: проиллюстрировать свойства определенного вида перемещений, способствовать формированию умения строить образ фигуры при конкретном виде перемещения.

Важно отметить, что повышенное внимание к обучающей роли задач есть определенная дань традиции, не отвечающей требованиям сегодняшнего дня.

Критический анализ имевших и имеющих место методических подходов к использованию задач в массовом обучении математике показывает, что определенные типы математических задач либо выступают в качестве локальной цели обучения математике, либо рассматриваются как средство активного усвоения школьниками программного материала. Лишь в отдельных случаях (в основнохМ на внеклассных или факультативных занятиях, в школах и классах с углубленным изучением математики) задачи иногда выступают как средство целенаправленного развития математического мышления учащихся, формирования у них познавательного интереса, развития математических способностей, формирования диалектико-материалистического мировоззрения и воспитания нравственных качеств личности.

Задачи с узко обучающей направленностью, как правило, таковы, что требуют для своего решения применения определенных знаний, умений или навыков по узкому вопросу программного материала. Поэтому роль и значение их исчерпываются в течение того непродолжительного времени, которое отводится на изучение вопроса программы. Более того, вспомогательная роль таких задач в процессе обучения не является секретом ни для учащихся, ни для учителя: проиллюстрировать изучаемый теоретический вопрос, разъяснить его смысл, помочь усвоить изучаемый факт через простейшие упражнения, выполняемые по образцу, продиктованному только теорией.

Памяти[4]учащихся обладает естественной избирательностью, и поэтому то, что представляется им второстепенным, забывается в первую очередь. Понятно, что в реальном процессе обучения математике это неизбежно. Плохо то, что на «обслуживание» задачами того или иного вопроса программы часто тратится значительно больше учебного времени, чем это нужно.

Плохо и то, что, несмотря на значительные затраты учебного труда и времени на решение таких задач, мы не достигаем ожидаемых результатов для значительного числа выпускников средней школы. Между тем разумная дозировка обучающих задач могла бы помочь учителю соблюсти «режим экономии» во времени и в учебном труде школьника, употребить скрытые резервы времени и усилий на достижение более важных целей обучения, воспитания и развития учащихся. Поэтому чрезвычайно важным вопросом методики использования задач является вопрос о функциях задач.

II. Практика обучения математике показывает, что любая конкретная задача, которая ставится и решается на том или ином этапе обучения, несет в себе самые разнообразные функции, которые в данных конкретных условиях (определяемых либо учеником, либо учителем, либо конкретными условиями обучения) проступают явно или скрытно. Поэтому в конкретном плане имеет смысл говорить о ведущей функции, которую реализует данная учебная задача.

Ведущее положение одной или нескольких функций учебной задачи имеет динамичный характер. В зависимости от конкретных условий обучения та или иная «скрытая» функция задачи может выступить явно, а ведущая функция — оказаться нереализованной. Поэтому очень важно, чтобы учитель выявлял основные функции каждой задачи, помещенной в учебнике. Опыт показывает, что творчески работающий учитель видит «гораздо дальше» авторов учебника (и это очень хорошо), вскрывая и реализуя в ходе решения той или иной задачи более глубокие или более педагогически полезные функции, чем те, которые ей предписаны методическим руководством к учебнику.

Являясь одним из важнейших средств обучения математике (в широком его понимании), система школьных математических задач должна отвечать главным целям школьного математического образования. Каждая отдельная задача или серия задач должна быть направлена на реализацию той или иной конкретной цели (или целей) обучения (понимаемого опять-таки в широком смысле). А так как основными компонентами школьного обучения математике являются собственно обучение (понимаемое теперь как формирование у учащихся определенной системы математических знаний, умений и навыков), воспитание (мировоззренческое, нравственное и т. д.) и развитие математического мышления учащихся (формирование определенных качеств и свойств мышления, определенной совокупности мыслительных приемов и методов научного познания), целесообразно в качестве ведущих функций задач считать функции обучающие, воспитывающие и развивающие, а также контролирующие (так как задачи широко применяются для контроля и оценки математических знаний и умений учащихся).

Обучающие функции задач — это функции, направленные на формирование у школьников системы .математических знаний, умений и навыков на различных этапах ее усвоения.

Воспитывающие функции задач — функции, направленные на формирование у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, познавательного интереса и навыков учебного труда, на воспитание коммунистических взглядов и убеждений, а также нравственных качеств личности советского человека.

Развивающие функции задач — функции, направленные на развитие мышления школьников (в частности, на формирование у них качеств научно-теоретического мышления), на овладение ими приемами эффективной умственной деятельности.

Контролирующие функции задач — это функции, направленные на установление уровней обученности и обучаемости, способности к самостоятельному изучению математики, уровня математического развития учащихся, а также уровня в области сформированности познавательных интересов.

Каждая из вышеназванных основных функций задач практически никогда не выступает изолированно от других (например, всякое обучение развивает, если оно поставлено правильно). О той

или иной функции каждой конкретной задачи (или системы задач) имеет смысл говорить как о функции ведущей, если ее реализация на практике проводится достаточно четко, открыто.

Ведущая функция задачи определена основной целью ее постановки перед учащимися и должна быть реализована в первую очередь. Несвоевременное акцентирование внимания учащихся на второстепенной функции той или иной задачи может отрицательно сказаться на эффективности использования этой задачи на уроке.

В практике обучения правомерно используются задачи, которые несут в себе в качестве ведущих не одну из названных трех основных функций, а сразу две (а может быть, и все четыре одновременно). Так, принимая во внимание принятую в дидактике характеристику познавательной функции задач, можно полагать, что здесь мы имеем дело с задачами, в которых в качестве ведущих функций выступают одновременно обучающая и развивающая функции.

Опыт показывает, что эффективность воспитывающего и развивающего обучения математике во многом зависит от того, насколько полно в практике обучения математике реализуются возможные функции каждой конкретной математической задачи наряду с реализацией ее ведущей и явно выраженной функции.

Возможности одновременной реализации различных функций в процессе решения даже одной (достаточно содержательной) математической задачи широки.

Проиллюстрируем сказанное на следующей задаче: «Окружность, извне касаясь квадрата, «катится» по нему без скольжения. Сколько полных оборотов она сделает к моменту возвращения в исходную точку, если длина стороны квадрата равна длине окружности». Решению этой задачи существенно помогает рисунок 2; используя его, учащийся должен верно представить себе переход от движения по одной стороне квадрата к движению по смежной с ней стороне; соответствующие вычисления проводятся легко.

Для обоснования данного решения задачи используются следующие основные математические факты: свойства квадрата, свойства касательной к окружности, понятие о длине окружности #и периметре квадрата. Конкретные обучающие функции определяются целями усвоения школьниками этих фактов (формирование понятий касательной и ее характеристического свойства — ведущая обучающая функция данной задачи).

Рис. 2

Развивающие функции данной задачи представлены прежде всего формированием у учащихся про-

странственного воображения, умений работать с математической моделью, исследовать математическую ситуацию, выделять существенное.

Воспитывающие функции этой задачи реализуются через возбуждение у учащихся интереса к решению задачи (фабула задачи необычна), развитие у них внимания, стремление к рационализации своей деятельности*

Важно отметить, что решение данной задачи потенциально содержит возможности дальнейшего расширения реализуемых через нее обучающих, развивающих и воспитывающих функций.

В самом деле, условие задачи таково, что побуждает учащихся к естественной постановке вопроса: «Сколько оборотов сделает окружность, если она будет «катиться» по сторонам не квадрата, а равностороннего треугольника, параллелограмма, ромба, правильного шестиугольника и т. п.?» Именно эти вопросы нередко возникали у учащихся, которым предлагалось решить данную задачу.

Переход учащихся от решения данной задачи к самостоятельной постановке и решению аналогичных ей задач значительно расширяет и арсенал реализуемых в процессе ее решения функций: формирует у учащихся умение использовать аналогию, обобщение, развивает у них диалектическое мышление, самостоятельность мышления и творческие задатки.

Рассмотренный пример иллюстрирует практически важную мысль о том, что усиление функций учебной математической задачи зависит как от содержания самой задачи (ее контекста), так и от методики работы над ее решением.

III. Выше рассмотрен вопрос о функциях учебных математических задач. Понятно, что указанные функции задач реализуются как в обучении алгебре, так и в обучении геометрии. Вместе с тем геометрические задачи и их решения обладают определенной спецификой.

Специфика задач школьного курса геометрии проявляется прежде всего в более узкой (по сравнению с алгебраическими задачами) их направленности: большинство геометрических задач — это задачи на изучение определенных точечных множеств (фигур), операций, отношений между ними и их свойств. Существенно большую роль в ходе решения геометрических задач играют наглядные иллюстрации, чертежи, рисунки, модели. Однако с дидактической точки зрения в процессе решения геометрических задач заложены большие (по сравнению с решением алгебраических задач) возможности развития мышления школьников. Решение геометрических задач существенно и позитивно влияет на развитие логического мышления учащихся, их пространственного воображения и т. д. В значительно меньшей степени при решении геометрических задач может быть использован образец решения некоторого класса задач, а тем самым осуществляется дестандартизация как самих задач, так и методики их использования в обучении.

В современном^',обучении геометрии сохранились традиционные виды учебных задач — задачи на построение, вычисление, доказательство. Вместе с тем в систему школьных геометрических задач включены новые виды задач, в условии и решении которых отражена теоретико-множественная трактовка основных геометрических понятий и положений.

Таковы, например, задачи на способы задания точечных множеств; задачи, связанные с выполнением операций над геометрическими фигурами; задачи на отображения точечных множеств и их применение; задачи, в ходе решения которых широко применяется язык и символика теории множествен ряд других задач.

Заметим, что существенное насыщение школьного курса геометрии новым содержанием привело к тому, что решение задач приобрело дополнительную значимость.

В самом деле, объем учебной математической информации школьного курса математики существенно возрос, тогда как время, отводимое на ее усвоение школьниками, практически не изменилось. Поэтому отдельные теоретические положения курса геометрии стали сообщаться школьникам через задачи. Произошло значительное расширение роли задач в обучении геометрии: задачи приобрели дополнительную функцию — функцию носителя учебной информации; пренебречь решением той или иной задачи или решить ее формально стало опасным вдвойне.

Изменилась и методическая направленность использования задач в обучении. К оправдавшим себя на практике видам геометрических задач (устные задачи, задачи по готовым рисункам, задачи на измерение с последующим вычислением и др.) добавились новые. Значительное место в обучении геометрии отводится теперь задачам, направленным на усвоение учащимися определенных методов решения (метода перемещений, в частности, векторного метода, метода преобразования гомотетии).

Существенное внимание обращается на усиление практической направленности геометрических задач, которая выражается прежде всего в построении математических моделей конкретной ситуации, в использовании метода графического решения задач (нахождение неизвестных элементов фигуры проводится через построение на чертеже, выполненном в выбранном масштабе, с последующим измерением), в применении алгебраического метода решения геометрических задач. Таким образом, основной акцент при решении геометрических задач ставится теперь на более глубокое и прочное усвоение основного учебного материала, а в ходе его изучения — на целенаправленное развитие мышления учащихся, на формирование у' них диалектико-материалистического мировоззрения.

IV. Методически правильная постановка задач в обучении геометрии предполагает оптимальную реализацию всех возможных ее функций (обучающих, развивающих, воспитывающих). Однако в

реальном процессе обучения какие-то из этих основных функций выступают в качестве ведущих. При непосредственном изучении программного материала в качестве ведущей естественно выступает некоторая (или некоторые) обучающая функция.

К числу обучающих функций геометрических задач относятся функции, направленные на: а) мотивацию изучения новой темы, опорных ее понятий и положений, б) формирование у учащихся основных геометрических понятий (на уровне представлений, усвоения, закрепления, систематизации и т. д.), в) подведение учащихся к самостоятельному изучению свойств геометрических фигур, г) формирование потребности и умений в обосновании математических суждений, д) иллюстрацию возможности применения изученных геометрических понятий и теорем, е) овладение методами решения геометрических задач.

Понятно, что в ходе эффективного урока математики решение задач с теми или иными обучающими функциями практически неотделимо от использования других форм и методов учебной работы (изложения материала учителем, вопросо-ответной формы, проверки усвоения изученного и т. д.). Органически вплетаясь в «канву урока», решение задач способствует формированию у школьников интереса к изучению математики, сознательному, глубокому и прочному усвоению содержания обучения геометрии.

Проиллюстрируем на нескольких примерах некоторые аспекты обучения геометрии в процессе решения задач.

Известно, какое большое значение в процессе активной учебной работы учащихся придается мотивации (обоснованию целесообразности) обучения. В конкретном плане, при изучении каждой темы курса геометрии полезность рассмотрения того или иного вопроса, разумность определения того или иного геометрического понятия, преимущество одного способа решения задачи над другим и т. д. должны вскрываться не только самим учителем, но и учащимися. Нередко это можно сделать с помощью задач, несущих в себе мотивационную функцию. Так, например, при изучении определения параллельности прямых в 6 классе полезна постановка следующего учебного задания: «Как мотивировать разумность этого определения, объединяющего в одном понятии «параллельность», два внешне не схожие друг с другом случая взаимного расположения прямых на плоскости: полное совпадение прямых и отсутствие у них даже одной общей точки?» В книге для учителя «Геометрия в 6-м классе» указано, что такое определение отношения параллельности включает его в более общий класс отношений эквивалентности и тем самым облегчается доказательство некоторых теорем. Однако для большинства учащихся такая мотивировка неубедительна. Опыт показывает, что более убедительным для них является обнаружение общности в случаях расположения прямых на плоскости. В самом деле, и в случае совпадения, и в случае отсутствия .общих точек расстояние от точек одной прямой до другой постоянно (численное значение расстояния равно или не равно нулю); в случае

пересекающихся прямых это расстояние является переменной.

Важно здесь то, что подобного рода мотивировку определения понятия могут отыскать сами школьники при постановке перед ними соответствующей задачи (конечно, если учитель соответственным образом направит их поиск).

Рассмотрим теперь, как с помощью системы задач можно сформировать у учащихся новое геометрическое понятие на примере понятия «направления на прямой и на плоскости» (6 класс).

Организация этого фрагмента урока может быть представлена следующей последовательностью заданий и вопросов к учащимся:

1. Проведите прямую AB. Отметьте на ней произвольную точку О.. На какие подмножества разбивает точка О множество точек прямой $A\ B$, отличных от нее?

2. Сколько пар открытых лучей можно выделить на прямой некоторой точкой? Сколько в каждом случае образуется направлений на данной прямой?

3. Отметьте точки С и D и проведите (CD). Отметьте на ней некоторые точки О, M и N, а также K и L так, чтобы точки M *и* N принадлежали лучам разных направлений, точки K и L — лучам одного направления. Запишите множество лучей так, чтобы каждый из предыдущих был подмножеством последующего.

Полученные лучи на прямой называются сонаправленными и обозначаются так: $[MD)$ ff $10D)$ и т. д.

4. Укажите лучи, сонаправленные с лучом ND, LM. Запишите это символически.

5. Прочитайте запись: [OC) ff $[NC)$, так как [OC) a $[NC)$.

6. Укажите на прямой CD два луча, которые' не содержатся один в другом.

Такие лучи на прямой называются противоположно направленными и обозначаются $INC)$ f\ $[0D)$.

7. Укажите лучи, противоположно направленные с лучом LC; MD. Запишите это символически.

8. Прочитайте запись:

$[OC)$ f j $[MD)$, так как [OC) qt $[MD)$ и $[MD)$ qt [OC).

9. Решите устно задачу № 1 (вариант № 4) С-13 из книги «Дидактические материалы по геометрии».

Следующая серия задач определяет последовательность изучения понятия «направления на плоскости».

1. Решите устно задачу № 3 п. 31 учебника.

2. Сколько направлений определяет луч?

3. На сколько частей делит плоскость некоторая прямая?

4. Постройте два луча AB и CD так, чтобы они не принадлежали одной прямой, но были параллельны. Проведите прямую через их начала. Какие два различных случая здесь возможны?

5. Какие лучи на плоскости следует назвать сонаправленными, противоположно направленными? По каким признакам можно их различать?

6. Постройте на плоскости пару сонаправленных лучей MA и NB. Постройте луч KL, сонаправленный с лучом MA. Будет ли он сонаправлен с лучом NB? Постройте луч CD, противоположно направленный с лучом MA. Будет ли он противоположно направленным с лучом NB?

7. Луч $A\ B$ противоположно направлен с лучом CD, а луч CD противоположно направлен с лучом KE. Какое из предложений верно:

а) $[AB)$ ff $[KE)$\ б) $[AB)$ ft $[KE)$?

8. Величина угла CAB равна 60°. Через его вершину проведена прямая, не совпадающая ни с одной из его сторон.

Будут ли лучи AC и AB сонаправлены, противоположно направлены?

9. Что означает следующая запись

$[OA)\ \Phi\ [CB)$

$'[OA)\backslash\backslash[CB)$

$\backslash OA)\ aa_1$ <s=>[CM)ff[C£) (flj| и а, — прямые)?

$[CB)\ aa_2$

10. Выполните аналогичную запись для случая

$№)\backslash\backslash 1CB).$

11. **Решите** задачу № **2** (вариант № 3) С-13 из книги «Дидактические материалы по геометрии».

12. Верно ли утверждение: «Отношение сонаправленноети лучей является отношением эквивалентности?».

13. Как определить направление на прямой, на плоскости? Сколько лучей достаточно для задания направления на прямой, на плоскости?

Задачи являются весьма эффективным средством, с помощью которого учащиеся могут быть подведены к самостоятельной формулировке теорем и проведению их доказательств. Конкретизируем это положение на примере о необходимом и достаточном условии того, чтобы перемещение было параллельным переносом. (Этот пример отнесен теперь к необязательному материалу.)

Предварительно учащимся напоминается, что параллельный перенос (вектор) является перемещением, так как он удовлетворяет определению перемещения. Ставится задача отыскания такого свойства параллельного переноса, которое отличало бы его от других видов перемещений.

Изучение этого вопроса проводится посредством следующей серии учебных задач, органически вплетающихся в процесс изучения нового материала.

Для того чтобы учащиеся смогли самостоятельно сформулировать данную теорему, полезно поставить перед ними последовательно следующую серию парных задач:

1. а) На рисунке изображаются две параллельные прямые AB и CD. Какими перемещениями можно отобразить прямую AB на прямую CD?

б) Укажите, какими перемещениями можно **отобразить** любую прямую плоскости на прямую, ей параллельную.

2. а) На рисунке изображены два луча AB и CD, причем $[AB)$ ff ff[CD). Какими перемещениями можно отобразить луч $A\ B$ на луч CD?

б) Укажите, какими перемещениями можно отобразить каждый **луч** на луч, с ним сбнаправленный.

3. а) На рисунке изображены два луча $A\ B$ и CD, причем $[A\ B)$ jf [CD). Какими перемещениями можно отобразить **луч** $A\ B$ **на** луч CD?

б) Укажите, какими перемещениями можно **отобразить каждый луч** на противоположно направленный с ним луч.

В ходе решения этих задач выясняется, что только параллельный перенос отображает любой луч на сонаправленный с ним луч. Тем самым устанавливается характеристическое свойство параллельного переноса, выражающее сущность изучаемой теоремы.

Для того чтобы учащиеся смогли осознанно сформулировать **эту** теорему в терминах «необходимо и достаточно», полезно предложить им решить следующие задали:

4. Постройте луч AB. Задайте произвольный параллельный перенос и найдите образ этого луча — луч A_2B_2 при заданном параллельном переносе. Убедитесь, что $lA^{\wedge})$ ff [ЛВ). После решения этой задачи подчеркивается, что, если перемещение является параллельным переносом, каждый луч переходит в сонаправленный с ним.

Учащимся предлагается записать это утверждение символически :

$$F = T,\ T\ ([AB)) = [AM\ [ABMA^{\wedge}). \qquad (1)$$

5. Постройте два сонаправленных луча AB и $Л_1В_1$. Задайте параллельный перенос Г, отображающий луч $A\ B$ на луч A_1B_1.

После решения этой задачи подчеркивается, что, если перемещение F отображает каждый луч на сонаправленный с ним, оно является параллельным переносом.

Учащимся предлагается записать это утверждение символически:

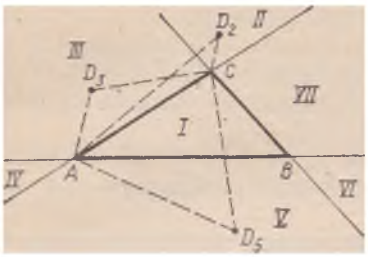
$$[ABEHAM\ F([AB)) = [AM\ F = T. \qquad (2)$$

Запись (1) выражает необходимое условие, а запись (2)—достаточное условие того, чтобы перемещение было параллельным переносом.

Теперь можно переходить к словесной формулировке теоремы и ее доказательству.

Доказательство теоремы полезно предварить решением нескольких задач, представляющих определенные шаги доказательства.

Опыт показывает, что изложенная выше последовательность задач обеспечивает сознательное усвоение школьниками этой теоремы. Задачи, направленные на систематизацию имеющихся у уча-



Рис, 3

щихся знаний, могут быть использованы также и для того, чтобы показать школьникам роль знаний в успешной работе творческого характера. Такова, например, следующая задача; ее постановка полезна в 6 классе при изучении темы «Виды четырехугольников».

З а д а ч а . Дан произвольный треугольник ABC. Найти множество точек D, таких, что:

а) фигура $A\ BCD$ — четырехугольник;

б) фигура $A\ BCD$ — выпуклый четырехугольник.

Приступая к решению данной задачи учащиеся должны вспомнить:

определение ломаной;
разбиение плоскости прямой;
определение замкнутой ломаной;
простые и непростые ломаные;
определение многоугольника;
определение выпуклой фигуры;
разбиение многоугольников на выпуклые и невыпуклые.

Вышеуказанным перечнем определены основные обучающие функции данной задачи: формирование понятий ломаной, многоугольника (выпуклого и невыпуклого) и т. д.

При решении данной задачи рисунок играет эвристическую роль (рис. 3): используя его, учащиеся посредством выбора точек в каждой, из плоских областей, которые образованы прямыми AB, BC и ЛС, устанавливают вид четырехугольника $ABCD_f$ а следовательно, находят предварительные ответы на вопрос задачи.

Однако окончательное решение может быть получено лишь путем логических рассуждений, делающих правдоподобные выводы достоверными.

Так, беря точку D в области I, учащиеся усматривают, что четырехугольник $ABCD$ не существует; подтверждая данный вывод рассуждением, они указывают на то, что при любом положении точки D из обл асти V_5 отрезки CD *и* $A\ B$ пересекаются и ломаная $A\ BCD$ не является простой.

Если точка D принадлежит, например, области $И_2$,то возникает невыпуклый четырехугольник $A\ BCD$. Обоснованием этого вывода служит определение выпуклой фигуры, распространенное на выпуклые четырехугольники; в данном случае точки A и D принадлежат разным полуплоскостям с границей CB.

Наконец, усмотрев, что для точек D, принадлежащих $Ш_3$, четырехугольник $A\ BCD$ выпуклый, учащиеся ссылаются при обосновании на определение выпуклой фигуры.

Исследуя случаи, когда точка D принадлежит границам семи

данных областей, учащиеся усматривают тот факт, что четырехугольник $ABCD$ не существует (фигура $ABCD$ либо не является ломаной, например если D £ (BC), либо ломаная $ABCD$ не является простой).

Рассуждая аналогично, учащиеся устанавливают, что:

а) искомое множество точек D есть объединение областей I, И, III, IV, VI;

б) искомое множество — область III.

V. Для повышения эффективности развивающего обучения геометрии перед учащимися следует систематически ставить серии задач (или отдельные задачи), которые наряду с конкретными обучающими функциями несли бы в себе (также в качестве ведущих) функции, направленные на формирование у школьников элементов творческого математического мышления.

В качестве таких задач могут выступать, например, задачи, при постановке которых или в процессе решения которых:

учащимся мотивируется целесообразность изучения нового материала, разумность определений геометрических понятий, полезность изучения тех или иных теорем;

учащиеся побуждаются к самостоятельному открытию того или иного геометрического факта, к обоснованию того или иного положения, к установлению возможности применения уже усвоенных ими знаний в новой для них ситуации;

учащиеся подводятся к самостоятельному открытию методов доказательства теорем, общих приемов решения задач, к установлению новых связей между известными им геометрическими понятиями;

у учащихся формируются умения использовать ведущие методы научного познания (опыт, наблюдение, сравнение, анализ, обобщение и т. д.) как методы самостоятельного изучения геометрии, понимание роли и места индукции, аналогии дедукции в процессе познания;

учащиеся обнаруживают взаимосвязь геометрии и алгебры с другими предметами, устанавливают содержательные и структурные связи между различными вопросами самого курса геометрии, получают возможность применить математические знания к решению нематематических задач;

учащиеся приобщаются к самостоятельным поисковым исследованиям (посредством изучения результатов решения задач, изменения условия задачи, возможных обобщений задачи, отыскания других способов ее решения и отбора того из них, который наиболее полно удовлетворяет заданным условиям, и т. п.);

у учащихся формируются качества, присущие научному мышлению (активность, гибкость, глубина, критичность, доказательность и т. п.), умение выражать свою мысль ясно и точно и т. д.

Практическая возможность использования вышеуказанных рекомендаций обусловлена возможностью использовать для этой цели задачи, похмещенные в учебниках. Незначительная методически

Рис. 4 **Рис. 5**

направленная обработка условия той или иной задачи, изменение места и времени ее постановки существенно меняют дидактическую значимость задачи, оставляя неизменным ее фактическое содержание.

Рассмотрим следующую задачу: «Даны (рис. 4) $IAD)$ — биссектриса Z-BAC, $\backslash AB\backslash = |AC\backslash$. Доказать: |DC| = |J3D|».

Для учащихся 6 класса, приступающих к ее решению сразу после изучения признаков конгруэнтности треугольников, эта задача реализует только обучающие функции.

Видоизменим эту задачу: «Известно, что $IAD)$ — биссектриса Z.BAC, $\backslash AB\backslash$ — $[AC|$. Конгруэнтность каких элементов из этого следует?» Тем самым мы переводим эту задачу в число задач проблемного характера, методически более содержательных. В процессе решения эта задача естественно трансформируется в задачу, предложенную учебником.

Рассмотрим следующую задачу:

«Даны (рис. 5) $[ADI$ П $1BC]$ = E, $\backslash BE\backslash$ = |£C|. $\backslash AE\backslash$ =$\backslash ED\backslash$. Доказать: $AABE$ ^ ACED».

Эта задача также обучающая. Видоизменим эту задачу: «Каких данных достаточно для того, чтобы доказать конгруэнтность треугольников A BE и CED (рис. 5)?»

Тем самым задача также становится проблемной.

При воспитании у учащихся творческой активности нередко можно использовать и те задачи, которые уже стали традиционными в школьном обучении. Такова, например, следующая известная задача: «Даны прямая PH и две точки Л и В по одну сторону от этой прямой. На прямой PH найти такую точку С, чтобы сумма расстояний $\backslash AB$[+ \ CB \ была минимальной».

Приведем ту же задачу в иной формулировке: «По одну сторону канала находятся два населенных пункта. Найдите на берегу этого канала место для постройки насосной стацции, которая снабжала бы водой оба данных пункта». Заметим, что минимальность суммы расстояний, по которым будут проложены трубы, уже явно не оговорена, она вытекает из смысла самой задачи; но для того,, чтобы это установить, школьники должны проявить творческую активность.

Заметим, что хорошим аналогом этой задачи является задача на отражение света от плоской зеркальной пластинки.

Понятно, что те или иные элементы развития формируются у школьников в процессе решения каждой нетривиальной задачи. Однако время от времени полезно осуществлять вместе с учащимися достаточно детальное изучение особенностей некоторой задачи, подходов к ее решению, обучать школьников планированию поиска решения задачи, аргументации выбора тех или иных направлений решения.

Проиллюстрируем сказанное на примере следующей задачи (по курсу геометрии 8 класса), нахождение верного решения которой было обусловлено правильно организованным поиском и воспроизведением знаний и умений, достаточных для ее успешного решения: «Построить угол, величина которого равна половине величины данного угла, не проводя непосредственного деления данного угла на два конгруэнтных угла».

Определяющее значение в ходе поиска решения имела постановка следующего вопроса: «Какие теоремы, связывающие один угол с другим, известны?» Возможные ответы учащихся на этот вопрос:

а) во всяком треугольнике величина внешнего угла больше величины внутреннего, с ним не смежного;

б) сумма величин внутренних углов треугольника равна $2d$; *

в) величина внешнего угла треугольника равна сумме величин углов треугольника, не смежных с ним;

г) в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны;

д) свойства величин углов в круге (вписанных, центральных).

Критическая оценка выявленных теоретических положений привела одних учащихся к отбору непосредственно тех, которые сразу давали искомое решение (величина вписаннцго угла вдвое меньше величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу), а других учащихся — к качественной переработке известных им утверждений в частное утверждение, также дающее искомое (но иное) решение задачи (величина внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника вдвое больше величины угла при его основании).

Найденные ключевые теоретические положения определили выбор, приемлемого в данных условиях, метода решения (построения с помощью циркуля и линейки) к стратегии решения: изображение данного угла в виде центрального (рис. 6) или внешнего, относительно некоторого равнобедренного треугольника (рис. 7).

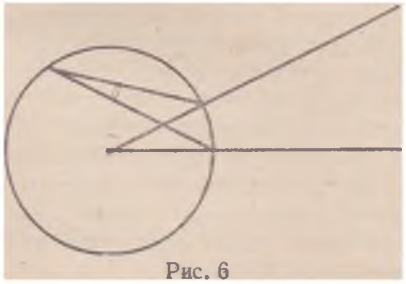


Рис. 6

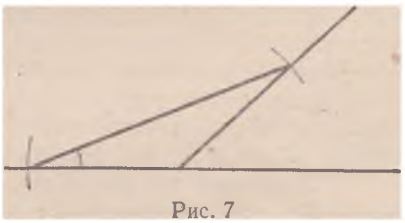


Рис. 7

Решение этой задачи стало очевидным.

В ходе решения задачи у некоторых школьников проявилось стремление к рационализации решения: они обнаружили возможность выполнять решение непосредственно на данном изображении угла, а не строить угол, конгруэнтный данному, для осуществления решения задачи. Кроме того, учащиеся в ходе реализации плана решения обнаружили возможность произвольного выбора точки A на окружности. Интересно отметить, что нескольким учащимся 'найденный ими способ решения позволил усмотреть, что с его помощью может быть решена и другая задача, аналогичная данной (построить угол, величина которого двое больше величины данного угла и т. д.).

Заботясь о целенаправленном развитии мышления учащихся в процессе решения геометрических задач, учитель должен знать особенности того или иного этапа решения учебной задачи (знать, какие мыслительные умения школьников проявляются и формируются на том или ином этапе решения задачи), оценивать значимость каждого этапа для формирования математического развития школьников.

В методике принято деление процесса решения задачи на четыре основных этапа.

~На первом этапе процесса решения математической задачи имеют место осознание условия и требования задачи, усвоение и разработка отдельных элементов условия (или элементов цели), поиск необходимой информации в сложной системе памяти, соотнесение условия и заключения задачи с имеющимися знаниями и опытом.

На втором этапе имеют место целенаправленные пробы различных сочетаний из данных и искомых, попытки подвести задачу под известный тип, выбор наиболее приемлемого в данных условиях метода решения (из известных): выбор стратегии решения, поиск плана решения и его корректировка на основе предварительной проверки, соотнесения с условием задачи и интуитивных соображений, фиксирование определенного плана решения задачи.

На третьем этапе проводится практическая реализация плана решения во всех его деталях с одновременной его корректировкой через соотнесение с условием и выбранным базисом, выбор способа оформления решения и оформление решения, запись результата.

На четвертом этапе фиксируется конечный результат решения, проводится критический анализ результата (его прикидка и проверка), осуществляется поиск путей рационализации решения, исследование особых и частных случаев, выявление существенного — потенциально полезного, систематизация новых знаний и опыта.

Изучение опыта работы учителей математики показывает, что в практике обучения математике не уделяется должного внимания первому этапу процесса решения задачи, второй этап решения задачи не занимает должного места, третьему этапу уделяется излишнее внимание, а четвертый, как правило, отсутствует.

Рис. 8

Эффективное формирование математического развития школьников возможно лишь при условии, что работа учащихся над решением задач методически продумана, а на ее проведение отводится достаточное учебное время. В этом случае сам процесс решения задачи выступает не только как важнейшее из средств обучения математике, но и как средство целенаправленного развития мышления школьников.

В ходе внеклассных занятий возможна постановка особых проблемных задач, построенных на известном учащимся учебном материале и направленных либо на расширение имеющихся у школьников знаний и опыта, либо на его углубление. Как правило, решение таких проблемных задач переходит в изучение учащимися определенного раздела математики, примыкающего к школьному курсу, или в дополнительные самостоятельные исследования вопросов, сгруппированных около поставленной и решенной проблемной задачи.

На кружковых и факультативных занятиях, помимо*задач проблемного характера, полезна постановка задач, возбуждающих у учащихся интерес к решению задач (а через него.— к изучению геометрии) и одновременно реализующих те или иные развивающие функции. Так, полезна постановка задач, способствующих развитию конструкторских способностей и пространственного воображения. Последнее следует формировать уже на материале курса планиметрии.

Вот пример родной из таких задач: «Квадрат разделен на 16 конгруэнтных квадратов. Разделить его на две равновеликие фигуры, проводя линию деления лишь по контуру квадратов, составляющих данный».

Опыт показывает, что разнообразные способы решения этой задачи вызывают у учащихся большой интерес (на рис. 8 показаны решения этой задачи).

Полезна- также постановка задач, требующих обоснования невозможности их решения при заданных условиях. Такие задачи развивают критичность мышления школьников, способствуют формированию их логичной культуры. Такова, например, следующая задача: «Доказать, что круг нельзя покрыть двумя кругами меньшего, диаметра».

В ходе решения этой задачи учащиеся должны провести следующие рассуждения. Пусть меньший круг накрывает часть большего. Их центры принадлежат одной прямой $0_{,}0_{2}$. Если $[AB]$ — диаметр большего круга, перпендикулярный к $(0i0_2)$, то точки A и B нз

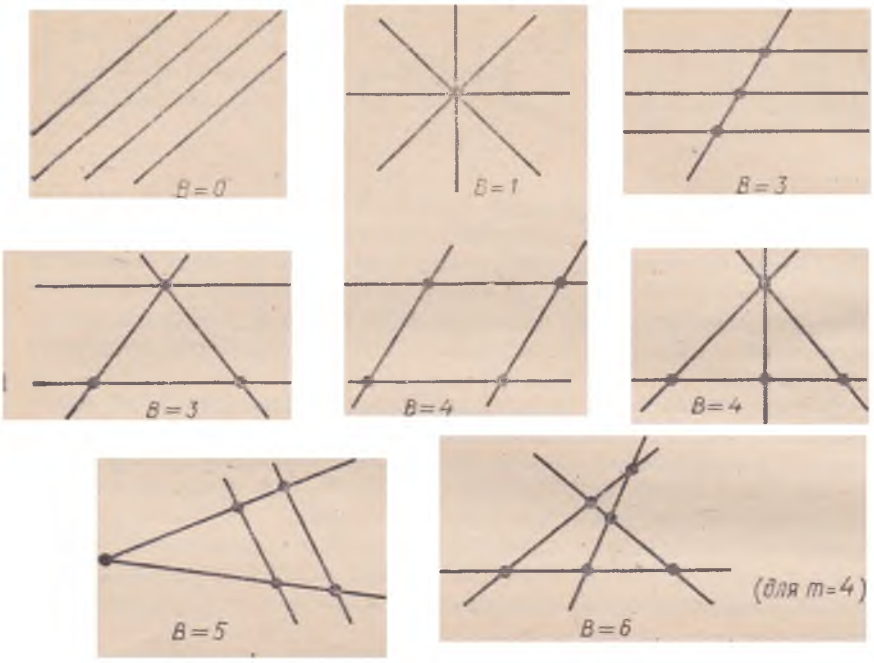


Рис. 9

покрыты меньшим кругом. Так как расстояние между ними больше диаметра другого меньшего круга, то хотя бы одна из них останется непокрытой ни первым, ни вторым кругом. Опыт показывает, что на кружковых и факультативных занятиях особенно полезны задачи поискового характера. Вот одна из таких задач: «Сколько точек пересечения могут иметь четыре несовпадающие прямые плоскости? Проиллюстрировать каждый из возможных случаев. Обосновать невозможность того или иного случая.»

В ходе решения этой задачи у учащихся возникла идея о том, что интересно было бы выяснить возможное число точек пересечения другого числа несовпадающих прямых плоскости.

Решение поставленной задачи (рис. 9) переросло в целое исследование, результаты которого были оформлены в виде следующей таблицы:

Число различных прямых	Возможное число точес пересечения (В)	Невозможное число точек пересечения (Н)
1	В = 0	Н > 0
2	в = од	Н > 1
3	В = 0,1, 2,3	Н > 3
4	В = 0,1, 3, 4, 5, 6	Н = 2, Н > 6
5	В = 0,1, 4, 5, ..., 10	Н = 3, 4 Н > 10

Далее перед учащимися была поставлена новая задача: «Найти максимальное число точек пересечения различного числа несовпадающих прямых плоскости».

Решение этой задачи также оформлялось в виде таблицы:

Число прямых	Максимальное число точек пересечения
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

Внимание учащихся было обращено на то, что найденная последовательность чисел обладает* определенными свойствами, что члены этой последовательности могут быть записаны так:

q _ 0 • 1 | _ 1 * 2 3 == ^ i 3 f 6 =—» 1 Q— V
2 1 2 2 2 2

Теперь учащиеся без труда установили общий член этой последовательности и получили решение задачи для общего случая.

Эта (и ей аналогичные) геометрическая ситуация может быть использована для проведения проверочных работ, целью которых является не только проверка усвоения определенных знаний и умений, но и выявление того, как продвигаются учащиеся в своем математическом развитии. При проведении таких работ важно подобрать задачи, решение которых не требует знаний, выходящих за рамки программного материала, но вместе с тем содержит изюминку, заставляет школьников проявить определенные способности.

Таковы, например, следующие задачи:

1. Изобразить возможные случаи пересечения пяти прямых в четырех точках.

2. Даны две окружности. Какими преобразованиями можно отобразить одну окружность на другую? Проведите эти преобразования. Рассмотрите возможные случаи.

VI. Важность существенного повышения качества воспитания учащихся в процессе школьного обучения отмечена в материалах XXV съезда КПСС. Поэтому очевидна необходимость более эффективного использования содержания, методов и процесса решения задач для реализации целей воспитания учащихся через изучение математики в самых широких его аспектах: прикладной направленности обучения, его мировоззренческой направленности, воспитания у школьников интереса к математике,' творческих задатков, нравственных качеств личности и т. д.

Так, например, говоря о воспитании диалектико-материалистического мировоззрения в процессе решения задач, удается наиболее ярко продемонстрировать учащимся политехнический характер математики, прикладную направленность математических абстракций. Иллюстрируя, в частности, процесс применения математики к любой практической задаче, можно показать школьникам, что математика, отражая явления реальной действительности, является мощным средством ее познания.

Предлагая учащимся задачи с избыточной или неполной информацией, мы воспитываем у них готовноеть к практической деятельности. Рассматривая изящное решение той или иной математической задачи, мы способствуем эстетическому воспитанию школьников.

Реализации воспитывающих функций способствует также решение задач, фабула которых связана с планированием развития народного хозяйства на пятилетку, с достижением отечественной науки, техники и культуры. Полезна в этом отношении и постановка задач «с исторической фабулой» и т. д.

На кружковых и факультативных занятиях возможности использования задач в целях развития и воспитания существенно расширяются прежде всего потому, что учитель здесь не так жестко ограничен во времени. Особенно полезны в этом случае «серийные задачи», возникающие из определенной геометрической ситуации. Приведем пример задач, возникающих из рассмотрения шарнирной 'модели четырехугольника. Убедившись вместе со школьниками в подвижности этой модели (нежестко скрепленной в вершинах), учитель побуждает их к выводу о том, что четыре данные стороны не определяют четырехугольник однозначно (фигура «нежесткая»). Затем перед учащимися формулируется сама задача.

З а д а ч а 1. Имеется модель шарнирного четырехугольника со сторонами определенной длины. Какими способами можно придать «жесткость» данной модели четырехугольника, если его вершины не могут быть закреплены. Ответ обосновать.

В ходе обсуждения этой задачи предлагаются различные варианты ее решения, которые проверяются опытным путем, например: скрепить две вершины четырехугольника планкой по диагонали, соединить планкой середины двух противоположных сторон и т. д.

Убедившись на опыте в разумности сделанных предложений, учащиеся приходят к необходимости обосновать тот или иной способ «наведения жесткости». С помощью учителя они приходят к возможности провести это обоснование, переформулировав задачу в виде соответствующей задачи на построение. Если по заданным элементам можно построить единственную фигуру, то ее модель будет жесткой.

Возможность сведения конкретной задачи, определенной на модели, к решению абстрактной геометрической задачи на построение реализует одну из важнейших воспитывающих функций геометрических задач: связь обучения математике с жизнью, т. е. показывает реальное происхождение математических абстракций.

Заметим, что методическую ценность моделирования геометрических фигур всегда подчеркивал известный русский методист G. И. Шохор-Троцкий (например, в своей книге «Геометрия на задачах». Книга для учащихся. М., 1913). В советской методике математики этот прием введения геометрических задач на построение использовался неоднократно и всегда успешно (например, через задачи «на недоступные расстояния»).

Учитывая «свойство жесткости» треугольника, первое из вышеуказанных решений обосновывается достаточно просто. Однако обоснование второго пути решения задачи не столь очевидно. Возникает уже чисто геометрическая, абстрактная задача.

З а д а ч а 2. Построить четырехугольник $A\ BCD$, зная длину его сторон и длину отрезка MN, соединяющего середины сторон AB и DC.

Р е ш е н и е . Допустим, что искомый четырехугольник $A\ BCD$ построен (рис. 10, *а)*. Выполним параллельный перенос (DN) стороны DA и параллельный перенос (CN) стороны CB. Теперь из точки исходят три отрезка NA_{1y} NM и NB_X известной длины.

Нетрудно показать, что точка M является серединой отрезка AB_c. В самом деле, длины отрезков AA_X и BB равны — |Z)C|, а сами отрезки параллельны $[DC\backslash$. Поэтому четырехугольник $A_1AB_1B_1$ является параллелограммом. Точка M — середина его диагонали AB. Поэтому М принадлежит диагонали $A\ B_1$ и является ее серединой.

Итак, в ANA^ известны стороны NA_{1y} NB_X и заключенная между ними медиана. Для того чтобы построить этот треугольник, отметим точку N_{1f} симметричную N относительно M. Очевидно, $\backslash AN\backslash$ =5 lAfBJ. Треугольник NN_1A_1 можно построить по трем известным сторонам:

$|NA_1| = |DA|$, | = $|NB_1|$ = | СВ | и [ЛШ.,] = 2|ЛШ|.

Теперь построим искомый четырехугольник. Делим отрезок NN_X точкой M m два конгруэнтных отрезка. Строим точку B_u

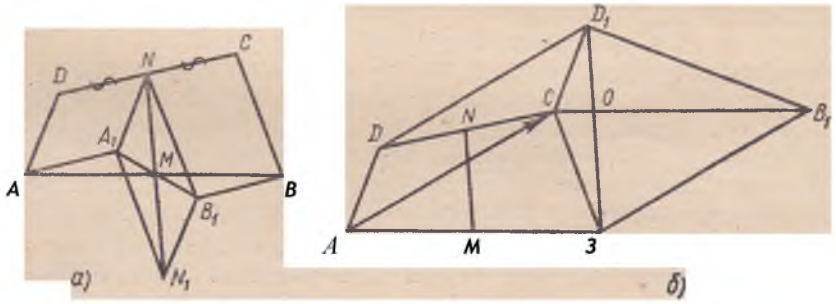


Рис. 10

симметричную A_1 относительно M. По трем сторонам построим треугольники $A_{\pm}MA$ и MBB_1. Перенеся отрезок $A_{г}A$ на вектор A_XN, а отрезок BB_1 на вектор B_xN, получим все четыре вершины "искомого четырехугольника $ABCD$. Нетрудно показать единственность решения задачи.

Усилению развивающих функций задачи способствует последующая постановка задач-аналогов, при решении которых используется некоторый (один и тот же) прием, основанный на применении определенного метода. Так, параллельный перенос элементов фигуры (AC) приводит к построению вспомогательного четырехугольника CBB_1D_1 с весьма интересными свойствами (рис. 10, б), например: четырехугольник $DD_{\pm}B_{\pm}B$ — параллелограмм, стороны которого конгруэнтны диагоналям четырехугольника $A\ BCD$, а углы конгруэнтны углам между этими диагоналями; длины диагоналей вдвое больше длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон $A\ BCD$; расстояния от точки C до вершин этого параллелограмма равны соответственно длинам сторон четырехугольника $A\ BCD$ и т. д.

Многие из этих свойств позволяют решить задачи, аналогичные исходной, создают условия для распространения определенного приема на целый класс задач, способствуя, таким образом, формированию у учащихся способности к обобщению (через анализ).

Таковы, наприхмер, следующие задачи:

З а Д а ч а 3. В четырехугольнике $A\ BCD$ известны длина отрезка MN, соединяющего середины сторон $A\ B$ и CD, длина диагонали Л С и длины сторон AB, BC и AD.

, Является ли данная фигура жесткой?

• З а д а ч а 4. Построить трапецию $A\ BCD$ по данным диагоналям Л С, BD, стороне AD и отрезку MN, соединяющему середины ее оснований.

Рассмотрение этого примера показывает, как достаточно широко можно использовать обучающие, развивающие и воспитывающие функции задач в их единстве. В самом деле, в ходе решения этих задач используются различные свойства геометрических фигур (определяющие разнообразные обучающие функции), активно работают метод параллельного переноса и прием построения вспомогательной фигуры с весьма интересными свойствами, тесно связанными со свойствами заданной (искомой) фигуры (реализуются различные развивающие функции), задача легко моделируется (допускает опытные решения), возбуждает интерес школьников (реализуются воспитывающие функции)'. Задача такова, что может служить источником разнообразных аналогичных задач, многие из которых, как показал опыт, успешно составляются самими школьниками, что способствует формированию у них творческой активности.

По существу каждая из задач (или процесс ее решения) несет в себе ту или иную воспитательную функцию. И,от учителя во мно-

гом зависит эффективность ее реализации. И хотя трудно себе представить существование математических задач только с ведущей воспитывающей функцией, реализация целей воспитания через задачи может и должна быть систематической и планомерной.

Опыт показывает, что успешность в реализации воспитывающих функций математических задач во многом определяется пробуждением у учащихся интереса к данной задаче, возникновением у них устойчивой потребности в ее решении, наличием интереса к самому процессу решения задач. На основе последнего часто возбуждается и формируется интерес учащихся к изучению самой мате!матики и смежных учебных дисциплин, интерес к учению в целом.

Факторы, существенно влияющие на формирование у учащихся устойчивого интереса к решению математических задач, весьма разнообразны. К ним, например, относится доступность предложенной им задачи, внешняя или внутренняя занимательность задачи, осознанная возможность проявить при этом творческую самостоятельность.

- В традиционной методике обучения математике формирование интереса школьников к решению задач в основном проводилось на внеклассных занятиях. Как правило, это осуществлялось через занимательность, необычность, заложенные в фабуле задачи. Математическая сущность задачи часто оказывалась тривиальной. Задачи с такой «внешней» занимательностью не могли всерьез и надолго заинтересовать школьников, тем более что они не были характерны для повседневной, учебной деятельности. Тем самым позитивное воздействие сказывалось лишь на небольшую часть школьников, причем эпизодически и поверхностно.

В современной методике математики наметилась правильная тенденция к сочетанию «внешней» занимательности задачи с занимательностью «внутренней» (заложенной в способе решения задачи, в возхможности проявить сообразительность в ходе ее решения, шире и глубже изучить тот или иной математический факт). Такие задачи начали проникать в учебники математики, например в учебники математики для 4—5 классов, и тем самым в процесс * изучения программного материала.

Укрепление этой тенденции и ее дальнейшее развитие (например, через увеличение числа учебных задач с прикладной направленностью при изложении каждой темы курса математики средне^ школы) является одним из необходимых условий повышения качества воспитывающего и развивающего обучения математике и, кроме того, еще одним важным требованием к современному учебнику математики.

Не существует, наверное, ни одного математика, интерес которого к этой науке сформировался бы помимо решения задач. Еще в XVII в. Р. Декарт в своем произведении «Избранные произведения» (М., 1950, с. 19) писал: «Мы никогда, например, не сделаемся математиками, даже зная наизусть все чужие доказательства, если наш ум не способен самостоятельно разрешать какие бы то ни было

проблемы». Поэтому формирование интереса школьников к решению задач (и к математике, как таковой) наиболее эффективно осуществляется через приобщение учащихся посредством решения задач к учебной математической деятельности творческого характера, через воспитание у них вкуса к такой деятельности.

В этом случае возникший у школьников интерес становится внутренней чертой их личности, он переносится ими на изучение махематики, способствует воспитанию многих личностных качеств, отвечающих целям современного воспитания. Такую работу необходимо и возможно проводить не только во внеурочное время, но и в ходе непосредственного изучения программного материала.

VII. Задачи находят широкое применение в процессе контроля и оценки математических знаний, умений и навыков. Однако использование задач в качестве важного средства, контролирующего математическое развитие учащихся, почти не имеет места. Между тем в современных условиях обучения математике последнее не только необходимо, но и возможно. Объективная оценка состояния математической подготовленности школьников невозможна без учета результатов, характеризующих развитие их-математического мышления.

Возможность контроля и оценки уровня математического развития школьников обусловлена тем, что многие задачи (а тем более специально подобранные) через свое содержание или процесс решения реализуют определенные развивающие функции. Успешность реализации этих функций в ходе самостоятельного решения задач учащимися может служить одним из показателей развития математического мышления. "

Выступая в качестве основного средства контроля и оценки уровня математической подготовки учащихся на том или ином этапе. обучения, математические задачи, как правило, предлагаются учащимся в комплексе, называемом контрольной (или самостоятельной) работой.

Контрольную работу по математике следует считать подготовленной (и ожидать от ее проведения эффективных результатов), если наряду с подготовленным текстом четко определены: а) основная цель данной контрольной работы, б) сравнительная дидактическая значимость каждой составляющей ее задачи, в) конкретные функции всех задач, составляющих ее содержание, г) схема предстоящего анализа работы, д) возможные решения всех ее задач (оформленные на уровне, ожидаемом от учащихся), е) необходимые и возможные меры ликвидации ожидаемых пробелов в знаниях и опыте учащихся.

Особо важное значение имеет определение функций каждой задачи, входящей в содержание контрольных и проверочных работ. Ведь нередко бывает и так, что успешность усвоения той или'иной темы школьниками определяется (и оценивается) учителем по числу решенных ими задач из общего числа задач контрольной работы.

Ясно, что такой критерий оценки усвоения той или иной темы не является объективным. Оценка результатов будет более объективной, если учитель четко установил значимость каждого задания контрольной работы, определил содержание контролирующей функции каждого задания. В этом случае не исключена возможность удовлетворительной оценки знаний и при успешном- решении одной задачи, если эта задача предполагает проверку усвоения ведущих знаний, умений и навыков школьников по данной теме курса, т. е. через нее реализуются важнейшие обучающие функции.

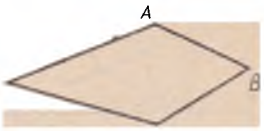


Рис. 11

Конечно, определение локальных целей проверки знаний, реализуемых в той или иной контрольной работе, можно сделать централизованно. Однако учителю важно уметь это делать и самому.

Проиллюстрируем, что здесь имеется в виду, на конкретном примере. Рассмотрим один из вариантов контрольной работы по геометрии для 6 класса:

1. Выполните рисунки по данному условию:

$$IAB)[)[CD) = 0.$$

2. Запишите, используя принятые обозначения, величины углов ABC и DMK, если данные углы конгруэнтны.

3. Дано: $\backslash AB\backslash = \backslash BC\backslash$,

$$../-.DBA\ Z\text{-}DBC \text{ (рис. 11).}$$

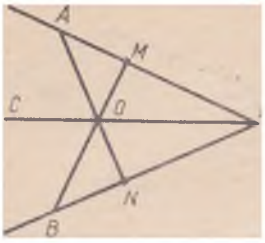
Пользуясь рисунком и записью условия задачи, выполните задание: докажите, что $ID\ B)$ — биссектриса угла $CD\ A$.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка M и проведена прямая AM.

а) Постройте треугольник Л^Сх, симметричный треугольнику ABC относительно прямой AM.

б) Обозначьте и укажите с помощью символической записи фигуру, являющуюся пересечением треугольника ABC и его образа.

Задачи этой контрольной работы по геометрии позволяют проверить следующие знания и умения школьников: понимание (и умение прочесть) символической записи, выражающей теоретико-множественную операцию (пересечение) между геометрическими фигурами (2-я задача), умение записать математическое предложение, заданное словесным текстом на языке математической символики (2-я задача), умение применить признак биссектрисы угла, умение применить один из общих способов доказательства конгруэнтности углов (основанный на признаках конгруэнтности треугольников или на свойствах перемещений — осевой симметрии), строить дедуктивную «цепочку» умозаключений, записывать ход доказательства, используя символику (3-я задача), умение выполнить задание комплексного характера, строить фигуру, симметрич-



ную данной относительно данной прямой, применять свойства симметрии, умение находить пересечение и объединение фигур, изображенных на чертеже, умение применять символику для записи того, что некоторая фигура получена в результате объединения или пересечения двух других фигур (4-я задача).

Вышеуказанный перечень представляет совокупность конкретных . контролирующих функций задач данной работы. Заметим, что данные задачи реализуют в основном обучающие функции; развивающие функции этих задач не представлены в явном виде и потому не входят в число контролирующих функций задач данной работы.

При подборе комплекса математических задач с целью контроля и оценки знаний, умений и навыков по любому разделу курса математики в содержание (или в предполагаемый способ решения) некоторых задач необходимо включать элементы, дающие возможность проверить уровень владения школьниками теми или иными мыслительными умениями, входящими в состав математического мышления.

Вот несколько примеров таких задач:

1. Рассмотрите рисунок (рис. 12). При каком условии задачи можно доказать, что N — $S'CD)$ (М)? (Никакие новые элементы на рисунке не должны вноситься.)

2. Сколько различных пар конгруэнтных отрезков можно составить из сторон шестиугольника, имеющего ось симметрии?

3. Найдите такие расположения четырех точек на плоскости, при которых различные расстояния между ними имеют лишь два значения. Изобразите с помощью рисунков свои выводы.

Для успешного решения каждой из данных задач недостаточно знаний соответствующего теоретического материала. Необходимо проявить определенные качества мышления: гибкость мышления, умение выделять существенное, глубину мышления. Учитель может судить об уровне развития учащихся по числу и характеру найденных решений. Так, например, решением третьей задачи может быть множество вершин квадрата, ромба с углом 60°.

Следует отметить, что в практике школьного обучения геометрии (за исключением этапа проведения экзаменов) контролю знаний и развития учащихся (и в том случае, когда он осуществляется через задачи) присущ обучающий и воспитывающий характер. Поэтому в различного рода контрольных и проверочных работах следует учитывать этот побочный, но весьма важный эффект и соответствующим образом его использовать. И если для практики школьного обучения математике справедливо требование «Обучая, развивать и воспитывать», то не менее справедливо и положение: «Контролируя, обучать, воспитывать и развивать».

VIII. Одной из тенденций современного школьного курса математики является тенденция на сближение алгебры и геометрии: в обучение алгебре проникают чисто геометрические приемы (например, преобразования графиков), в обучении геометрии успешно используются алгебраические методы решения различных задач. При этом речь идет не только о решении традиционных задач на вычисление, сводимом к решению соответствующих уравнений или неравенств, но и о реализации возможностей использования алгебры при решении других геометрических задач (например, задач на доказательство).

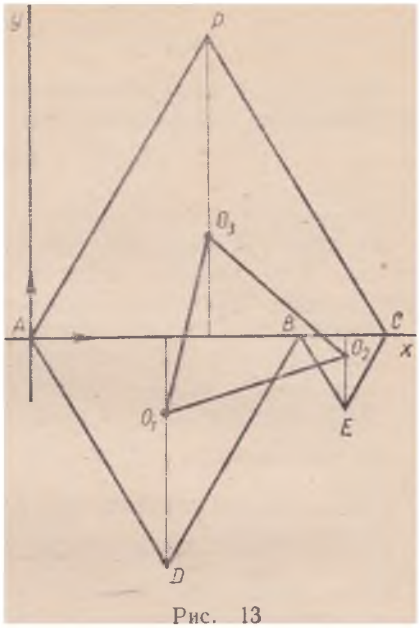


Рис. 13

После изучения теоремы Пифагора полезно поставить перед учащимися задачу об определении расстояния между двумя точками плоскости, заданными своими координатами.[1]

Решение этой задачи не только проиллюстрирует применение теоремы Пифагора и позволит повторить соответствующий алгебраический материал, но и даст учащимся возможность для успешного использования алгебраического метода при решении геометрических зада^

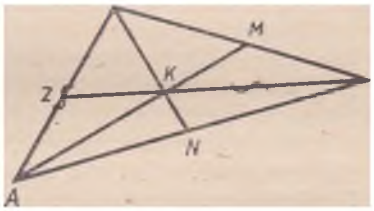


Рис. 14

Применение формулы $d \sim= V\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - >'i)^2$ полезно рассмотреть при решении соответствующих задач, например при решении следующей: «Точки Л, 5, С принадлежат одной прямой; точка B лежит между точками A и С. По одну сторону прямой AC построены равносторонние треугольники ABD и BCE, а по другую — равносторонний треугольник ACP. Доказать, что центры этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника».

Решение этой задачи можно провести так.[1]

Примем прямую AC за ось абсцисс, а точку Л —за начало координат. Обозначим длину стороны $AABD$ через $2a>$ а длину стороны $A\ BCE$ через 2Ъ. Вычислив координаты центров треугольников $0_X 0_2 0_3$ (рис. 13), получим соответственно:

Вычисление квадратов расстояний между центрами данных треугольников показывает, что

$$|OAb = \backslash O_1O_3\backslash = |O_2O_3|.$$

Приведем еще один пример.

«В треугольнике ABC две его медианы взаимно перпендикулярны. Доказать, что величина угла треугольника, образованного соответствующими сторонами, меньше 45°».

Решение этой задачи можно провести так.

Пусть [ВАЛ и $[AM\backslash$ — данные медианы (рис. 14), K— точка их пересечения, CL — третья медиана. Тогда $\backslash CK\backslash$ = 2 $\backslash KL\backslash$ = = $\backslash AB\backslash$. Поэтому |С/С| > $\backslash AK\backslash$ и $\backslash CK\backslash > \backslash BK\backslash$.

Из треугольников ACK и BCK находим: $ACK < CAK, BCK <$

$< CBKy$ откуда следует, что $ACB < CAK + CBK,$ или $AC\ B <$

$< CAB + CB\ A$ — 90°, или ACB < 90° — $ACB.$ Поэтому 2 $ACB <$

< 90° и ЛСВ < 45°.

Алгебраический метод решения геометрических задач может успешно применяться в достаточно широком «диапазоне задач», например, для доказательства:

перпендикулярности биссектрис двух смежных углов,

коллинеарности биссектрис двух вертикальных углов,

равенства длины высоты равностороннего треугольника сумме расстояний любой его внутренней точки до сторон,

метрических. соотношений в прямоугольном треугольнике,

свойств отношения периметров подобных фигур.

Особого внимания заслуживает использование элементов векторной алгебры. Используя векторный аппарат, можно доказать ряд интересных и отнюдь не тривиальных геометрических предложений, успешно решать разнообразные задачи прикладного характера.

Ограничимся здесь рассмотрением лишь одного примера, так как векторному методу решения задачи посвященд специальная часть данной книги.

З а д а ч а . На сторонах $AABC$ построены параллелограммы ЛВB_2Л$_1$,.ВСC_2В$_1$, $ACC_гA_2$ (рис. 15). Можно ли построить треугольник, стороны которого конгруэнтны отрезкам $[B_1$В$_2$], [CVCJ,

[ли,]?

Рассмотрим решение этой задачи векторным методом. Пусть ситуация задачи изображена на рисунке 16. По свойству суммы векторов, представленных замкнутой ломаной, имеем:

' $Аг$ 4

Рис. 15 Рис. 16

Используя сочетательное и переместительное свойства сложения векторов, получим:

^2^1 + QA “Ь ^2^1 "Ь (^1^2 "Ь ^1^2 “Ь'^Г^г) = О*

Так как

$$AJ3_2 = AB,\ B\$_2 = \text{ВС},\ \text{С}^2 = \text{ОД}$$

а ЛВ + ВС + $C\ A$ = 0, то сумма векторов, записанная в скобках, также равна нулю.

Поэтому $B_2B_{\pm} + C_2C_1 + Л_2Л_X = 0$, но тогда $B_2B_г = C_XC_2$ — — A_2A_x. Мы видим, что любой из данных трех векторов можно представить в виде разности двух других. Если эти векторы неколлинеарны, то требуемый треугольник существует. Только два из трех данных векторов не могут быть коллинеарны, так как тогда и третий вектор будет с ними коллинеарен (как сумма двух коллинеарных векторов).-

Однако возможен случай, когда все три вектора коллинеарны. В самом деле, если за вершину A_{lt} например, третьего параллелограмма принять любую точку прямой, параллельной (CiC_2), то в этом случае получим (рис. 17):

$$B^B_1 = BJB + BB_1 = XA + CC_2 \text{-(ЛИ, + 4Л)+} (CC[+ \text{ОД} =$$

$$— (Л_XЛ_2 + C_XC_2> + (Л_2Л \text{-f-} CC_X) = A_{\pm}A_2 \text{-j-} C_1C_2.$$

Итак, $_1$^$_2$^!| = IЛ!$Л_2$1 + |C_XC_2| и требуемый треугольник не существует. Таким образом, построение этого треугольника возможно лишь тогда, когда векторы, соответствующие названным в условии отрезкам, неколлинеарны.

В ходе решения многих геометрических задач возникает ситуация, когда данные об искомой фигуре разобщены, не связаны конструктивно в одно целое.

В этом случае путем преобразования одних фигур в другие (отображеция одной фигуры на другую) можно обнаружить скры-

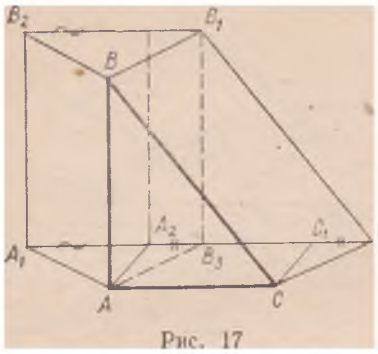


Рис. 17

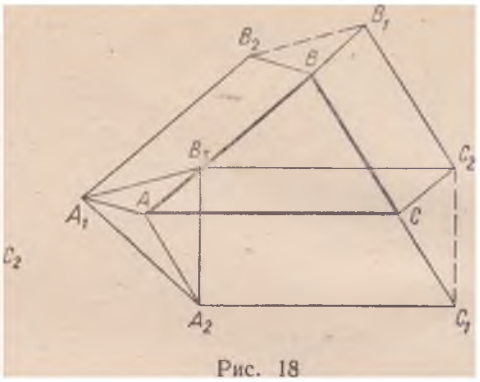


Рис. 18

тые связи, выразить их конструктивно. Такой подход к решению задач показывают методом геометрических преобразований; его применение нередко сразу приводит к цели.

Проиллюстрируем сказанное только одним примером, так как подробнее вопрос о применении геометрических преобразований к решению задач также рассмотрен в специальной части этого пособия.

Рассмотрим решение предыдущей задачи (о возможности построения треугольника) методом параллельного переноса.

Пусть векторы B_1B_{2y} C_1C_2, $Л_XЛ_2$ неколлинеарны. Выполним параллельный перенос AC треугольника CC_2C_2 (рис. 18). Тогда* $1CC_21 -> 1AB_31$ [ОД-МЛЛ,! и $[C_2C_2\backslash - + 1A_2B_9]$.

В самом деле, [ВВJ || [CC_2] и $[BB_X\backslash$ ^ [$CC_2$1; $[AB_31$ || и $[AB_31$ ^ $[B_2B_X$I. По транзитивности отношений параллельности и конгруэнтности, имеем: $[CC_2\backslash$ || $[AB_3]$ и [CC_2] ^ [$ЛВ_a$].

Но тогда [C_2CJ [$B_3Л_2$].

Выполнив затем параллельный перенос BA треугольника BB_2B_{1y} получим окончательно: B_2 -> A_{1f} B_2 -> B_3, C_2 -> B_3, C_x-> $Л_2$, и, таким образом, $ЛЛ_1B_3Л_2$ будет иметь стороны, конгруэнтные отрезкам B_2B_{1y} C_2C_{1y} A_2A_2.

В момент изучения школьниками тех или иных преобразований бывает затруднительно применить данное преобразование к решению содержательных задач. Однако в дальнейшем следует систематически использовать изученные преобразования при решении задач курса геометрии, накапливать у учащихся опыт в применений метода геометрических преобразований.

IX. Сформулированные выше методические рекомендации к эффективному использованию задач в процессе обучения геометрии могут быть выражены определенной системой требований к отбору задач по каждому разделу (теме) школьного курса геометрии.

Сформулируем в обобщенном виде важнейшие из этих требований (в форме вопросов, на которые учитель должен иметь четкий и ясный ответ).

Соответствует ли отобранный комплекс задач основным целям изучения раздела курса? Могут ли быть через него реализованы основные (для данной темы курса математики) обучающие функции?

Достаточен ли выделенный объем заданного материала для его эффективного использования всеми учащимися в течение того времени, которое запланировано на решение задач?

В какой мере и каким образом могут быть реализованы развивающие функции той или иной задачи? Как они согласуются с ее конкретными обучающими функциями?

Достаточно ли представлена в отобранном комплексе задач возможность осуществить воспитание учащихся в процессе изучения данной темы курса математики? Каково соотношение абстрактного и конкретного (теории и практики), проявляющееся в ходе решения каждой задачи? Как реализуется через эти задачи связь обучения математики с жизнью?

В какой мере при решении данных задач будут использованы знания и опыт учащихся? Какое позитивное приращение знаний и опыта получат учащиеся в результате их решения?

Отвечает ли данный задачный материал цели возбуждения и развития интереса учащихся к изучению данной темы и к математике в целом?

В какой мере в процессе решения данных задач учащиеся смогут проявить самостоятельность, элементы творческой деятельности, осуществить самоконтроль, самовоспитание?

Может ли (и в какой форме) осуществляться качественный контроль математических знаний и развития учащихся посредством отобранного комплекса задач (или ему аналогичного)?

В какой форме и с какой полнотой предполагается оформление решения той или иной задачи?

Выполнение учителем этих требований повысит роль и место задач в современном обучении геометрии, а значит, и эффективность развивающего и воспитывающего обучения геометрии в целом.

О МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Г. И. Саранцев

С включением в школьную программу геометрических преобразований, векторов и понятия о координатном методе изменились способы решения геометрических задач. Ранее основным средством решения задач являлись признаки конгруэнтности и признаки подобия треугольников. Например, для доказательства конгруэнтности отрезков $A\ B$ и CD отыскивали (или строили) два треугольника, сторонами которых являлись соответственно отрезки $A\ B$ и CD. Используя признаки конгруэнтности треугольников, доказывали конгруэнтность рассматриваемых треугольников, из чего следовала конгруэнтность их элементов, в частности отрезков AB и CD. Современная методика доказательства конгруэнтности фигур использует свойства геометрических преобразований. Например, для доказательства конгруэнтности отрезков AB и CD находят перемещение, при котором $[AB]$ $[CD]$. Для доказательства параллельности прямых (или отрезков) ранее использовались признаки параллельности прямых. Теперь же для этого достаточно показать, что векторы; задающие эти прямые, коллинеарны. А для нахождения расстояния $\backslash AB\backslash$ удобно вычислить скалярное произведение $AB \bullet AB$, так как $|\ AB\ ] = У"AB \bullet AB$.

Рассмотрим конкретные примеры решения задач различными методами.

§ 1. Обучение решению задач методами геометрических преобразований

Задача 1. Через центр O параллелограмма $ABCD$ проведена прямая $/$, пересекающая стороны BC и AD параллелограмма соответственно в точках M и N. Докажите, что $\backslash BM\backslash - \backslash DN\backslash$.

Решение (традиционное). Отрезки BM и ND являются сторонами треугольников BMO и OND. (Чаще такие треугольники приходится строить, что значительно осложняет решение задачи. Мы намеренно выбрали простую задачу, чтобы показать сущность самого принципа.) Треугольники BMO и OND конгруэнтны, так как $\backslash\ B0\backslash = \backslash 0D\backslash$ (свойства диагоналей параллелограмма), $MBO =$

= *NDO* (накрест лежащие углы при параллельных прямых),

BOM == *NOD* (вертикальные углы). Следовательно, *BM*\ == |LW|.

Р е ш е н и е (используя свойство геометрических преобразований). Точка *O* — центр симметрии параллелограмма *A BCD*. Тогда Z_0 *(B)* — Z), Z_0*(M)* = *N,* так как АГ = *(MO)* П UM). Следовательно, |ЯМ| — 1РЛП.

З а д а ч а 2. Докажите, что прямая, содержащая точку *O* пересечения диагоналей трапеции *ABCD* и точку *M* — середину основания *BC y* пересекает второе основание *AD* трапеции *A BCD* в точке *N,* являющейся серединой основания *AD.*

Р е ш е н и е (традиционное).

А *BMO*™ *ADNO* (Z. *OBM* & Z. *ODN*$_y$ Z. *BOM* ^ Z. АЮ£>),

следовательно, J 1 = |*BM*| |OM| / *ND*\ |o,VI

Аналогично из подобия треугольников *MOC* и *AON* имеем: JMC =

— |*OM*| o / *ON*\ 1 Значит, *BM* | / | *ND* | 1^1 |MC| / | *AN* |, или 1 но |*BM*\ / I MC | = 1, |*ND*| *BM*\ \ / I *AN* | |MC

следовательно, = 1, т. е. *N* — середина отрезка *AD.*

Р е ш е н и е (используя свойства геометрических преобразований). Рассмотрим гомотетию с центром О, при которой *[BC]* ->

[AD]. Образ *M*' точки *M* принадлежит как отрезку *AD (M* £ 6 *[BC]),* так и прямой МО, т. е. М' = *(MO)* f| *IAD],* а потому *M*' = = *N.* Так как гомотетия сохраняет отношение расстояний, то

|Л#| |СМ| / | *ND* | \~*MB* | =1, т. е. *N* — середина отрезка *AD.*

Из приведенных задач видно, что решения, основанные на свойствах геометрических преобразований, значительно проще.

Геометрические преобразования дают ключ к решению многих конструктивных задач, чего нельзя сказать о признаках конгруэнтности или подобия треугольников. Рассмотрим задачи.

1. Впишите в данный острый угол треугольник наименьшего периметра так, чтобы две его вершины принадлежали сторонам угла, а третья — данной точке внутренней области угла. Ее решение основано на свойствах осевой симметрии. Строим точки $M_г$ и M_2, симметричные данной точке *M* относительно прямых, содержащих стороны данного- угла. Точки пересечения отрезка M_1M_2 со сторонами угла являются вершинами искомого треугольника. Периметр полученного треугольника равен длине отрезка M_xM_{2y} периметр любого другого треугольника, одной из вершин которого является точка УИ, а две другие принадлежат сторонам данного угла, равен длине ломаной, соединяющей точки *M*± и⁴ M_2.

Метод, основанный на признаках конгруэнтности треугольников, в данном случае является «беспомощным».

2. Впишите в данный треугольник другой треугольник, стороны которого были бы параллельны трем данным прямым.

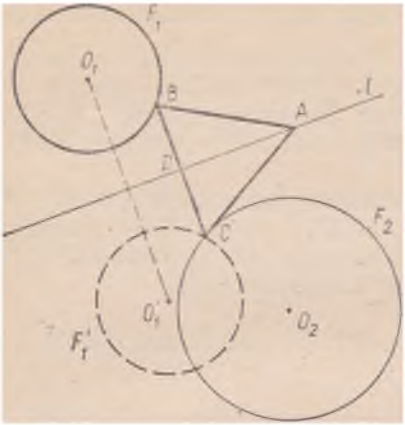


Рис. 1

Эффективным средством решения данной .задачи является метод гомотетии. Вначале следует построить треугольник так, чтобы его стороны были параллельны данным прямым, а две вершины принадлежали сторонам данного треугольника. Построенный треугольник отображаем гомотетией с центром в вершине данного треугольника так, чтобы все вершины оказались на сторонах треугольника.

Итак, методы геометрических преобразований позволяют решать большинство задач на доказательство, построение и вычисление.

Наличие необходимых знаний еще не является достаточным условием успешного использования их на практике, для этого необходимо овладеть умениями использовать знания в конкретных ситуациях. В исследованиях советских психологов Н. А. Менчинской, Е. Н. Кабановой-Меллер и других делается вывод о том, что знания сами по себе не превращаются в умения, для этого нужна специальная работа [1, 7].

Поэтому формированию умения использовать геометрические преобразования при решении задач (доказательстве теорем) должно быть уделено самое серьезное внимание.

Для разработки методики формирования умения необходимо выявить его компоненты, что позволит осуществить поэлементное формирование этого умения.

Компоненты умения в использовании метода геометрических .преобразований могут быть выявлены путем анализа решения конкретных задач. В процессе этого анализа выявляются элементарные умения, которые и являются компонентами умения использовать геометрические преобразования при решении задач.

Рассмотрим примеры.

/. Задачи, решаемые методом осевой симметрии

З а д а ч а 1. Даны две окружности и прямая L Постройте равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины принадлежали данным окружностям, а одна из высот — прямой I.

Р е ш е н и е . Предположим, что А ABC искомый (рие. 1). Так как высота AD равностороннего треугольника ABC принадлежит прямой /, то точки B и C симметричны относительно этой прямой и лежат на данных окружностях (умение строить на произвольных окружностях точки, симметричные относительно данной прямой).

Если точка *С* принадлежит окружности F_2 и симметрична точке В, принадлежащей окружности F_{ly} относительно прямой /, то точка С принадлежит также и образу окружности F_1 при симметрии относительно прямой *I*. Следовательно, точка С есть общая точка окружности F_2 и образа окружности $F_{\pm}$ при симметрии S_{l}. Построив окружность *Fи* являющуюся образом окружности F_1 (умение строить образ окружности при осевой симметрии), найдем точку С.

Затем строим точку *В* как образ точки *С* при симметрии S_h учитывая, что *С* принадлежит окружности *F[* и $F_{\pm}$ симметрична *F[* (умение строить симметричные точки на заданных симметричных окружностях).

Последовательность операций, выполняемых при решении этой задачи, такова: а) строим образ окружности при симметрии S_L\ б) находим точки пересечения окружностей *F[* и F_2; в) отыскиваем на окружности F_x прообразы точек пересечения окружностей *F[* .и F_2; г) строим равносторонний треугольник *ABC (A* ё /).

Задача может иметь: а) единственное решение, когда F_2 П П *F[* = С; б) два решения, когда F_2 f| *F[* = *{M\ K}* в) бесконечное множество решений, когда *F[* = F_2. Задача не имеет решений, когда F_2 П *F* = 0.

Итак, чтобы решить задачу, учащиеся должны владеть следующими умениями: а) строить образ окружности при осевой симметрии; б) выделять соответственные при осевой симметрии точки на соответственных при той же симметрии окружностях; в) строить симметричные относительно прямой точки на произвольных заданных окружностях*.

З а д а ч а 2. Окружность $F_{\pm}$ пересекает концентрические окружности F_2 и F_s соответственно в точках^Л, *В* и С, D. Докажите, что хорды *А В* и *CD* параллельны.

Р е ш е н и е . Пусть *О* — центр окружности $F_{\pm}$ *и* $O_г$ — центр окружностей $F_{\pm}$ и F_2. И пусть $F_{\pm}$ П F_2= *{A* B}, П = = {С; *D).* Тогда (OO_x) — ось симметрии фигуры *F* — F_x *\J,*F_2 U U F_s (умение «видеть» ось симметрии).

Так как *А* 6 F_x f| F_{2y} а S_0o_t (F_t П ^$_2$) = ^{F}*i* П *Fz>* то 5оо^(Л) € F_x П ^**2**» ^{T*} $^{e-}$ *Soc*(Л) =^{F} *В* (умение «видеть» соответственные точки на соответственных фигурах).

Аналогично *Soo,* (С) = *D.* Так как *1AB* JL [00_x> и *[CD]* _L ± (OO_x), то *[AB]* | | *[CD],*

Анализируя решения этих и других задач, решаемых методом осевой симметрии, приходим к выводу, что овладение этим методом требует формирования следующих умений: а) строитьобразы фигур при осевой симметрии; б) «видеть» симметричные относительно прямой точки на симметричных относительно этой же прямой фигурах; в) строить ось симметрии; г) находить симметричные относительно прямой точки на произвольных заданных фигурах.

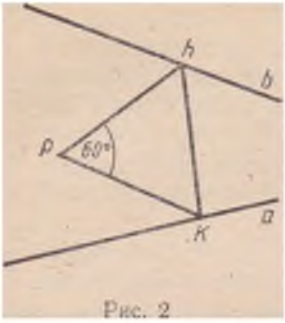


Рис. 2

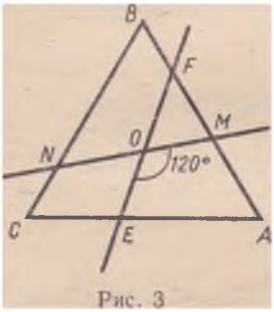


Рис. 3

II. Задачи у решаемые методом поворота

З а д а ч а 3. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы одной его вершиной была точка *P*, другая принадлежала прямой а, третья — прямой *Ь*.

Р е ш е н и е . Пусть Д *PKL* искомый (рис. 2). Тогда точки *K* и *L* находятся на равном расстоянии от точки *P*, принадлежат прямым *a и b* соответственно и «видны» из точки *P* под углом 60°. (Их построение обеспечивается умением выделять на заданных фигурах соответственные при данном повороте точки.)

Так как точка *L* является образом точки *K* при повороте вокруг точки *P* на 60°, то она принадлежит образу прямой *a* при указанном повороте (умение строить образы фигур при повороте), т. е. точка *L* есть общая точка прямой $a^1=Rf^{+\circ}$ *(a)* и прямой *Ь*. Точка *K* является прообразом точки *L*.

Если $b = Rf^{\circ}$ (а), то задача имеет бесконечное множество решений. В остальных случаях задача имеет не более двух решений, так как прямая *b* имеет не более одной точки пересечения с прямой a' и не более однойточкипересечения с прямой a^4 — $R\sim\wedge 0°$ *(a).*

З а д а ч а 4.Через центр *O* правильного треугольника*ABC* проведены две прямые, образующие между собдй угол в 60°. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, конгруэнтны.

Р е ш е н и е . Для доказательства конгруэнтности отрезков мы должны найти перемещение, при котором один из отрезков отображается на другой. Так как угол между прямыми, подмножествами которых являются указанные отрезки, равен 60°, то естественно рассмотреть поворот вокруг точки О. Учитывая, что поворот вокруг точки *O* на 120° отображает треугольник на себя, приходим к целесообразности рассмотрения поворота вокруг точки *O* на 120°. При рассматриваемом повороте *A* В, В-^С, С->Л, *1AB]* -+ -+*1BC],* [£С]->[СЛ], *[CA]-+[AB].* Точка *E* ё *[AC]* (рис. 3)

отобразится на точку *M*, точка *F* € *[AB]* — на *N* £ [ВС] *(EOM* =

— 120°, *FON* — 120°, поворот сохраняет пересечение фигур). Следовательно, I/7/:] -> *[NM],* Значит, Iff] ^ [ЛШ].

Итак, мы видим, что овладение этим методом требует формирования таких умений: а) строить образы фигур при повороте;
б) находить соответственные при повороте точки на соответственных при этом же повороте фигурах; в) «видеть» центр поворота; г) стро-

Рис. 4 Рис. 5

ить соответственные при повороте точки на произвольно данных фигурах.

III. Задачи, решаемые методом параллельного переноса

З а д а ч а 5. Даны две окружности F_{ly} F_2 и прямая *I*. Проведите прямую, параллельную прямой /, на которой окружности F_x и F_2 высекают конгруэнтные хорды.

Р е ш е н и е . Пусть прямая *V* искомая, т. е. прямая *V* высекает на данных окружностях конгруэнтные хорды *AB* и *A'B'* (рис. 4). Тогда точки *A* и Л', В и *B'* можно рассматривать как соответственные при параллельном переносе: О $_x$ О i (умение строить соответственные точки на любых заданных фигурах).

Так как точка *A'* является образом точки Л, принадлежащей окружности F_u то точка Л' принадлежит образу окружности F_x. Следовательно, Л' — общая точка окружности F_2 и образа окружности F_x при параллельном переносе $0_{\pm}0\{$ (умение строить образы фигур при параллельном переносе).

Построив точку Л', находим на окружности F_L ее прообраз (умение выделять соответственные при повороте точки на соответственных при том же повороте фигурах).

Если $F_2 = O_xO[\ (F_L)_f$ то задача имеет бесконечное множество решений. В остальных случаях задача имеет не более четырех решений, так окружность F_2 имеет не более двух точек пересечения с окружностью $F[= O_xOl\ (F_x)$ и не более двух точек пересечения с окружностью $F\backslash = 0[0_X\ (F_x)$.

З а д а ч а 6. Расстояние между центрами двух пересекающихся окружностей равных радиусов равно *d*. Прямая, параллельная линии центров, пересекает первую окружность в точках Л и В, вторую — в точках *C и D*. Найдите длину отрезка *AC* (рис. 5).

Р е ш е н и е . Обозначим центры данных окружностей через Oj и 0_2. Тогда параллельный перенос 0_X0_2 (умение выделять элементы, определяющие параллельный перенос) отобразит окружность с центром O_x на окружность с центром 0_2 (умение строить образы фигур при параллельном переносе). Точка Л при этом переносе перейдет в точку С, а точка В — в точку *D* (умение видеть

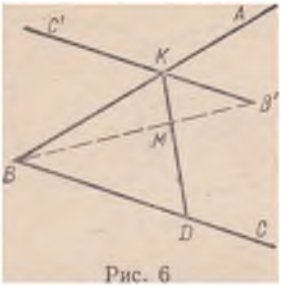
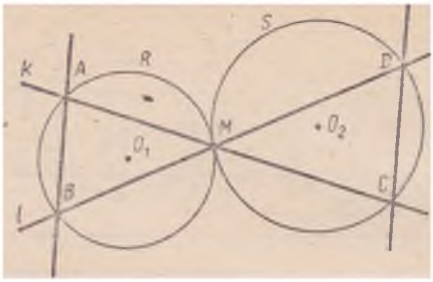


Рис. 6



соответственные при параллельном переносе точки на соответственных при том же переносе фигурах). Следовательно, $|AC| == |BD| = \backslash O_1O_2\backslash = d$.

Нетрудно видеть, что овладение методом параллельного переноса требует формирования таких же умений, которые необходимы для решения задач методами симметрии и поворота.

IV. Задачи, решаемые методом гомотетии

З а д а ч а 7. Дан угол *ABC* и внутри него точка *M*. Проведите через точку *M* прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный внутри угла ЛВС, делился точкой *M* в отношении 1 : 2.

Р е ш е н и е . Пусть отрезок *KD* искомый, т. е. $|KM|:|MD| = 1:2$ (рис. 6). Тогда гомотетия H ^ отобразит точку *D* на точку *K* (умение выделять элементы, определяющие гомотетию). Так как *D*£ [BC), то [B'C'), где $[B'C') = H\sim T$ ([BC)) (умение строить образы фигур при гомотетии и «видеть» соответственные при гомотетии точки на соответственных фигурах). Следовательно, K ==. = *1BA)* П [B'C'). Построив точку /С, найдем на [BC) точку *D*, являющуюся прообразом точки *K* при гомотетии $H_M{}^2$.

З а д а ч а 8. Через точку *M* касания окружностей F_t и F_2 проведены секущие *k* и /, пересекающие окружность F_u кроме точки М, в точках Л и В, а окружность F_2 — точках С и *D*. Докажите, что прямые Л В и *CD* параллельны.

Р е ш е н и е . Две окружности, касающиеся в точке М, гомотетичны относительно этой точки (умение выделять центр гомотетии). Рассмотрим гомотетию, при которой F_l-+F_2 (умение видеть образ данной фигуры).

Эта гомотетия отобразит точку Л на точку С (рис. 7), а точку В на точку *D* (умение видеть соответственные при гомотетии точки на соответственных при той же гомотетии фигурах).

Используя свойства гомотетии, получаем: (ЛВ) (| *(CD)*.

Таким образом, овладение методом гомотетии требует формирования следующих умений: а) строить образы фигур при гомоте-

тии; б) находить соответственные при гомотетии точки на соответственных при той же гомотетии фигурах; в) выделять элементы, определяющие гомотетию (центр гомотетии и ее коэффициент); г) строить соответственные при заданной гомотетии точки на произвольных фигурах.

Анализ решения задач методами симметрии, поворота, параллельного переноса и гомотетии позволил выделить те умения, овладение которыми будет способствовать формированию умений решения задач методом геометрических преобразований. Учащиеся должны уметь:

а) строить образы фигур при симметрии, повороте, параллельном переносе и гомотетии;

б) видеть соответственные при указанном отображении точки на соответственных при том же отображении фигурах;

в) выделять элементы, определяющие отображение: ось симметрии, центр поворота, угол поворота, направление параллельного переноса и его расстояние, центр и коэффициент гомотетии;

г) строить соответственные при указанном отображении точки на произвольных фигурах.

Исходя из указанных умений, можно выделить следующие виды задач, способствующие овладению методом геометрических преобразований:

1) задачи на построение образов фигур при указанном отображении;

2) задачи на выделение соответственных при отображении точек на соответственных при том же отображении фигурах;

3) задачи на выделение элементов, определяющих отображение;

4) задачи на построение соответственных при отображении точек на любых заданных фигурах.

Умение решать задачи каждого следующего вида существенно зависит от навыка решать задачи предыдущего вида. При переходе к последующему виду задач учащиеся поднимаются на новую, более высокую ступень в усвоении идеи метода геометрических преобразований.

Остановимся на характеристике указанных видов задач.

I. *Задачи на построение образов фигур при указанном отображении*

В 5 классе учащиеся знакомятся с некоторыми видами перемещений, решают задачи на построение. Однако на этом этапе у учащихся вырабатываются наглядные представления о центральной симметрии, осевой симметрии и параллельном переносе, логические обоснования выполняемым построениям не даются. В VI классе углубляются, систематизируется полученные ранее знания, учащиеся знакомятся с новыми свойствами отображений. При решении задач на построение следует обращать внимание на обоснование выполняемых построений, на их рационализацию.

К атому виду задач можно отнести задачи на распознавание среди множества пар фигур тех, которые могут быть получены

/ Рис. 8 , Рис. 9

одна из другой с помощью отображения, на достраивание образов фигур, а также задачи, в которых используются свойства отображений для практических целей, например утверждение, что прямая, которой принадлежит биссектриса угла, является осью симметрии точек, лежащих на сторонах этого угла на равном расстоянии от его вершин, может быть использовано для построения биссектрисы угла с помощью масштабной линейки.

Задачи на распознавание способствуют не только усвоению свойств отображений, созданию наглядных представлений, но и формированию умения классифицировать фигуры.

При решении задач на распознавание следует перед учащимися ставить вопросы, выясняющие понимание ими сути, например: почему данные отрезки можно считать соответственными при параллельном переносе? (Эти отрезки параллельны и длины их равны.) Это помогает прочному усвоению существенных свойств изучаемых видов геометрических преобразований.

При построении образов фигур при некотором отображении следует варьировать ось симметрии, центр поворота, центр гомотетии, сами фигуры. В этой связи отметим интересный факт. Учащимся была предложена задача: «Построить образ угла j(pnc. 8) при симметрии относительно точки О».

90% учащихся с данной задачей не справились, хотя почти все учащиеся безошибочно построили образ выпуклого угла. Много ошибок допускается при построении образов фигур при осевой симметрии, если ось симметрии располагается наклонно по отношению к краю классной доски. Варьирование несущественных признаков способствует сознательному и прочному усвоению существенных признаков понятия.

Задачи на сети правильных треугольников или на клетчатой бумаге являются хорошим средством для тренировки учащихся в построении образов фигур при композиции отображений. Они могут быть использованы для устного решения. Например, такая задача (рис. 9): «Не выполняя никаких построений, укажите: а) образы точек B_4, B_5, £)$_3$ при симметрии с осью Л$_4$0$_2$; б) образ отрезка B_2C_2 при композиции осевых симметрий с осями B_3D_2 и в) ось сим-

метрии отрезков A_3 B_4 и $B \pm B_b$\ г) две прямые, последовательным отражением которых луч B_3D_1 отображается на луч C_4C_5».

II. *Задачи на выделение соответственных при отображении точек на соответственных при том же отображении фигурах*

Наряду с другими свойствами преобразований учащиеся при решении задач данного вида должны знать: если *К* £ Ф, то *К'* £.Ф\ где K^c — образ точки *К*, а Ф' — образ фигуры Ф при данном отображении; если *К i* Ф, то K^e £ Ф'*

Рассмотрим задачи.

З а д а ч а 1. Отрезки *А В* и *А'В'* симметричны относительно точки О. Постройте образ точки *К (К* Є *1АВ]).*

Построение образа точки *К* обычным способом (на прямой *КО* строим точку *К'* так, чтобы | *КО* | = | OK^f I и точка *О* лежала между точками *К* и *К')* малоэффективно. Можно решить эту задачу, выполнив построение образа точки *К* с помощью: 1) циркуля; 2) линейки.

1) Используются следующие свойства центральной симметрии:
а) если *К* Є *[АВ],* то *К'* 6 *lA'B'Y,* б) центральная симметрия сохраняет расстояния.

2) Рассуждение такое: *К'* Є *(ОК)* и *К'* *Е 1А'В']*$_Y$ следовательно, *К'* = (О/С) П *lA'B'l*

Для построения образа точки *К* с помощью циркуля (линейки) недостаточно знания алгоритма построения симметричных относительно центра точек, вытекающего из определения центральной симметрии. Кроме этого, нужны некоторая изобретательность в выборе нужного свойства центральной симметрии и умение использовать его в конкретных ситуациях.

Следующие задачи этого вида рассматривают построение образа точки, не принадлежащей соответственным при некотором' отображении фигурам.

З а д а ч а 2. Отрезки *АВ* и *А'В'* симметричны относительно точки О. Постройте образ точки *М (М $ (АВ), М i (А'В'))* при симметрии с центром *О* с помощью: 1) циркуля; 2) транспортира и линейки.

1) Образ точки *М* должен находиться от точки *А* ' на том же .расстоянии, что и точка *М* от точки Л, т. е. *М'* 6 окр. *(А'\ \АМ\).* Аналогично *М'* 6 окр. *(В'; \ВМ\).* Итак, *М'* = окр. (Л'; *\АМ\){*
П окр. *(В'\ \ВМ\).* Но две различные окружности могут пересекаться не более чем в двух точках. Выбор из двух точек пересечения окружностей образа точки *М* может быть осуществлен на основе зрительных представлений или с использованием того факта, что центральная симметрия не изменяет «обхода» фигур (треугольники *АМВ* и *А'М'В'*, где *М'* — образ точки *М,* должны иметь одинаковый «обход»).

2) Используется свойство центральной симметрии не изменять «обход» фигур. Луч *А* '*К'* нужно провести так, чтобы *МАВ* = ■ е== *К' А* '*В'* и углы *МАВ* и *К'А'В'* имели бы одинаковые «обходы».

Аналогично следует осуществить построение луча *B'L* тогда *M' = [B'L') П 1A'K').*

Различные наборы инструментов определяют различные способы действия. Это очень важно, ибо «процесс мышления возникает тогда, когда появляется какое-то новое условие, требующей нового способа действия» [13].'Поэтому подобные задачи полезны для развития творческого мышления, они способствуют формированию умения использовать известные факты в новой ситуации.

Отметим еще немаловажный момент. Известно, что в 5 классе рассматриваются отображения фигур, являющихся подмножествами плоскости, в 6 классе осевая симметрия, поворот, параллельный перенос трактуются как точечные отображения плоскости на себя. Осуществлению скачка в представлении* учащихся об осевой симметрии, повороте и параллельном переносе и способствует решение задач этого вида. Эти задачи похмогут раскрыть содержание изучаемых видов преобразований как отображений плоскости на себя: осевая симметрия, поворот, параллельный перенос устанавливают соответствие не только между точками фигур, но и между точками всей плоскости.

Приведем несколько задач этого вида.

З а д а ч а 3. Окружность *F** получена из окружности *F* поворотом вокруг точки *P*. Постройте образ точки *K (K € F)* с помощью циркуля.

З а д а ч а 4. Постройте образ точки *M* при параллельном переносе, отображающем *[AB]* на [Л'Я'].Выполнит£ построение несколькими способами.

З а д а ч а 5. Окружность F^r с центром О' является образом окружности *F* с центром О при гомотетии с центром в точке *P*. Постройте образ точки *K* с помощью линейки *(K € F; K i F).*

Если *K* € то *K* g F^1 f| (-Р/С)- Пересечением прямой *PK* и окружности *F'* может быть пара точек /(' и *K*"- Выбор из этих точек образа точки *K* может быть осуществлен с использованием того факта, что (О'/Г) !1 (О/С), который можно установить на глаз. Если *K i F*, то точку K^1 можно построить так: проводим луч О/С, отмечаем точку *M* пересечения луча *O K* и окружности *F* и строим образ *M'* точки *M* при указанной гомотетии, тогда /С' = Ю'АГ) П (^^0-

Опыт работы с учащимися убеждает нас в том, что некоторые задачи этого вида доступны школьникам 5 класса. Особенно это касается задач на построение образов точек, принадлежащих соответственным фигурам. Задачи на построение образов точек, не принадлежащих соответственным фигурам, могут быть использованы в 6 классе при введении понятий осевой симметрии, поворота, параллельного переноса.

III. *Задачи на выделение элементов₀ определяющих преобразование*

Эти задачи являются в известном смысле обратными по отношению к задачам первого и второго видов. До недавнего времени считалось, что обратные связи формируются сами собой при форми-

ровании прямых связей. Однако, как показали исследования психологов, дело обстоит не так: обратные связи сами собой не возникают, для их формирования нужна специальная работа [9].

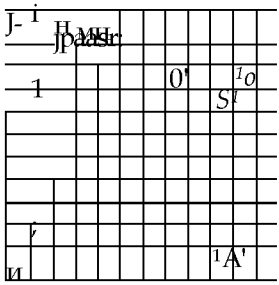


Рис. 10

О важности задач данного вида для формирования умения решать задачи методом геометрических преобразований свидетельствует следующий эксперимент: шестиклассникам была предложена задача: «На сторонах *A B* и *AC* треугольника *ABC* вне его построены квадраты *A BMP* и *ACQD*. Доказать, что [PC]^ [*BD*]». Класс, в котором рассматривались задачи на построение элементов, определяющих преобразование, хорошо справился с указанной задачей (из 28 учащихся лишь два ученика не решили ее). Однако для большинства учащихся, с которыми не рассматривались задачи третьего вида, решение данной задачи вызвало большие затруднения. Эти трудности были вызваны тем, что ученики ые «видели» поворот вокруг точки *A* на 90° (точки *P* и B, так же как и точки C и D, равноудалены от точки *A* и «видны» из нее под углом 90°, поэтому при повороте вокруг точки *A* на 90° *P* -> *B*> C->D, следовательно, *[PC]Ш IBD]).*

Следует отметить, что в учебниках геометрии задачи на построение элементов, определяющих преобразование, почти отсутствуют.

Приведем примеры задач этого вида.

З а д а ч а 1. Какие из конгруэнтных треугольников, показанных на рисунке, можно совместить с помощью параллельного переноса, осевой симметрии, центральной симметрии?

З а д а ч а 2. Даны две параллельные прямые *a* и *Ь*. Найдите множество центров гомотетий, отображающих прямую *a* на прямую b_t если $k = -1{,}5$.

З а д а ч а 3. Укажите центр поворота (рис. 10), отображающего *[AB]* на *lA'B'l* где *A* -> Л\ *BB*\

Наиболее интересным является решение этой задачи без использования инструментов (на клетчатой бумаге). Решая ее, ученик должен рассуждать примерно так: а) так как при повороте *[ÄB]* -*■ -> [Л'В'] и (AB) _]_ (A'B'),* то угол поворота равен 90°; б) так как *B -> B'*, то"центр поворота принадлежит оси симметрии точек *B* и *B'*. Отрезок ВВ' внден из центра поворота под углом 90°. Центром поворота может быть либо точка О, либо точка О'. Для того чтобы указать из этих точек ту, которая является центром поворота, ученик должен мысленно совершить поворот отрезка *A B* вокруг каждой из этих точек. Искомым центром поворота является точка О. Убедиться в правильности нахождения центра поворота можно с помощью построений. Для этого нужно построить оси симметрий точек Л, *A'* и *B,* В'. Пересечение этих осей является искомым центром поворота.

Полезно использовать и комбинированные задачи, в которых осуществляется построение образов фигур при перемещении или гомотетии и выделение элементов, определяющих вид преобразования. Решение таких задач делает мыслительный процесс более содержательным, способствует развитию пространственного воображения учащихся.

Приведем примеры таких задач.

З а д а ч а 1. Постройте произвольный четырехугольник *ABCD* и отметьте некоторую точку *A'*. Постройте четырехугольник, симметричный данному относительно некоторой прямой так, чтобы образом точки *A* была точка *A'*.

З а д а ч а 2. Отметьте точки Л, *B* и С. Дополните это множество четвертой точкой *D* так, чтобы фигура. *F* = {Л; В; С; *D*} имела центр симметрии.

IV. Задачи на построение соответственных при отображении точек на произвольных фигурах

При решении задач этого вида получают дальнейшее развитие идеи соответствия, принадлежности, совершенствуются умения и навыки, приобретенные учащимися при решении задач предыдущих видов; учащиеся также овладевают навыками более сложных построений.

Анализ решения следует проводить устно, сопровождая его рисунком. Каждый шаг построения записывается.

Рассмотрим несколько задач этого вида.

З а д а ч а 1. Даны прямая *I* и две окружности, принадлежащие различным полуплоскостям с границей *I*. Постройте точки,, симметричные относительно прямой *I* и принадлежащие данным окружностям.

Запись решения данной задачи будет иметь следующий вид:

1) $F[= S_L (F)$, 2) Л' 6 $F[\Pi F_2$, 3) $A = S_l (A')$.

Тот факт, что точки Л и Л' удовлетворяют условию задачи, очевиден, поэтому останавливаться на его доказательстве не следует. На исследование же нужно обратить внимание. Учащимся полезно дать задание: расположите окружности $F_{\pm}$ и F_2 так, чтобы задача имела 0, 1, 2, ... решений.

Рассуждение может быть примерно таким: задача будет иметь единственное решение, когда $F[$ f| F_2 — Л, где Fi == S_t $\{F_{\pm})$, т. е. когда окружности F_2 и Fj касаются. Построим две окружности $R[$ и R_2 так, чтобы они касались. Далее строим окружность R_{lt} симметричную окружности *Ri* относительно данной прямой *I*. При полученном расположении окружностей R_x и R_2 и прямой *I* задача имеет единственное решение.

Желательно, чтобы учащиеся выполнили рисунки, иллюстрирующие различные случаи решения задачи.

З а д а ч а 2. Найдите на данных прямой и отрезке такие пары точек, что одна из точек пары может быть отображена на другую поворотом вокруг данной точки на 70°.

З а д а ч а 3. На прямой и окружности постройте соответственно такие пары точек, чтобы одну точку пары можно было отобразить на другую гомотетией, центром которой является центр данной окружности, а K = у.

Все рассмотренные выше задачи отнесем к задачам первой группы. Ко второй группе отнесем задачи, ^решаемые методами геохметрических преобразований. Это задачи на доказательство, построение и вычисление. Они решаются на протяжении всего периода обучения в школе. Классифицируются в сборниках задач по методам их решения: а) задачи, решаемые методом симметрии; б) задачи, решаемые методом поворота; г) задачи, решаемые методом гомотетии.

Такая классификация подсказывает выбор нужного метода при решении конкретной задачи. Однако в школьных учебниках эти задачи перемежаются. Например, в разделе «Четырехугольники» содержатся задачи, решаемые методами симметрии, поворота, параллельного переноса и гомотетии. Поэтому выбор нужного вида отображения может встретить некоторые трудности.

Не случайно в работах психологов А. Н. Леонтьева и Я. А. Пономарева указывается на то, что формирование общего принципа решения задач следует начинать с решения тех задач, условия которых оказывают решающее влияние на нахождение метода решения [10, 12]. Согласно этим выводам использование отображений в конкретных ситуациях целесообразно начинать с рассмотрения тех задач, решения которых очевидны. А потому сначала предлагаются задачи, методы решения которых очевидны,

г Поясним сказанное на примерах.

З а д а ч а 1. Даны полоса с краями a и b и точка Р, принадлежащая этой полосе *(Р £ а, Р £ Ь)*. Найдите на ее краях a и b соответственно такие точки A и В, что $\backslash PA \backslash = \backslash PB \backslash$ и $APB = 90°$.

Так как $| PA | = | PB \backslash$ и $APB - 90°$, то поворот вокруг точки P на 90° отображает одну из точек на другую. Анализ приводит к методу решения этой задачи — методу поворота. Будем считать, что в этом случае метод решения задачи очевиден* По сути дела, решение этой задачи сводится к отысканию соответственных при повороте вокруг точки P на 90° точек на заданных прямых a и b (это умение у учащихся сформировано).

З а д а ч а 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABNM$ и $ACQP$. Докажите, что *(MC)* _L (*BP*).

Перпендикулярность двух прямых будет доказана, если одну из этих прямых мы отобразим на другую поворотом на 90°. Анализируя условие задачи, замечаем, что точки M и B находятся на одинаковых расстояниях от точки A и $MAB - 90°$. Аналогично $| AC \backslash$ == = $\backslash AP \backslash$ и $CAP = 90°$. Значит, поворот вокруг точки A на 90° по

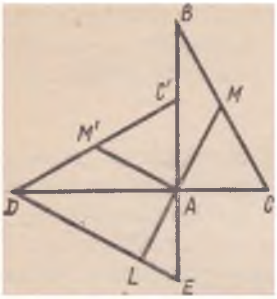


Рис. п

часовой стрелке отобразит точку М на точку В и точку С на точку Р.

Анализ условия этой задачи также приводит к выбору нужного вида отображения.

З а д а ч а 3. На продолжении сторон прямоугольного треугольника ЛВС отложены отрезки *AD* и *A* В, конгруэнтные соответственно катетам Л В и *AC* треугольника ЛВС. Докажите, что прямая, содержащая медиану *AM* треугольника ЛВС, перпендикулярна отрезку *DE*.

Фигура, состоящая из двух треугольников ЛВС и *DEA*, симметрична относительно прямой, которая содержит биссектрисы углов *BAD* и *CAE* (рис. 11). Но может ли нам дать что-либо метод симметрии? Ответить на этот вопрос пока нельзя. Далее замечаем, что точки В и *D* находятся на равных расстояниях от точки Л и *BAD* — 90°. Можем ли мы быть уверены в целесообразности использования метода поворота? Пока мы не знаем, что использование поворота приведет нас к желаемому результату, тем более очевидно, что при этом повороте прямая *AM* не отобразится на прямую *DE*. Но может быть, прямая *AM*' будет параллельна прямой *DE*, где (ЛМ') = $R^{90°}$ ((ЛУИ)). Выясним это. Так как при повороте вокруг точки Л на 90°АЛ *BC*-^*AADC*'$_y$ *M* -> М', то М' — середина отрезка DC'. [ЛМ'] — средняя *линия* треугольника *EDC*\ следовательно, (ЛМ')'Ц *(ED)*. Так как *(AM)* ± (ЛМ') и (ЛМ') | | (BD), получаем: (ЛМ) JL *(DE)*.

Анализ условия этой задачи не приводит непосредственно к методу ее решения. В этом случае будем считать, что метод решения задачи не очевиден.

В процессе решения задач второй группы у учащихся формируется представление о методе геометрических преобразований как о обобщенном методе решения геометрических задач, вырабатывается критерий выбора нужного вида геометрического преобразования для доказательства различных зависимостей, для построения фигур и т. д., накапливается опыт в использовании геометрических преобразований в конкретных ситуациях. Учащиеся видят, что доказать некоторое соотношение в равнобедренном треугольнике, равнобедренной трапеции, прямоугольнике, ромбе часто удается с помощью осевой симметрии; использование поворота эффективно при установлении зависимостей в равностороннем треугольнике, квадрате, при доказательстве перпендикулярности прямых; метод параллельного переноса дает желаемый результат при доказательстве различных соотношений в параллелограмме, трапеции, а также при построении этих фигур; преобразование гомотетии эффективно, если рассматриваются два параллельных отрезка разной длины, отрезок, разделенный в данном отношении, две окружности разных радиусов. Проиллюстрируем сказанное на задачах.

З а д а ч а 1. Дан квадрат *A BCD*. Через центр этого квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, отличные от прямых *AC* и *BD*. Докажите, что фигуры,'являющиеся пересечением этих прямых с квадратом, конгруэнтны.

Известно, что квадрат имеет четыре оси симметрии и повороты вокруг точки пересечения диагоналей квадрата на 90, 180 и —90° отображают этот квадрат на себя. Поэтому для доказательства соотношений в квадрате может быть использован либо метод симметрии, либо метод поворота. Так как в условии задачи используются две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие центр квадрата, то в данном случае предпочтительнее метод поворота.

Пусть *O* — точка пересечения диагоналей *AC* и *BD* квадрата *ABCD*, [MA/1 и [/(L] — пересечения квадрата с данными прямыми *(м е 1AB), N е [CD]₉ к* е шс], *L е Ш]).* тогда R^{9}_{0}°° *ЦВА*])■=■
== *[AD].* Образом точки *M* будет такая точка $M^{г}$ отрезка *AD*, что

MOM' = 90р, т. е. точка *L*. Аналогично, R^{9}_{0}°°*(N)* = *K*• Следовательно, £®°° ([*MN*]) = *ILK],* а потому Ш-Ы *WX*

З а д а ч а 2. Длины отрезков, одним концом которых является общая точка, а другим — точка прямой, разделены в одном и том же отношении. Докажите, что точки деления принадлежат одной прямой.

Так как в задаче говорится о делении отрезков в одном и том же отношении, то для доказательства указанного соотношения целесообразно использовать метод гомотетии.

Пусть точка *M* — общий конец отрезков, $A_{в}$ $Л_2$, $Л_3$, —точки прямой, являющиеся другими концами этих отрезков, $M_{в}$ M_2 M_3, ... —точки, делящие отрезки $MA_{Ъ}$ $МЛ_2$, $МЛ_3$, ... в данном, отношении А, т. е,

$$\frac{\backslash A_1M_1\backslash}{\backslash M_XM\backslash} = \frac{|A_2M_2|}{\backslash M_2M[} = \frac{|A_3M_3,}{\backslash M_3M} \ldots = K.$$

Покажем, что

$$\frac{\backslash MM_{t}\backslash}{|MA_{,}|} = \frac{\backslash MM_2 1}{|МЛ_2 1|} = \frac{|MM_3 1|}{|MA_3|}$$

$$\frac{1 ATA_{г} 1}{\backslash MM_X 1} = \frac{|MM_{l}|+|MД 1|}{j AШ_X|} = j, \frac{|MA 1|}{|MM_{г}\backslash} = j_{+K}$$

тогда $\frac{|MM,|}{1MA_X[} = \frac{1}{1+A,}$. Аналогично $\frac{|ΛШ_0|}{|MA_2 1|} = \frac{1}{1+X}$

и т. д. Рассмотрим $\frac{L J}{(A_{j})} = \frac{J-}{M_{г}}$, $\frac{}{(A»)} = M_2$ и т. д. Учитывая, что образом прямой при гомотетии является прямая, получаем, что точки $M_{в}$ M_2, M_3 и т, д. принадлежат одной прямой,

З а д а ч а 3. Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр.

Поскольку в задаче идет речь об окружности и ее параллельных хордах, то естественно использование осевой симметрии.

Пусть точка *O* — центр окружности, *[AB]* и [CD] — параллельные хорды этой окружности, точка *M* — середина хорды Л Б, точка *N* — середина хорды CD. Так как |Л0| = *0B*\ и *AM*\ = |MB|, то *(OM)* — ось симметрии точек Л и *B*, откуда следует, что *(OM)* JL ± (*AB*).

Аналогично (CW) — ось симметрии точек С и *D* и

(OA0_L(CD).

Учитывая, что (ЛБ) || (CD), получаем (СШ) || (CW), а потому *(OM) = (ON).*

З а д а ч а 4. Докажите, что точка пересечения прямых, которые содержат боковые стороны равнобочной трапеции, точка пересечения ее диагоналей и середины оснований трапеции принадлежат одной прямой.

В равнобочной трапеции прямая, проходящая через середины ее оснований, является осью симметрии. Поэтому для доказательства требуемого факта целесообразно использовать осевую симметрию.

Обозначим основания трапеции через *BC* и ЛD, ось симметрии через 7. Тогда S_t (Л) = D, S_t *(B)* — C, S, (UfiJ) = IDC1. Значит, S_t *((AB))* = (DC), S_t *([AC]) = [DB].* Но точка пересечения прямой и ее образа при осевой симметрии принадлежит оси. Следовательно, *(AB)* n *(DC)* 6 /, *[AC]* n *[BC] e I.*

Так как в условии данной задачи используются два параллельных отрезка разной длины, то естественно также рассмотреть гомотетию с центрюм в точке пересечения диагоналей трапеции *A BCD*

й коэффициентом $K = \frac{|BC|}{|AD|}$ (Решение этой задачи см. в статье

3. А. Скопеца и JI. И. Кузнецовой.)

З а д а ч а 5. Сумма длин оснований трапеции равна 21 см, а длины диагоналей равны 13 и 20 см. Вычислите площадь трапеции.

Для доказательства соотношений в трапеции эффективен либо метод параллельного переноса, либо метод гомотетии.

Поскольку в задаче используется сумма длин оснований трапеции, то целесообразным является применение параллельного переноса, который приводит к образованию треугольника с основанием, длина которого равна сумме длин оснований трапеции.

Обозначим вершины трапеции через Л, 5, С, D (|ЛС| = 13 см,

| *BD*| — 20 см, *AD*\ + *BC*\ = 21 см). Тогда S_{ABCD} = j (| *AD*|+

+ JSC |) • *h*, где *h* — высота трапеции.

Рассмотрим параллельный перенос *BC*. При этом переносе *B* –> C_y *D* –^ *D*'. Площадь треугольника *ACD*' равна I**h*.

Но $\backslash AD'\backslash = \backslash AD \backslash + JDD' \backslash = |ЛО| + |BC[$. Поэтому и площадь трапеции *A BCD* равна площади треугольника Л CD'.

З а д а ч а 6. Прямые, которым принадлежат боковые стороны: трапеции, перпендикулярны. Докажите, что длина отрезка, концами которого являются середины оснований трапеции, равна полуразности длин оснований.

Поскольку в задаче речь идет о трапеции, то целесообразным является применение параллельного переноса, в результате которого образовался бы треугольник, длина стороны которого была бы равна разности длин оснований трапеции/

Пусть основаниями трапеции *ABCD* являются *[AD]* и [BC], *M*—середина отрезка BC, *N* — середина отрезка *AD*. При параллельном переносе *BM B M*, Л $Л_x$. При параллельном переносе САГ: C -> M, D D_x.

Тогда

$$| Л^У | - 1 Л,VI - | ЛЛ_X I - | ЛАН - I BM !, \quad (1)$$

$$| ND_1 | = | ND | - | DjD | s= | ND[\sim | MC |. \quad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$| Ajt | + 1ND_X | = | AN | + j ND j - (] BM\backslash | AfC|) = | AD\backslash - | BC\backslash.$$

Но $\backslash A_{\pm}N | + liVDiHHiDJ$, значит, $| A])_X | = | ЛD| - | BC |.$ (3)

Так как ІЛ| =. (A^DJ, to *[MN* —медиана образовавшегося прямоугольного треугольника $Л_1A/ID_1$. Поэтому jMA^I = ~ $\backslash A_XN\backslash$ -f* + I^VDiJ. Учитывая равенство (3), получаем:

$$|AW|t \pm \backslash' A_1D_1\backslash = \pm(\backslash AD\backslash - \backslash BC\backslash).$$

З а д а ч а 7. Докажите, что в произвольном треугольнике *ABC* точка *M* пересечения медиан, точка *H* пересечения высот и центр *O* описанной окружности принадлежат одной прямой (прямая ГЧО V |L\=|Ш|• 1 Эйлера) и $\frac{}{F\backslash MH\backslash 2}$

Так как в данной задаче требуется доказать, что точка *M* делит отрезок *OH* в отношении 1 : 2, то целесообразно использовать гомотетию с центром в точке *M* и *K* = —у.

Рассмотрим общий случай: треугольник *АБС* неправильный и, значит, точки О, Я, *M* различные.

Гомотетия с центром *M* и коэффициентом *K* " -отобразит треугольник *ABC* на треугольник Л'В'С', вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Соответствующие стороны этих треугольников параллельны. Высоты [Л $Л_x$], [BBJ, [CCJ треугольника *ABC* переходят в высоты [Л'Л'], *[B'B*, [C'C'j

треугольника $A'B'C^{г}\backslash$ которые являются перпендикулярами к сторонам данного треугольника, проведенными через их середины.

Значит, точка Я пересечения высот треугольника при указанной гомотетии переходив в центр O описанной около треугольника ABC окружности. Отсюда следует, что точки M (центр гомотетии), Я и О (соответственные точки в гомотетии) лежат на одной прямой и

$$мд = \frac{}{222} \pm мн == \$бм = \sim MH = \$\backslash 0M\ I = -1\ \ MH\ [.$$

Если треугольник ABC правильный, то O = Я '= M и прямая Эйлера неопределенна.

Подводя итог вышесказанному, отметим, что формирование умения решать задачи методом геометрических преобразований требует от учащихся активного использования знаний, развивает инициативу, геометрическую интуицию и мышление учащихся, необходимые при решении любых задач.

§ 2. Обучение решению задач Еектсрным методом

Рассмотрим вначале пример традиционного и векторного решения известной задачи: «Доказать, что средняя линия трапеции $A\ BCD$ параллельна основаниям и длина ее равна полусумме их длин».

Традиционное решение. Через точки B и N проведем прямую, которая пересекает прямую AD в точке G. Полученные треугольники BCN и DNG конгруэнтны, так как у них |САП = | $ND\backslash$ (по условию), Z. BNC ^ Z_ DNG (как углы вертикальные) и Z. BCN ^ Z_ NDG (как углы накрест лежащие при параллельных прямых). Из конгруэнтности треугольников следует: |SiV[= | $NG\backslash$ и | $BC\backslash$ = |DG|. В А ЛЯС прямая MN содержит середины двух сторон, значит, (MN) || (AG) и |МАП = — ($\backslash AD$ | + 4* |£>G|) или ($MAГ$) || (AD) и $\backslash MN\backslash$ = - ($\backslash AD\backslash$ + |ВС|).

Векторное решение. Введем в рассмотрение векторы:

$AD = a$, $BC = b$, $MN = c$, $MA = m$, $DN = n$, тогда $MB = -m$, $CN - -n$. Из четырехугольников $AMND$ и $MBCN$ имеем:

$$\vec{c} = \vec{m} + \vec{a} + \vec{n}, \qquad (1)$$

$$\vec{c} = -\vec{m} \blacksquare + \vec{Ъ} - \vec{n}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаем: $2\vec{c} - \vec{a} + \vec{Ъ}$, или $\vec{c}$ = «= — $(\vec{a} + \vec{Ъ})$ (3). Из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и равенства (3) следует: c || a, c || $Ъ$. Это означает, что [МАП|| [$AD\backslash$, [MN и $\backslash MN\backslash$ = {$\backslash AD$ \ + |5С|).

Преимущество второго способа очевидно.

Известно, что векторы связаны с метрикой: $\backslash AB\backslash = VAB^2$, т. е. расстояние от точки A до точки B равно корню квадратному из скалярного квадрата вектора AB. Угол ф между векторами $A\ B$ и AC определяется по формуле ч .*

$$\cos a = \frac{\sim AB - \sim AC}{1\ AB\ \cdot \backslash AC\ \backslash},$$

Эго позволяет широко использовать векторы при решении метрических задач, т. е. задач, связанных с длинами и углами.

Сила векторного метода заключается еще и в том, что он позволяет легко делать обобщения, роль которых в обучении математике трудно переоценить. В качестве примера рассмотрим задачу: «Доказать, что сумма квадратов расстояний какой-нибудь точки окружности до вершин вписанного правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности».

Пусть правильный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а M — произвольная точка этой окружности. Тогд^а

$MA = MO + OA$, $MB = MO + OB$, $MC == MO + OC$, откуда

$MA^2 = MO^2 + 2MO \bullet OA + OA^2$, $MB^2 = MO^2 + 2MO \bullet OB +$

$+ O\ B^2$, $MC^2 = MO^2 + 2\ MO \bullet OC + OC^2$. Сложив последние три равенства, получаем:

$$\backslash MA\backslash^2 + \backslash MB\backslash^2 + \backslash MC\backslash^2 = \S R^2 (\backslash MO\backslash = \backslash OA\backslash = \backslash OB\backslash = \backslash OC\backslash = R,$$
$$OA + OB + 0C = 0).$$

Приведенное векторное решение отличается большой общностью рассуждений. Оно справедливо, очевидно, для любой точки сферы, описанной около треугольника так, что центр треугольника совпадает с центром сферы. Легко обобщить эту задачу и на случай., когда в окружность или сферу вписан любой правильный многоугольник. Более того, он может быть не обязательно правильным, а симметричным относительно центра.

Можно обобщить задачу и для описанных правильных многоугольников (многогранников). Возможны и дальнейшие обобщения задачи на тот случай, когда рассматриваемые многоугольник (многогранник) и окружность (сфера) удовлетворяют условию: сумма всех OA_t равна нулевому вектору. Более подробно примеры обобщений, даваемые векторным методом, рассмотрены в статье ш Г. П. Бевза «Обобщения при решении задач с помощью векторов» (Математика в школе, 19t8, № 2). Однако значение векторного метода не исчерпывается этим. Его применение позволяет иллюстрировать специфику использования математического знания, для которой характерно построение, изучение и применение моде-

лей. Поэтому велико воспитательное значение векторного метода.

Поясним это на конкретном примере.

З а д а ч а . Доказать, что три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

Пусть в треугольнике ЛВС *[АР]* и [BQ] — высоты, *О* — точка их пересечения. Введем в рассмотрение векторы *ОА а, ОВ = Ь, ОС = с.* Тогда для доказательства требуемого утверждения достаточно доказать, что *с 1. АВ.* Для доказательства перпендикулярности векторов *с п А В* достаточно доказать, что *с • АВ* — 0. Данное равенство является векторным выражением доказываемого утверждения.

Имеем: *АВ = b* — а, *ВС = с — Ь*$_y$ *С А = а — с.*

Так как *[РА]* _L [ВС], то *а •* *(с — Ь)* = 0. (1)

Так как *[ОВ]* _L [СЛ], то *b •* *(а — с)* = 0. (2)

Равенства (1) и (2) являются векторной моделью рассматриваемой задачи.

Выполняя преобразования этих равенств, получаем:

$$a \bullet c = a - b \text{ и } b - c = b \bullet a. \qquad (3)$$

Из равенств (3) по транзитивности:

$$a \bullet p = \sim Ь \bullet c \text{ или } c\,(a - Ь) = 0. \qquad (4)$$

Равенство (4) на векторном языке означает, что [OCl _L [ЛВ], т. е. [CL] — высота треугольника *АВС (L = (ОС)* f| (ЛВ)). Последнее утверждение является истолкованием результата полученного векторного решения на языке данной задачи.

Традиционное же решение рассмотренной задачи таково.

Через каждую вершину А *АВС* проведем прямую, параллельную противоположной стороне его. Тогда получим вспомогательный треугольник $Л_1В_1С_1$, к сторонам которого высоты данного треугольника перпендикулярны. Так как | $С_2В$| = | ЛС| = \BA_X \ (как противоположные стороны параллелограммов), то точка В есть середина стороны A_1C_1.

Подобно этому убедимся, что точка С есть середина стороны A_1B_1 и точка Л —середина, стороны B_1C_1. Таким образом, высоты ЛЬ, *BQ* и *CF* перпендикулярны к сторонам А $Л_1В_1С_1$ и проходят через их середину, а такие перпендикуляры пересекаются в одной точке.

Следует иметь в виду, что векторный метод, как и любой другой,
♦не является универсальным* хотя он и позволяет решать широкий круг геометрических задач.

Из них наиболее употребительны: а) задачи на доказательство параллельности прямых и отрезков; б) задачи на доказательство того факта, что некоторая точка делит отрезок в некотором отношении; в) задачи на доказательство принадлежности трех точек одной

прямой; г) задачи на доказательство перпендикулярности прямых и отрезков; д) задачи на доказательство зависимостей между длинами отрезков; е) задачи на нахождение величины угла.

Умение использовать векторный метод в конкретных ситуациях достаточно сложно. Поэтому прежде всего важно выявить его состав.

Компоненты векторного метода решения 1*геометрических задач*

С целью выделения компонентов умения решать задачи векторным методом проанализируем решения конкретных задач.

/. Задачи на доказательство параллельности прямых и отрезков

З а д а ч а 1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям.

Пусть средней линией трапеции *A BCD ([AD]* и [BC] — ее основания) является *[MN].* Тогда *AM* \ = *MB*\ и |CiV| = *ND*\. Задача будет решена, если будет доказана коллинеарность векторов

MN и *AD* либо векторов *MN* и BC. Следовательно, для решения рассматриваемой задачи важно умение переводить геометрический язык на векторный.

Из четырехугольника *MBCN* имеем:

$$MN = MB + BC\ 4\text{-}\ CN. \qquad (1)$$

Из четырехугольника *AMND* имеем:

$$MN == MA + AD + DN. \qquad (2)$$

Составление равенств (1) и (2) предполагает умение представлять вектор в виде суммы векторов, которое является обратным умению выполнять сложение векторов.

Складывая почленно равенства (1) и (2), получаем:

$$2MN = (AD\ '+BC) + (MB + MA) + (CN + DN) = AD + BC\ (\text{MB} +$$

$$\text{-f- мл} = \text{o, "cw} + DN = \text{o}).$$

Следовательно, __ $\underline{AD + bc}$~ (3). Переход к равенству (3)

предполагает умение выполнять преобразования векторных равенств.

Так как *AD* || BC, то *AD* — *k* • BC. Здесь важно умение представлять вектор в виде произведения вектора на число. Значит,

$$MN = \frac{\text{Тн}}{-} = \frac{\sim BC + k\text{-}BC}{1 + k} * \text{BC, а потому}$$

MN коллинеарен BC, следовательно, *MN* коллинеарен и *AD.*

На языке задачи это означает, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям. Для этого -вывода важно умение переводить векторный язык на геометрический, т. е. переходить от соотношения между векторами к соотношению между геометрическими фигурамй.

Итак, для решения приведенной задачи учащиеся должны овладеть следующими умениями: 1) переводить геометрический язык нд векторный и наоборот; 2) выполнять операции над векторами; 3) представлять вектор в виде суммы векторов; 4) представлять вектор в виде произведения вектора на число; 5) выполнять преобразования векторных равенств.

II. Задачи на доказательство деления некоторой точкой отрезка в данном отношении

З а д а ч а 2. Доказать, что медианы треугольника, пересекаясь, делятся в отношении 2 : 1 .

Пусть *[АЬ* и *[ВК* —медианы треугольника *АВС* и *М* —

= *[AL]* П *1ВК*, тогда *KL* = (■!)• Для выполнения (1)

необходимо умение переводить геометрический язык на векторный (осуществлять переход от соотношения между фигурами к соотношению между векторами).

Далее, *KL* = *KM* + *ML* (2). Выполнение (2) требует умения представлять вектор в виде суммы двух векторов.

Из (1) и (2) следует, что *KM* + *ML* = отсюда *2KM.* +

+ *2ML* = *AB*, но *AM* + *MB* = *AB* (3), значит, *2KM* + *2ML* =-

= *AM* + *MB* или *(AM — 2ML)* + *(MB — 2KM)* = 0 (4).

Для (3) и (4) важны умения осуществлять операции над векторами и преобразовывать векторные равенства.

Векторы *AM — 2ML* и *MB — 2KM* соответственно коллинеарны векторам *AL* и *BK*, поэтому *AM — 2ML* — О и *MB — 2KM* —

= 0, т. е. *AM* = *2ML* и *MB* = 2/СМ, значит,

1^1 = 2 и Ц§1-'=2. **(5)**
|.мГ| t

Вывод (5) основывается на умении осуществлять переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами.

Итак, для решения данной задачи необходимы умения: 1) переводить словесный текст задачи на язык векторов и наоборот; 2) выполнять операции над векторами; 3) представлять вектор в виде суммы (разности) векторов; 4) представлять вектор в виде произведения вектора на число; 5) переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами; 6) преобразовывать векторные равенства.

З а д а ч а 3. На стороне *AD* и на диагонали *AC* параллелограмма *ABCD* взяты точки *M* и *N* так, что | *AM*\= — *AD*\ и

I *AN*\ = — | *AC*|. В каком отношении точка *N* делит отрезок *MB?*

Докажем прежде всего, что точки M, N и B принадлежат одной прямой. Для этого надо доказать, что векторы MN и NB коллинеарны (умение осуществлять переход от зависимостей между фигурами к зависимостям между векторами). $MN = MA + AN$ (умение представлять вектор в виде суммы других векторов). $MA = -DA$ (умение представлять вектор в виде произведения вектора на число).

$AN = -\frac{1}{6}(AB + AD)$; $MN = -DA + -\frac{1}{5}AB - -\frac{1}{6}DA =$

$= -\frac{1}{6}AЪ + -\frac{1}{30}DA = -\frac{1}{30}(5TB + АД)$; $NB = NA + AB =$

$= AB - Л£ - \frac{1}{6}AD = \frac{1}{6}AB + -\frac{1}{6}DA$ (умения представлять вектор в виде суммы векторов, представлять вектор в виде произведения вектора на число, выполнять преобразование векторных равенств); $NB = -\frac{1}{6}*(5ЛВ + DA)$, значит, $NB = 5MN_i$ следовательно, векторы NB и MN коллинеарны.

Точка N делит отрезок на две части 1 : 5 (умение переводить векторный язык на геометрический).

Таким образом, для решения задач указанного типа необходимо формирование тех же умений, что и для решения задач первого типа.

III. Задачи на доказательство принадлежности трех точек одной прямой

Заметим, что доказательство принадлежности трех точек одной прямой было рассмотрено в задаче 4. Проанализируем решение еще одной задачи.

З а д а ч а 4. Доказать, что в произвольном четырехугольнике $ABCD$ отрезки, концами которых являются середины противоположных сторон (Р, K, R, L — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно), и отрезок, концами которого являются середины диагоналей (точка N — середина ЛС; точка M\ —середина BD), пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

На векторном языке требованием задачи является доказательство того факта, что $MO = ON$, где O — точка пересечения отрезков, концами которых являются середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, а M и N — середины диагоналей BD и ЛС._

$MO = MP + PO$, но $MP = -DA$, значит,

$$MO = -\frac{1}{2}DA + PO. \qquad (1)$$

Далее, $ON = OR + RN$, $RN = DA$, следовательно,

$$ON = jDA.+ OR. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что $PO - OR$, получаем: $MO = ON$.

Из решения приведенной задачи видна важность овладения теми же умениями, которые были выделены нами ранее.

В учебно-методической литературе [6, 7 и др.], посвященной применению векторов к решению геометрических задач, часто указывается на полезность рассмотрения следующих теорем.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы точка C делила отрезок $A\ B$ так, что $\backslash AC\backslash : \backslash CB\backslash - m : n$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки Q выполнялось равенство

$$QC\text{-}4\text{-}0Л + \qquad m + n \qquad m\ \text{-}(\text{-}\ n\ \blacksquare\ QB.$$

Т е о р е м а 2. Для того чтобы точка C принадлежала прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки Q выполнялось равенство $QC = p \bullet O\ A + q \bullet OB$, где $p + q = 1$.

Доказательства этих теорем содержатся в [6, 7]. Нетрудно заметить, что выделенные умения во многом обеспечивают успех в их доказательствах. Так что в формирование векторного метода данные теоремы ничего принципиально нового не вносят, хотя они являются «инструментом» решения многих задач второго и третьего типов. Их действие проиллюстрировано в книге [6]. *

IV. *Задача на доказательство перпендикулярности прямых и отрезков*

Задачи этого типа решаются с привлечением скалярного произведения векторов.

З а д а ч а 5. Доказать, что диагонали ромба перпендикулярны.

Пусть $ABCD$ — ромб, тогда $|\ AB\ | = j\ BC\ | - |\ CD\ j = I\ DA\ |$, к тому же $[AB]\ |\ |\ [DC]$ и $[AD]\ |i\ ISC]$.

Выразим векторы AC и DB через $A\ B$ и BC: $AC - A\ B + BC$,

$DB = AB - BC$ (умение представлять вектор в виде суммы или разности векторов).

Перемножая скалярно AC и DB (умение переходить от геометрического языка к векторному), получаем: $AC \bullet DB = (AB + BC)X$

$X\ (AB - BC) = AB^2 - BC^2 = |\ AB\ \backslash^2 - |\ BC\ |^2 - 0$ (умения осуществлять операции над векторами и переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами).

Это означает, что AC _L BC, а поэтому $[AC]$]L $[BD]$ (умение переводить векторный язык на геометрические термины).

В качестве еще одного примера задач этого типа укажем задачу на доказательство того факта, что три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке, рассмотренную нами в начале этой главы.

Из рассмотренных задач четвертого типа видно, что для успеха в их решении также важны перечисленные выше умения.

V. *Задачи на обоснование зависимостей между длинами отрезков*

З а д а ч а 6. Доказать, что длины диагоналей прямоугольника равны.

Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник. Тогда $AC = AB + BC$ и $DB = DC - BC = AB - BC$ (умение представлять вектор в виде суммы и разности векторов).

$$AC^2 = |ЛС|^а = AB^2 + 2AB\text{-}Ж + BC^2 = AB^2 + BC\backslash$$

так как $AB \bullet BC = 0$, ибо AB Л_ BC (умения выполнять преобразования векторных равенств и переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами).

Далее, $DB^2 = |DB|^2 = AB^2 + \sim BC^2$. Следовательно, $|ЛС|^2 ==$ $= \backslash DB\backslash^2$, или $|ЛС| - \backslash DB\backslash$.

VI. *Задачи на вычисление величины угла*

З а д а ч а 7. В треугольнике ABC известны длины всех сторон. Определите величины его углов.

Пусть $\backslash AB\backslash = c$, $\backslash BC\backslash = a$, $\backslash AC\backslash =$ Ъ.

Введем в рассмотрение векторы $AB = c$, $AC -$ Ъ, $CB = a$. Тогда $a - c -$ Ъ (умение представлять вектор в виде разности векторов).

$$a^2 = c^2 - 2\,c\text{-}b + \sim b^2 = |c|^2 - 2\,|c\backslash\text{-}\backslash b|\text{-}\cos(c,^A fc) + |Ь|^2 = c^2 - 2\,ЬcX$$

$$X \cos(c,^л Ь) + Ь^2$$

(умение переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами). Отсюда $cos(c^A Ъ) = -c''\,Ь \sim -$

$$\text{или } \cos Z.\,A = \frac{b^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Выделенные умения являются характерными для решения и этой группы задач.

Итак, анализ решений рассмотренных задач приводит к выводу о том, что компонентами умения использовать векторный метод являются следующие умения: 1) переводить геометрические термины на язык векторов и наоборот (осуществлять переход от соотношения между фигурами к соотношению между векторами и наоборот), 2) выполнять операции над векторами (находить сумму, разность векторов, произведение вектора на число), 3) представлять вектор в виде суммы, разности векторов, 4) представлять вектор в виде произведения вектора на число, 5) преобразовывать векторные соотношения, 6) переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот, 7) выражать длину век-

тора через его скалярный квадрат, 8) выражать величину угла между векторами через их скалярное произведение.

Для исследования состава умения применять векторный метод к решению задач мы рассмотрели задачи, содержащиеся в учебниках геометрии средней школы и в пособиях, рекомендованных учителю. Анализ решений более сложных задач, содержащихся в вузовских учебниках геометрии и в сборниках олимпиадных задач, также показал важность выделенных умений. Это позволяет утверждать объективность полученных выводов.

Приведем примеры задач, решение которых соответствует перечисленным выше умениям.

I. *Задача с использованием умения переводить геометрические термины на язык векторов и наоборот*

1. Отрезки *A B* и *CD* параллельны. Запишите это соотношение в векторной форме.

2. Точки Л, В, С принадлежат одной прямой. Как это соотношение можно записать с помощью векторов *AC* и *AB?* Какие другие векторные соотношения можно записать?

3. Точка *C* принадлежит отрезку *AB* и *AB* *i* *CB* — *m: n.* Что означает это на векторном языке?

* 4', Известно, что *CD* = *a* • *AB.* Каково геометрическое толкование этого равенства?

5. Отрезки *AB* и *CD* перпендикулярны. Запишите это соотношение в векторной форме. '

6. Известно, что AB^2 — 0. Что можно сказать о расположении точек Л и *B?*

7. Известно, что точка *O* является серединой отрезка *AB.* Запишите это соотношение в векторной форме.

8. Как расположены точки Л, С, В, если *OC* = — *(O A + O B)?*

9. Известно, что Л В + *BC* = 0. Как расположены точки *A*% В, С?

10. Как расположены точки Л, В, D, если векторы Л В + *A D*

и AB — AD коллинеарны?

11. Каков геометрический смысл тождества

$$2a \bullet 1 = a^2 {}^*{}+ Ь^2 - (a - \&)^2?$$

О т в е т: удвоенное скалярное произведение векторов *a* и *b* равно следующей разности: суммы площадей квадратов, построенных на направленных отрезках, изображающих векторы *a* и *Ь,* и площади квадрата, построенного на направленном отрезке, изображающем вектор *a — Ь.*

11. *Задачи на выполнение операций с векторами*

12. Чему равна сумма вектора и вектора, противоположного ему?

13. Постройте точки A (1; 2), B (3; —2), C (0; 5) и D (1; —2). Найдите: а) $AB + CD$; б) $AB - CD$.

14. $ABCD$ — параллелограмм, O = $[AC]$ f) $[BD]$. Изобразите векторы: а) $AO + CB$; б) $AO - DC$; в) $OD + AB$; г) $AD - BC$.

15. В треугольнике ABC M —точка пересечения медиан. Найдите сумму векторов MA, MB и MC.

16. Дан вектор AB. Постройте векторы $2A\ B$; —2

17. Даны векторы MN и KL. Постройте векторы: а) — + 3/CL; б) $3MN$ --KL.
2

III. *Задачи на представление вектора в виде суммы (разности) векторов*

18. Дан многоугольник $ABCDE$. Представьте AD в виде суммы: а) двух; б) трех; в) четырех векторов, заданных вершинами этого многоугольника.

19. Представьте AB в виде суммы двух, трех векторов.

20. Дан А ABC. Представьте AC в виде разности векторов $B\ A$ и BC.

21. Дан пятиугольник $ABCDE$. Выразите: а) $C\ A$ через векторы $A\ B$ и BC\ б) AD через векторы $A\ B$, BC и DC.

22. $ABCD$—трапеция, $[BC]$\ \$[AD]$, Выразите CD через BA и разность векторов AD и BC.

23. Дан параллелограмм $MNP\ K$, $IMP]$ f| [Л/7С1 =0, A Є £ [iVP], \$AN$\ = \$AP$\. Представьте вектор AM через векторы MN и MO.

24. Представьте вектор $A\ B$ в виде суммы следующих векторов: а) AC, DC, BD; б) DA, CD, BC; в) DA, DC, CB.

IV. *Задачи на представление вектора в виде произведения вектора на число*

25. Отрезок AB делится точкой M на две части в отношении 3 : 1 . Выразите MB через MA.

26. ШАП — средняя линия треугольника ABC. Выразите MN через AC *(IMN] || [AC])*.

27. Через середину стороны BC равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр DK к стороне AC. Выразите DK через векторы $A\ B$ и AC.

28. Вектор CD коллинеарен вектору Л В. — — — n. Выразите один вектор через другой.

29. Точки F, D, E соответственно середины сторон A B, BC и CA треугольника ABC. Выразите вектор AD через вектор:

а) FB + ~?Е, б) ~EF — ~CE.

30. $ABCD$ — произвольный четырехугольник, M я N — середины сторон AB и CD. Докажите, что

$$\_ Ш = \frac{BC \sim MP}{2}$$

31. $ABCD$ — произвольный четырехугольник, M и N — середины диагоналей BD и AC. Докажите, что $2MN$ — DC + BA.

V. *Задачи на переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот*

32. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите x, если: а) A B — x • CD; б) AC = x • Л О; в) OC = = x • CA; г) BD = x • OB.

33. Известно, что AB ff CD и длина вектора CD равна 1. Найдите л;, если: а) CD = x • AB; б) CD = x • BA.

34. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор MN через векторы AB и AD, если |/Ш| — — $\frac{1}{3}$|ВО| и |СЛ[7]| = — $\frac{1}{2}$|СО|.

35. В параллелограмме $ABCD$ точки K и L делят стороны AB и AD в отношении 1 : 4 . Выразите KL через A B и AD.

36. Векторы BC, AD и MN коллинеарны. Каково соотношение между длиной вектора MN и суммой длин векторов BC и AD, если MN = i (BC + АО)?

37. Известно, что для любых точек Л, B, C A B + ВС = AC. Имеет ли место равенство \$AB$\ + \$BC$\ — |ЛС|?

38. Известно, что МЛ/' = ~ (AD + BC). Каково соотношение

между длиной вектора MN и длиной вектора AD + BC?

39. В треугольнике ABC [AM] и [BD] — медианы, а О — точка их пересечения. Выразите AB через векторы AM и DB.

40. Докажите, что | AB — AC| \$AB$\ + \$AC$\. В каком случае имеет место знак равенства?

41. В каком случае \$OA$ — O B | — \$OA$\— |ОВ|?

42. ДокажРіте, что | AB + BC| \AB\ + |ВС|. В каком случае имеет место знак равенства?

43. Может ли \$AB$ + ~BC\ == \$AB$ — BC\?

44. Существуют ли такие векторы a и $Ь$, что длина вектора

a -f- *Ь* меньше длины каждого из векторов *a* и*Ь?*

45. Известно, что $|AB| = 2$ см, $|CD| = 5$ см. Постройте векторы AB и CD так, чтобы длина вектора $AB + CD$ была: а) наибольшей; б) наименьшей.

46. В треугольнике ABC $[BD]$ — биссектриса угла B. Выразите BD через $B\ A$ и BC.

47. Векторы AB и AC некрллинеарны. $AD=|AC| - AB + |AB| \blacksquare AC$. Докажите, что $[AD)$ — биссектриса угла.

VI. *Задачи на преобразования векторных равенств*

48. Упростите сумму векторов: а) $AB + BC + CD$; б) $AB + AD + DN + NM$.

49. Докажите, что $MK + AB + BC + CA = MK$.

50. Упростить выражение: а) $AB + MN + BC + CA + PQ + NM$; б) $OP - ЁР + KD - KA$; в) $AC - BC - PM - AP + BM$.

51. Окружность с центром O точками A, B, C, D, E, F делится на шесть конгруэнтных дуг. Докажите, что $OA + OБ + OC + 6D + OE + OF = 0$.

52. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Упростите следующие выражения: а) $(AB + DO) + OA$; м б) $(BC + OA) + OD$; в) $04 + BC + DO + CD$.

53. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Вычислите сумму $AB \bullet AC + BC \bullet B\ A + C\ A \bullet CB$.

54. OA и OB — неколлинеарные единичные векторы. Найдите скалярное произведение $(O\ A + O\ B) \bullet (O\ A - O\ B)$.

55. Упростите выражение $(a + Ъ - c) \blacksquare (a - b + c)$,если вектор b перпендикулярен вектору c.

56. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Упростите выражение $(AB - 3BC)^2$.

57. Если $A\ BCD$ — параллелограмм, то $BC^2 + BC \blacksquare DA = 0$. Докажите.

VII. *Задачи на нахождение длины вектора и величины угла между векторами*

58. Известно, что $c = a + 6$, $(a, Ь) == 30°$, $|a| = 5$ см, $|Ь|=» = 3$ смТ Найдите $|c|$.

59. В треугольнике $A\ BC$ $|AC|$ см, $|AB| - 12$ см, $A = 52°$. Найдите длину медианы AD.

У к а з а н и е . Используйте соотношение AO — ~ $(AB + AC)$.

60. Дан треугольник MNP, $\backslash MN\backslash$ = |АФ| = 3 см, $\backslash MP\backslash$ = '«=. 4 см. Найдите MNP.

61. Известно, что векторы $a + 2b$ и $5a$ — 4Ь взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют векторы a и b, если $\backslash a\backslash$ – $\backslash b\backslash$ = – 1 см?

62. Определите $\backslash AB\backslash$, если: а) A (2; 1), B (3; 5); б) A (—2;4), B (3; -1).

63. Определите угол между векторами а и &, если: а) a = (2; 5), b = (3; -2); б) a = (2; -3), 6 = (6; 5); в) а = (2; 1), b = (5; -2).

64. В треугольнике ABC $\backslash AC\backslash$ = b, $\backslash AB\backslash$ = c, BAC = a. Найдите $\backslash BC\backslash$.

65. Докажите, что если M — середина отрезка AB, то для любой точки O справедливо соотношение

$$|ОЛ|^2 + |OB\backslash^2 = 2\ \backslash OM\backslash^2 + \text{у'ивр.}$$

66. Докажите, что если A BCD — прямоугольник, то для любой точки M справедливо равенство

$$\backslash MA\backslash^2 + |/ИС|^2 = |АШ|^2 + \backslash MD\backslash^2.$$

67. Как расположены точки Л, 23, С, если

$$|ЛС|^2 + |\ BC|^2 \bullet = j\backslash AB\backslash^2.$$

Задачи указанных типов формируют умения и навыки, являющиеся компонентами векторного метода решения задач. Наш опыт и опыт многих учителей школ Мордовии свидетельствует о том, что специальное внимание указанным задачам значительно облегчает использование векторов в конкретных ситуациях. В процессе решения этих задач вырабатываются критерии использования векторов для доказательства различных зависимостей и т. д. Векторы эффективны при доказательстве параллельности прямых, отрезков, при доказательстве принадлежности трех точек одной прямой, при доказательстве того факта, что данная точка делит данный отрезок в данном отношении, а также при доказательстве перпендикулярности прямых и отрезков, при доказательстве соотношений между длинами отрезков и величинами углов фигур. Разумеется, никакие критерии не сообщаются ученику в готовом виде, а учащиеся овладевают ими в процессе решения задач.

Приведем несколько задач, решаемых векторным методом. Условие большинства из них «наводит» на метод решения. Задачи, методы решения которых не очевидны, -а также подобные приведенным, можно найти в различных сборниках задач и в журнале «Математика в школе».

1. На отрезке AC построен^ два произвольных параллелограмма $ABCD$ и $ACKL$. Докажите, что четырехугольник $BDKL$ — параллелограмм.

У к а з а н и е . Докажите, что $BL = DK$-

2. $A\ BCD$ — параллелограмм. Из точек A *и* C проведены два отрезка AM и $CAГ$ так, что $[AM)$ f! $[CN)$ и \ AM | = | CiV|. Докажите, что четырехугольник $MBND$ — параллелограмм.

У к а з а н и е . $MB = AB - AM = DC - NC = DN$.

3. Докажите, что диагонали параллелограмма $A\ BCD$ точкой пересечения делятся пополам.

Р е ш е н и е . Пусть M — середина диагонали Л С, N — середина диагонали BD. Докажем, что $M = N$. $AM = \frac{AB\ A-AD}{2}$,

$$AN = AB + \frac{-}{2} = \frac{AB}{2} +$$

Следовательно, ЛМ == AN, а потому М = А[7].

4. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ диагонали, пересекаясь, делятся пополам (в точке О), то этот четырехугольник — параллелограмм.

Р е ш е н и е . AB = ЛО + $OB = OC + DO = DC$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон $A\ B$ и CD. Докажите, что

$$|ШГ| < \frac{W + M\ P\ I}{}.$$

У к а з а н и е . Воспользуйтесь тем, что MN = —(BC + AD).

6. Точки M, N, Р, K — соответственно середины сторон Л В, ВС, CD и DA четырехугольника $A\ BCD$. Докажите, что $MNP\ K$ — параллелограмм.

У к а з а н и е . Воспользуйтесь тем, что MN = —ЛС и /(Р =

= J-$\frac{ЛС}{2}$.

7. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении 2 : 1 .

8. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, то сумма квадратов длин двух противоположных сторон равна сумме квадратов длин двух других сторон.

Р е ш е н и е . ЛD -f~, DB -f- BC $C\ A$ = О,

$$AD + BC = BD + AC. \qquad (1)$$

Возведем равенство (1) в квадрат:

$$AD^2 + 2Ab\text{-}BC + BC^2 - BD^2 + 2BD\text{-}AC + ЛС^2. \qquad (2)$$

Так как *[BD]* JL *[AC]*, то $BD \bullet AC - 0$.

$BD^2 + AC^2 == (ВЛ + iD)^2 + (iD + DC)^2 = ВЛ^2 + 2ВЛ\text{-}Л£ + AD^2 +$

$+ AD^2 + 2X;\text{-}DC + DC^2 = BA^2 + DC^2 + 2AD\text{-}(BA + AD + DC) =$

$= \sim BA^2 + DC^2 + 2AD\text{-}BC.$ (3)

Подставляя (3) в (2), получаем: $AD^2 + 2AD \bullet BC + BC^2 =$

$= ВЛ^2 + DC^2 + 2Л£> . BC$, или $|AD|^2 + |BC|^2 = |A4|^2 + |DC|^2$.

9. В окружность (0; *R)* вписан четырехугольник *ABCD*. Докажите, что если $|ЛВ|^2 + |CD|^2 = 4/?^2$, то диагонали этого четырехугольника перпендикулярны.

Решение. $|ЛВ|^2 + \backslash CD\backslash^2 = (OB - ОЛ)^2 + (OD - OC)^2 =$

$= 47?^2 - 2 \bullet (ОЛ \bullet OB + OC \bullet OD)$. Учитывая условие, получим:

$OA \bullet OB + OC \bullet OD = 0$ (1). Отсюда $\cos AOB + \cos COD - 0$, или

$AOB + COD = 180°$, а потому **и** $BOC + DOA = 180°$. Из последнего следует, что

$$OБ\text{-}OC + OD\text{-}OA = 0. \qquad (2)$$

Вычитая из (1) (2), получим: $O\ B \bullet (O\ A - OC) - OD \bullet (O\ A - OC) = 0$, или $(ОЛ - OC) \bullet (OB - OD) = 0$. Из последнего следует, что $CA \bullet DB = 0$.

§ 3, Обучение решению задач координатным методом

Координатный метод является одним из эффективных инструментов решения задач. Он позволяет решать геометрические задачи средствами алгебры, сводить построения к вычислениям. Зачастую преобразования формул ведут к цели более простым и коротким путем. Это и послужило обоснованием заявлению изобретателя метода координат французского математика Рене Декарта: «Я решил все задачи». Координатное решение позволяет охватить всевозможные частные случаи. Важно и то, что для него не является характерным выполнение вспомогательных построений. Использование координатного метода способствует развитию вычислительных и графических навыков, пространственных представлений, геометрической интуиции учащихся, так как его применение связано с выбором системы координат, вычислением координат точек, с переводом языка уравнений и неравенств на язык геометрии и наоборот.

В свою очередь координатный метод обогатил геометрической наглядностью алгебру, что позволило сделать очевидными в геометрическом представлении многие ранее непонятные в аналити-

ческой формулировке факты. Координатный метод позволяет представить в наглядных геометрических образах течение различных процессов, свойства уравнений, отсюда велика его политехническая значимость.

Использование координатного метода при решении задач, так же как и векторного, предполагает обычно выполнение трех этапов. В геометрии эти этапы таковы: 1) перевод задачи на координатный (аналитический) язык; 2) преобразование аналитического выражения; 3) обратный перевод, т. е. перевод с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача. Применение координатного метода в алгебре связано с осуществлением перевода аналитических соотношений, т. е. языка уравнений и неравенств, в геометрические. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

1. Найти множество точек, для каждой из которых расстояния от двух данных точек равны.

Обозначим данные точки через Л и В. Выберем систему координат так, чтобы'ось Ox совпадала с прямой AB, а началом координат служила точка A. Положим, далее, $|AB| = a$, тогда в выбранной системе координат: A (0; 0), B (a; 0). Точка M (x\ y) принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда $|AM| = |MB|_y$ или, что то же самое, $|AM]^2 = |MB|^2$. Используя формулу расстояний от одной точки координатной плоскости до другой $d^2 = (x_L - x_0)^2 + (y_г - y_0)^2$» где x_i> y_1 и x_2> y_2 — координаты данных точек, получаем: $|AM|^2 = x^2 + y^2$, $|MB|^2 \sim (x - a)^2 + y^2$. Тогда $x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$. Равенство $x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$ и является алгебраической моделью ситуации, данной в задаче. На этом заканчивается первый этап ее решения (перевод задачи на координатный язык).

На втором этапе осуществляется преобразование полученного выражения, в результате которого получаем соотношение $x = \frac{a}{2}$.

На третьем этапе осуществляется перевод языка уравнения на геометрический язык. Полученное уравнение является уравнением прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от точки A на расстоянии $d = y$, т. е. срединного перпендикуляра к отрезку AB.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

На геометрическом языке в данной задаче требуется найти координаты точек пересечения фигур, заданных данными уравнениями. Первое из них является уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1, второе — уравнением параболы (первый этап).

На втором этапе осуществляется построение окружности и параболы и нахождение координат их точек пересечения.

На третьем этапе осуществляется перевод с геометрического языка на алгебраический: абсциссы точек пересечения окружности и параболы являются решением данной системы уравнений.

Применение координатного метода приводит к изящным решениям, казалось бы, совсем «некоординатных» задач. Примером таких задач может служить следующая: «Пункты A и B соединены одноколейной железной дорогой, по которой как из пункта A в пункт B, так и из пункта B в пункт A ходят поезда с остановками на всех промежуточных станциях. Составить расписание их движения».

Для ее решения надо выбрать прямоугольную систему координат, на одной оси указать положение поезда между пунктами A и В, на другой — время. В результате построения мы получим ломаную, состоящую из наклонных звеньев, соответствующих движению, и горизонтальных — остановкам на станциях. Ломаную, изображающую движение встречного поезда, нужно провести так, чтобы с построенной ломаной она пересеклась по одному из горизонтальных участков. Таким же образом осуществляется построение и других ломаных. После этого сетку линий на координатной плоскости следует превратить в сетку расписания. Решения подобных задач координатным методом рассматриваются в интересной книге Ю. В. Пухначева и Ю. П. Попова «Математика без формул» (Знание, 1978).

Однако применение координатного метода к решению алгебраических задач не относится к кругу вопросов, обсуждаемых в данном пособии, поэтому в дальнейшем речь будет идти только о координатном методе решения планиметрических задач. Наибольшее распространение среди таких задач имеют задачи двух видов: 1) на обоснование зависимостей между элементами фигур, особенно между длинами этих элементов; 2) на нахождение множеств точек, удовлетворяющих определенным свойствам. Примером задач первого вида может служить следующая: «В треугольнике ABC $\backslash AB\backslash = c_y$ $\backslash AC\backslash = b$, $\backslash BC\backslash = a$, $IBD]$ — медиана. Доказать, что

З а д а ч а : «Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная» — является примером задач второго вида.

Поскольку в школьном курсе геометрии ограничиваются лишь рассмотрением прямоугольной системы координадг, то координатный метод в планиметрии особенно эффективен для установления соотношений между длинами элементов треугольников и четырехугольников, диагонали либо стороны которых перпендикулярны (это упрощает введение прямоугольной системы координат).

Для разработки методики формирования умения применять координатный метод важно выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач мышлению решающего.

Компоненты координатного метода решения задач

Проанализируем решения приведенных выше двух задач. В процессе этого анализа выделим умения, являющиеся компонентами умения использовать координатный метод при решении задач. Знание компонентов этого умения позволит осуществить его поэлементное формирование.

З а д а ч а 1. В Л $ABC\backslash AB\backslash = c_y \backslash AC\backslash = b_y \backslash BC\backslash$ = а, $[BD]$ — медиана. Доказать, что $(BD]^2 == \frac{Q2 \perp}{} - \frac{\wedge 2 \wedge 2}{}.$ /

Выберем систему координат так, чтобы точка A служила началом координат, а (AC)— осью Ox. В выбранной системе координат точки Л, C и D имеют следующие координаты: A (0; 0), D oj и C $(b\backslash$ 0). Итак, для решения,этой задачи необходимо овладение умением оптимального выбора системы координат, в которой наиболее просто находятся координаты данных точек. Последнее в свою очередь определяет умение вычислять координаты заданных точек.

Обозначим координаты точки B через x и y. Тогда, используя формулу для нахождения расстояний между двумя точками, заданными своими координатами, получаем: $я^2 + у^2 - c^2$ и $(x - b)^2 + y^2 = а^2$, (1) По той же формуле $|BD|^2 =$ — yj + $у^2$, или $\backslash BD\backslash^2 - x^2 - xb + \frac{b^2}{} + y^2$. Используя равенства (1), имеем:

Последнее предполагает умение находить расстояние между двумя точками, заданными своими координатами, и умение вычислять координаты точек, зная расстояние между ними. Очевидно, что умение находить координаты заданных точек является обратным* к умению строить точки по их заданным координатам.

Итак, для решения приведенной задачи необходимо овладение* следующими умениями: а) строить точку по заданным координатам; б) находить координаты заданных точек; в) вычислять расстояние между точками, заданными координатами; г) оптимально выбирать систему координат; д) преобразовывать алгебраические равенства.

З а д а ч а 2. Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Обозначим данные точки через Л и B. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой Л В, а началом координат служила точка Л (умение оптимально выбирать систему координат).

Положим $\backslash AM\backslash$ = а, тогда в выбранной системе координат A (0; 0), B $(a\backslash$ 0) (умение находить координаты заданных точек).

Точка M $(x\backslash$ $y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только

тогда, когда $\backslash AM\backslash^2 - |M£|^2 = b$, где b — постоянная величина (умение составлять уравнение данной фигуры).

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем: $|AM|^2 = \quad + y^2$, $|MB|^2 = (x - a)^2 + У^2$,

$$|AM|^2 - |MB|^2 - x^2 + y^2 - (x - a)^2 - y = b$$

(умение вычислять расстояние между точками, заданными координатами) или

Уравнение (1) является уравнением прямой, параллельной оси Oy и отстоящей отточки л на расстоянии $a = \frac{|b+a^2|}{2a}$ (умение «видеть за уравнением» конкретный геометрический образ).

Нетрудно усмотреть, что для решения и этой задачи необходимо овладение перечисленными выше умениями. Кроме этого, для решения приведенной задачи, а также и других задач второго вида важно умение «видеть за уравнением» конкретный геометрический образ, которое является обратным к умению составлять уравнения конкретных фигур.

К этому результату мы придем, анализируя решения других задач координатным методом.

Выделенные умения являются основой при решении более сложных задач. В качестве примера проанализируем решения двух таких задач.

З а д а ч а 3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и конгруэнтны. На его сторонах даны точки P, Q, R, 5, такие, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA$. Доказать перпендикулярность и конгруэнтность отрезков PR и QS.

Так как в данной задаче требуется доказать конгруэнтность отрезков, что может быть сделано вычислением их длин, то одним из методов ее решения может быть координатный. Целесообразность выбора этого метода подкрепляется и тем, что диагонали данного четырехугольника перпендикулярны, что позволяет легко ввести в рассмотрение прямоугольную систему координат. Если рассмотреть решение этой задачи (Математика в школе,. 1977, № 6), то нетрудно установить, что выделенные выше умения являются основой решения данной задачи.

Нетрудно усмотреть значимость овладения перечисленными выше умениями и для решения этой задачи.

Итак, для решения задач координатным методом важно овладение умениями: а) строить точку по ее координатам; б) находить координаты заданных точек; в) вычислять расстояние между точками, заданными координатами; г) оптимально выбирать систему координат; д) составлять уравнение фигуры по ее характеристическому свойству; е) видеть за уравнением конкретный геометрический образ; ж) преобразовать алгебраические равенства.

Наиболее эффективным средством формирования указанных умений является использование специальных задач.

Задачи, формирующие координатный метод

Характер выявленных умений позволяет систематизировать задачи, способствующие овладению координатным методом. Исходя из этого, можно выделить следующие виды задач:

1) задачи на построение точки по ее координатам;

2) задачи на нахождение координат заданных точек;

3) задачи на вычисление расстояния между точками, заданными координатами;

4) задачи на оптимальный выбор системы координат;

5) задачи на составление уравнения фигуры по ее характеристическому свойству;

6) задачи на определение фигуры по ее уравнению;

7) задачи на преобразование алгебраических равенств.

Приведем примеры таких задач. Зная характер умений, учитель без труда сможет расширить этот список.

1. На координатной плоскости постройте точки *A* (2; 3), В (—2; 1), С (0; 2).

2. Отметьте на плоскости несколько точек. Начертите произвольную систему координат и найдите в ней координаты заданных точек.

3. Известно, что в некоторой системе координат: *A* (7; 2), *B* (—7; 2). Восстановите систему координат.

4. Длина отрезка *A B* равна 5 см. а) Выберите систему координат, в которой можно было бы наиболее просто определить координаты концов отрезка, б) Выберите систему координат так, чтобы координаты концов отрезка были бы: *A* (—2,5; 0), *B* (2,5; 0).

5. Треугольник ЛВС равносторонний (длина стороны равна 6 см). Выберите систему координат так, чтобы как можно проще было бы определить координаты его вершин.

6. Точка *M (x\ y)* находится от начала координат и точки Л (4; 0) соответственно на расстояниях 3 см и 4 см. Определите координаты точки *M*.

7. Дан прямоугольник *A BCD* (1Л BI = 2 см, | BC | = 4 см). Как выбрать систему координат, чтобы его вершины имели координаты *A* (—1; —2), В (—1; 2), С (1; 2), *D* (1; —2)?

8. Длины сторон треугольника ЛВС равны 3, 4 и 5 см. Выберите систему координат и определите в ней координаты вершин треугольника ЛВС.

9. Вершины четырехугольника *A BCD* имеют следующие координаты: Л (—3; 1), В (3; 6), С (2; 2) и *D* (—4; 3). Установите вид четырехугольни ка.

10. Изобразите систему координат. Отметьте на оси *Ox* точки Л и В. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек, принадлежащих: а) отрезку Л В; б) лучу Л В; в) лучу *BA*.

11. Запишите уравнение прямой, содержащей начало координат и^ точку Л (2; 5).

У к а з а н и е . Координаты точек прямой, проходящей через начало координат, удовлетворяют уравнению $y = kx$. Так как прямая содержит точку A (2; 5), то $5 = 2k$, или $k =$ Следовательно, уравнением данной прямой служит уравнение $y = -x$. 5

12. Запишите уравнение прямой, содержащей точки A (1; 3) и B (2; 7).

13. Изобразите на координатной плоскости произвольную прямую и найдите ее уравнение.

14. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек прямоугольника с вершинами A (2; 3), B (2; 5), C (4; 5), D (4; 3).

15. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек отрезка AB, где A (2; 5), B (4; 7).

16. Что представляют собой множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) x ^ 3;
б) —5 ^ я ^ 0; в) $x > 1$; г) д: < — 2; д) $\lvert x \rvert$ ^ 2; е) $\lvert x \rvert > 2$; ж) $\lvert x \rvert > 0$?

(О т в е т : а) полуплоскость; б) полоса без края x — 0; в) открытая полуплоскость; д) полоса; е) объединение двух полуплоскостей; ж) плоскость.)

17. Какую фигуру образует множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств 2 ^ л : ^ 5 и 1 ^ у ^ 3?

В 8 классе изучаются отдельные виды перемещений на координатной плоскости. Это дает возможность расширить систему координатных упражнений в 5—8 классах. Использование нижеприведенных упражнений способствует как овладению координатным методом, так и усвоению перемещений на координатной плоскости.

18. Постройте точки, симметричные точкам A (2; —3), B (5; 0), C (0; 7) относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) биссектрисы I и III координатных углов. Запишите их координаты.

19. Установите, относительно какой из координатных осей симметричны точки A (7; 2) и В (—7; 2).

20. Точки A (5; ...),и B (...; 2) симметричны относительно оси Ox. Запишите пропущенные координаты.

21. Постройте образы точек A (1; 5), B (—2; 3), C (3; 0) при параллельном переносе: а) 0(0; 0) -> K (3; 0); б) О (0; 0) М (2; 3).
* Запишите их координаты.

22. С помощью какого параллельного переноса можно отобразить точку M (—3; 4) на точку M' (2; 4)?

23. Найдите на прямых $y = -3x$ 4 1 и у == 2х + 3 точки, симметричные относительно оси Ох.

Р е ш е н и е . Пусть точки А и В удовлетворяют условию задачи. Если (а; *Ь)* — координаты точки Л, то *(а; —Ь)* — координаты точки *В*. Так как *А (а; Ь)* принадлежит прямой $y - -3x + 1$, то $b = -3a + 1$, а так как *В [а; —Ь)* принадлежит прямой $y = 2x+3$,

то $-b = 2a + 3$. Решая систему уравнений $\begin{cases} b = -3a + 1, \\ -b - 2a + 3, \end{cases}$ найдем a и b.

Данную задачу можно решить геометрически. Для этого нужно построить образ одной из данных прямых при симметрии с осью Ox и найти точку пересечения ее с другой прямой. Полученная точка является одной из искомых точек.

При решении подобных задач укрепляется мысль о том, что геометрические задачи можно решать с помощью алгебры, т. е. формируется представление о сущности координатного метода. Эти задачи можно использовать на уроках алгебры.

24. Запишите уравнение прямой, на которую отображается прямая $y = 2x - 1{,}5$ вектором $m - (3; 4)$.

25. На прямых $y - 3x + 2$ и $y - - 5x + 5$ найдите такие точки, которые находятся одна от другой на расстоянии 5 см и принадлежат прямой, параллельной оси Ox.

26. Выяснить, каким отображением является: композиция симметрий относительно осей Ox и Oy и композиция симметрии относительно оси Ox и симметрии относительно начала координат.

Р е ш е н и е .

$$\wedge Ox \left| \begin{array}{l} x' = X, \\ y' = -y \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x'' = x, \\ y'' = -y \end{array} \right. \quad S_{0y} \circ S_{0x}$$

Следовательно, *5oy^0 ox —

27, Установите координатную запись отображения, являющегося композицией симметрии относительно оси Ox. и вектора

а (а || (Ох)).

Приведем еще примеры задач, решаемых координатным методом.

1. Доказать, что если в треугольнике две медианы конгруэнтны, то- треугольник равнобедренный.

2. Найти множество таких точек В, что расстояние от каждой из них до одной данной точки в два раза больше расстояния до другой данной точки.

3. Найти множество таких точек Р, что отношение расстояний от каждой из них до двух данных точек равно k.

4. Докажите, что уравнение окружности с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом r имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

5. Запишите уравнение образа фигуры $y = (x-2)^2$ при:
а) симметрии с осью Ox; б) при симметрии с осью Оу; в) при параллельном переносе $a = (2; 3)$.

6. Можно ли окружность $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ отобразить на окружность $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ параллельным переносом?

7. Найдите угол между прямыми $3x - 4y + 6 = 0$ и $12x + 5y + 8 = 0$.

8. Запишите уравнение линии, являющейся образор окружности $y^2 + x - 6x - 0$ при гомотетии //о"2-

9. Определите расстояние от точки Л (—3; 4) до прямой y •= = x,+ 2.

10. Вычислите площадь треугольника, вершины которого имеют следующие координаты: Л (0; —2), В (6; 2) и С (2; 4).

11. На прямой I даны три точки Л, В, С так, что точка B лежит между точками Л и С. В одной полуплоскости с границей I построены равносторонние треугольники A MB и BNC. Доказать, что середина отрезка NA, середина отрезка MC и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

12. Доказать, что для любой точки D, лежащей между вершинами B я C треугольника ЛВС, справедливо равенство

| ЛВ|[1]|DC | + \$AC$\$^2$-\$BD$\ — | ЛО|^2-| ВС| =] BC\-\$BD$\-\$DC$\.

13. Дана окружность радиуса г и на ней точка Л. Найти множество точек, делящих всевозможные хорды окружности, содержащие точку Л, в одном и том же отношении $к$ {$к$ $ф$ —1).

14. Дан прямоугольник. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки, принадлежащей плоскости этого прямоугольника до его вершин, в два раза больше Суммы квадратов расстояний от этой точки до сторон прямоугольника.

15. В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до сторон квадрата постоянна.

16. Доказать, что если через некоторую точку M провести прямую, пересекающую окружность в точках Л и В, то произведение \ MA \ * \MB\ постоянно и не зависит от положения прямой.

17. Дан прямоугольник $ABCD$. Найти множество точек М, для которых j MA |^2 + | MCf = I AfB|^2 + | MD |^2. (О т в е т : множество точек M есть плоскость.)

18. Дан прямоугольник $ABCD$. Найти множество точек M, для которых | МЛ | + | MC| == | MB \ + I MD |. (О т в е т: пара прямых.)

19. Дан прямоугольный треугольник ЛВС (С == 90°). Найти множество точек Р, для которых 2 | РС Г^2 = | PA |^2 + |РВ|^2. (О т в е т: множество точек Р есть прямая, содержащая середину M гипотенузы A B и перпендикулярная к медиане CM.)

Формирование выделенных умений — важный этап изучения векторов и метода координат. Однако овладение ими еще не гарантирует того, что учащиеся справятся с решением любой задачи рассмотренными методами. Здесь важно овладение и общими приемами решения задач; умением осуществлять поиск решения, умением анализировать требование задачи, умением анализировать ее условие. Закономерности поиска решения планиметрических задач, состав и методика формирования умений анализировать требование и условие задачи — важная методическая проблема, решение которой будет способствовать совершенствованию преподавания геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра 7, 8. Под ред. А. И. Маркушевича. Просвещение, 1978, 1974.

2. Артемов А. К. Состав и методика геометрических умений школьников. Приволжское книжное издательство, 1969.

3. Болтянский В. Г. и др. Геометрия 7, 8. Педагогика, 1974, 1977.

4. Геометрия 9, 10. Под ред 3. А. Скопеца. Просвещение, 1975, 1976.

5. Гурова Л. Л. Психологический анализ решения задач. Воронеж, 1976.

6. Гусев В. А. и др. Векторы в школьном курсе геометрии. Просвещение, 1976.

7. Гусев В. А., Хан Д. И. Методика решения геометрических задач с помощью векторов. — Математика в школе, 1978, № 3.

8. Кабанова-Меллер Е. Н. Психология -формирования знаний и навыков у школьников. Изд-во АПН РСФСР, 1962.

9. Клонский В. М., Ягодовский М. И., Скопец 3. А. Применение элементов векторной алгебры к решению планиметрических задач. — Математика в школе, 1975, № 6.

10. Колмогоров А. Н. и др. Геометрия VII, VIII.Просвещение, 1977, 1974.

11. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Просвещение, 1977, ч. I—II.

12. Леонтьев А. Н. Опыт экспериментального исследования. Доклады на совещании по вопросам психологии. М., 1954.

13. Майоров В. М., Скопец 3. А. Векторное решение геометрических задач. Просвещение, 1968.

14. Маковей В. Г., Мельник Н. С. Применение векторов крешению задач. — Математика в школе, 1978, № 2.

15. Пономарев Я. А. Развитие принципа решения задач. Доклады АПН РСФСР, 1958, '№ 1.

16. Понтрягин Л. С. Метод координат. Наука, 1977.

В, А. Гусев,
Ю. М. Кояягин,
Г. Л. Луканкин,
Д. И. Хан

ВЕКТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Настоящая статья является переработанным и дополненным вариантом книги В. А. Гусева, Ю. М. Колягина, Г. Л. Луканкина «Векторы в школьном курсе математики». Одними из фундаментальных понятий современной математики являются вектор и его обобщение — тензор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а также в технике. Работы Г. Весселя, Ж- Аргана и К. Ф. Гаусса по теории комплексных чисел установили связь между арифметическими операциями над комплексными числами и геометрическими операциями над векторами в двумерном пространстве — на плоскости.

В середине прошлого столетия в работах В. Гамильтона, Г. Грассмана, Ф. Мебиуса понятие вектора нашло широкое применение при изучении свойств трехмерного и многомерного пространств.

Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. Были созданы векторная алгебра и векторный анализ, теория поля, тензорный анализ, общая теория многомерного векторного пространства: Эти теории были использованы при построении специальной и общей теорий относительности, которые играют исключительно важную роль в современной физике.

В математике в настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрии. До введения в школе новых программ по математике с понятием вектора учащиеся впервые встречались в курсе физики (скорость, сила, ускорение, напряженность магнитного поля и т. п.). Лишь при изучении тригонометрических функций в традиционном курсе школьной математики использовалось понятие вектора. Поэтому у учащихся обычно складывалось неправильное представление о том, что вектор — понятие физическое. Между тем вектор — понятие математическое, которое находит применение в физике или других прикладных науках и которое позволяет упростить

рассмотрение некоторых вопросов, а также решение задач этих наук.

Одним из ведущих понятий современной математики является понятие векторного пространства. Оно имеет широкие приложения в математике, в таких ее разделах, как «Линейная алгебра», «Линейное программирование», «Функциональный анализ» и т. д., а также во многих разделах физики. В рамках теории трехмерного векторного пространства может быть построен курс стереометрии, отличающийся от традиционного курса евклидовой геометрии большим изяществом и компактностью (хотя и менее наглядный и менее доступный для первоначального изучения). Если считать известным определение коммутативной группы, то векторное пространство можно определить следующим образом.

Более подробные сведения о векторном пространстве читатель может найти в книге: К о л я г и н Ю. М., Л у к а н к и н Г. Л. Основные понятия современного школьного курса математики. Под ред. А. И. Маркушевича. М., Просвещение, 1974, с. 132.

Множество V называется действительным векторным пространством, если:

1. V является коммутативной группой относительно операции, называемой сложением.

2. Определена операция, называемая умножением элементов множества V на действительное число, так что если a — произвольный элемент У, а a — произвольное действительное число, то $a \cdot a$ £ V и, кроме того, выполняются следующие свойства для произвольных действительных чисел а, р и произвольных элементов а, Ъ из V:

1) (а • Р) • ***а*** = а • (Р * *а)* — смешанная ассоциативность;

2) (а + Р) * я — а • а + р • а — дистрибутивность относительно сложения чисел;

3) *а* • (а + *Ь)* = *а* • *а* + а • *b* — дистрибутивность относительно сложения элементов из ***V:***

4) 1 - *а = а.*

Элементы векторного пространства называются векторами.

Так как элементы множества V могут быть элементами самой разнообразной природы, то примеры векторных пространств весьма многочисленны. В частности, векторными пространствами (с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число) являются:

а) множество многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами;

б) множество всех векторов плоскости, отложенных от начала координат;

в) множество «свободных» векторов.

Упорядоченный набор n действительных чисел $a_ь$ $a_{2У}$ ..., a_n называется я-мерным вектором (числа $a_ь$ a_2, ..., a_n называются координатами вектора, а число n — его размерностью). Определим сложение дву$ векторов $A = (a_v\ a_{2}\ ...,\ a_n)$ и $B = (Ь_{1У}\ \&_2,\ ...,\ Ь_n)$

следующим образом: $A + B = (a_x + b_v\ a_2 + b_2,\ a_n\ 4\text{-}\ b_n)$, а умножение на число a так: $a \cdot A = (a \cdot a_x,\ ce \cdot a_2,\ a\ \text{-}\ u_n)$, тогда множество n-мерных векторов образует ^-мерное векторное пространство.

Читатель без труда обнаружит, что множество всех параллельных переносов плоскости образует двумерное векторное пространство, а параллельные переносы пространства можно рассматривать как элементы трехмерного векторного пространства.

Концепция векторного пространства и рассмотрение векторов как элементов этого пространства, являясь наиболее общей и широко используемой в математике и ее приложениях, не может быть прямо перенесена в школу в рамках действующих учебников и программ. Необходима серьезная перестройка всего стиля изложения школьной математики для введения в нее понятия «векторное пространство».

§ 1. Векторы

1. О трактовке понятия вектора

В соответствии с требованиями новой программы по математике понятие вектора стало одним из ведущих понятий школьного курса математики.

Действительно, понятие вектора тесно связано с принятой сейчас теоретико-множественной трактовкой основных понятий школьного курса математики. Например, с таким важнейшим понятием школьного курса геометрии, как понятие перемещения. Кроме того, понятие вектора находит достаточно, широкие приложения при рассмотрении различных вопросов школьных курсов математики и физики.

Уже на уроках физики в 8 классе изложение материала ведется с широким привлечением векторного аппарата. Понятно, что это заставляет задуматься прежде всего наа, тем, как наиболее естественно ввести в курс математики восьмилетней школы понятие вектора, как эффективнее применять это понятие при изложении теории и решении задач, как рассматривать основные действия над векторами.

Известно, что существует несколько подходов к введению этого понятия.

В физике при помощи вектора изображаются различные направленные величины: сила, скорость, ускорение и т. п., в силу чего вектор обычно определялся здесь как направленный отрезок. При этом часто такая направленная величина оказывалась существенно связанной с определенной точкой (точкой ее приложения) или прямой.

В математике же обычно имеют дело с так называемым свободным вектором (вектором, не связанным ни с какой прямой и ни с какой фиксированной точкой).

В традиционных математических курсах вектор также определялся как направленный отрезок. При этом два вектора считались равными, если они имели одну и ту же длину и направление. Однако такое определение равенства векторов не вполне корректно, так как тем самым отождествляются два хотя и родственные, но различные понятия: «равенство» и «эквивалентность». Между тем равенство математических объектов трактуется сейчас как их совпадение, а эквивалентность — как любое отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Это различие четко реализовано сейчас в школьном курсе математики (например, в понятиях конгруэнтности фигур и равенства).

Далее, равные сонаправленные отрезки принимались за представителей одного так называемого свободного вектора, который, таким образом, трактовался как бесконечное множество равных, одинаково направленных отрезков. Каждая точка плоскости при этой трактовке представляет собой начало некоторого отрезка из семейства отрезков на плоскости. Эти отрезки затем разбиваются на подмножества, в каждое из которых попадают лишь те, которые одинаково направлены и равны по длине. Тем самым осуществляется идея разбиения всех направленных отрезков плоскости на классы эквивалентности, при этом каждый направленный отрезок является «полномочным представителем» своего класса. Направленные отрезки одного класса рассматриваются как представители одного и того же свободного вектора.

Анализируя понятие вектора, нетрудно обнаружить, что с геометрической точки зрения вектор — это объект, характеризуемый направлением (т. е. некоторым множеством сонаправленных лучей) и длиной. Однако, как известно, теми же самыми признаками характеризуется и параллельный перенос (см.: Колмогорова. Н. и др. Геометрия, VI класс. 8-е изд. М., Просвещение, 1978, с. 80). Поэтому представляется наиболее естественным всякий параллельный перенос назвать вектором (см.: Геометрия, VII класс. 7-е изд. М., Просвещение, 1978, с. 59).

Рис. 1

Такой подход к введению понятия вектора не только логически безупречен, но и обладает целым рядом достоинств методического характера. Согласно прежнему определению вектора два направленных отрезка, изображенных на рисунке 1, считались равными векторами. Однако мы не можем в этом случае говорить о равенстве этих отрезков, так как речь идет о разных множествах точек. Не устроил бы нас и термин «конгруэнтность», так как в этом случае оказались бы конгруэнтными не только те два отрезка, которые нам нужны, но и, например, отрезки, изображенные на рисунке 2. Таким образом, возникают

Рис. 2

трудности: разные множества (с теоретико-множественной точки зрения) представляют один и тот же вектор.

Новое определение вектора не связано с понятием направленного отрезка. Под вектором понимают либо множество упорядоченных пар точек, задающих некоторый параллельный перенос, либо сам этот перенос. В школьном курсе геометрии параллельным переносом (вектором) называется отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости отображаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Такой подход к определению вектора как параллельного переноса позволяет устранить противоречия с теоретико-множественной точкой зрения на понятие равенства, которое возникало при традиционном определении вектора как направленного отрезка. Известно, что параллельный перенос задается парой точек. В школьных учебниках различают термины «две точки» и «пара точек»; в случае пары точек одна — первая, а другая — вторая. Мы не пользуемся словами «упорядоченная пара». Рассмотрим множество всех пар точек плоскости. Для элементов рассматриваемого множества введем следующее отношение: пары *(А, В)* и (С, *D)* будем называть эквивалентными и обозначать (Л, *В)* — (С, *D)*, если *АВ)* 14 [*CD)* и *АВ*\ — |CZ)| (рис. 3). Это те пары точек, которые задают один и тот же параллельный перенос. Эквивалентными между собой будем считать и пары, у которых первая точка совпадает со второй. Легко проверить, что такое отношение есть отношение эквивалентности, так как обладает следующими свойствами:

1) рефлексивности: (Л, *В)* — *(АВ);*

2) симметричности: если (Л, В) — *(CD)*, то *(CD)* — *(А, В)*\

3) транзитивности: если (Л, *В)* — *(С, D)* и *(CD)* — *(К, М)*, то (Л, J5) — (/С, *М)*.

С помощью рассмотренного отношения эквивалентности производится разбиение множества пар точек плоскости на непересекающиеся подмножества (классы), элементами которых являются эквивалентные пары. Каждое из таких подмножеств можно назвать вектором. Следовательно, один и тот же параллельный перенос Т (вектор) можно задать при помощи бесконечного множества эквивалентных между собой пар точек (Л, В)~(Л$_Ь$ 5$_X$)~ ~ (Л$_2$, Я$_2$) ... (рис. 4), т. е. *Т* — *Т$_A$в* = 1/ ....

Рис. 3

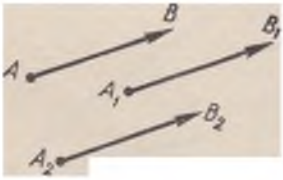


Рис. 4

Поэтому естественно говорить, что направленные отрезки *АВ, АiВ$_v$ А$_2$*В$_2$, ••• изображают один и тот же вектор *а* —

АВ= *А$_X$В$_X$* " Л$_2$$$_2$ ••• •

Так как всякий класс (подмножество) эквивалентных пар определяется любым

его представителем — любой его парой, то тем самым всякая пара точек плоскости задает (определяет) некоторый вектор на плоскости. При этом эквивалентные пары определяют один и тот же вектор, а неэквивалентные пары — различные векторы. Если вектор задается парой *{А, В) (А Ф В),* то его обозначают *АВ.* Направление, определяемое лучом *АВ,* называют направлением вектора *А В,* а расстояние *\АВ * — его длиной. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором. Пусть теперь вектор задается парой *(В, В),* т. е. парой, у которой первая точка совпадает со второй; такой вектор *ВВ* называется нулевым вектором и обозначается *ВВ* — 0. Длина нулевого вектора равна нулю, т. е. | *В В* | = 101 = 0, а направление его не определено. Итак, любой вектор *а* плоскости полностью определяется заданием одной пары точек Л и В, где *В = а (А).* Заметим, что направленный отрезок *А В* выступает при такой трактовке вектора лишь как удобное наглядное изображение вектора. Любой вектор *а Ф* 0 имеет бесконечное множество изображений в виде направленных отрезков.

Итак, мы рассмотрели возможность введения понятия вектора как множества пар точек, задающих один и тот же параллельный перенос, т. е. множество всех пар (Х, У), для которых *Т* (Х) =** *Y* есть вектор. Это множество пар *(X, Y)* иногда называют графиком параллельного переноса.

В современной трактовке принято отождествлять график с самим отображением. Все сказанное и привело к отождествлению в школьном курсе математики параллельного переноса и вектора как синонимов, обозначающих одно и то же понятие.

Понятие вектора, трактуемого как параллельный перенос, включается в систему тех понятий, с которыми учащиеся знакомятся в курсе геометрии 6 класса, а затем получает дальнейшее развитие в курсе геометрии старших классов. Так, в учебном пособии по геометрии для 9 класса под редакцией 3. А. Скопеца параллельным переносом, определяемым парой *(А, В)* несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка *М* отображается на такую точку M_{19} что луч $A1M_1$ сонаправлен с лучом *АВ* и расстояние $\backslash MM_X\backslash$ равно расстоянию | *АВ* |. Таким образом, вектор определяется как множество пар точек, задающих один и тот же перенос (т. е. также по существу понятия вектора и параллельного переноса отождествляются).

Такая трактовка вектора значительно упрощает логическую схему изложения курса геометрии. Так, например, операция сложения векторов трактуется при этом как композиция параллельных переносов. Кроме того, эта трактовка понятия вектора дает возможность, определив само понятие вектора и операции над векторами на плоскости, распространить эти определения и на случай

пространства. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем рассматривать все вопросы одновременно для плоскости и пространства, при необходимости оговаривая те случаи, когда то или иное положение будет относиться лишь к векторам на плоскости или в пространстве. Так как вектор трактуется как параллельный перенос, то все известное учащимся о параллельном переносе распространяется и на него. Таким образом, в курсе геометрии 6—8 классов параллельный перенос (или вектор) рассматривают уже как отображение всей плоскости на себя (а не какого-либо ее подмножества).

Векторы обозначают латинскими буквами со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д.

Мы говорили уже о том, что вектор можно задать одной из эквивалентных пар точек и что запись одного и того же вектора может быть различной. Так, вектор, изображенный на рисунке 4, можно записать так: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$.

Напомним, что в записи $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ речь идет о различных направленных отрезках AB и CD, изображающих один и тот же вектор а, но не о равенстве (или конгруэнтности) этих векторов.

Вектор $\vec{a}$ $\vec{\Phi}$ $\vec{0}$ можно задать, во-первых, указанием расстояния ($r > 0$) и направления; во-вторых, соотношением X - *■ $\vec{O}$ X_1 = $\vec{a}$ (X), т. е. парой точек X и $\vec{a}$ (X).

Для дальнейшего важен случай, когда параллельный перенос осуществлен на нулевое расстояние, т. е. имеет место тождественное отображение E (X) плоскости (или пространства). Такой параллельный перенос называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Для нулевого вектора также можно использовать различные обозначения: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{XX}$.

Длина вектора выражается формулой $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Направление вектора есть общее направление лучей, представляющих данный параллельный перенос. Для нулевого вектора направление не определено.

Один из наиболее важных моментов, связанных с введением понятия вектора, заключается в умении различать разные векторы и видеть одинаковые векторы. Например, две точки A и B, где $A \neq B$, задают два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Семь различных точек плоскости, из которых шесть точек — вершины правильного шестиугольника, а седьмая — центр описанной около него окружности, задают 19 различных векторов.

Важно также отчетливо понимать, что вектор есть отображение точек всей плоскости (или пространства) на себя. Запись $\vec{a}$ (X) = =: X_x следует читать так: вектор $\vec{a}$ отображает точку X плоскости

(или пространства) на точку X_x той же плоскости (или пространства). В этой связи можно трактовать запись a — $AB = CD$ как запись отображений: B — a (Л), $D = a$ (С), при этом ясно, что $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены, а $|AB| = |CD|$.

§ 2. Операции над векторами

1. Сложение и вычитание векторов

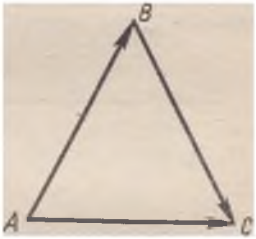
Суммой двух векторов a и b называется отображение плоскости на себя, являющееся результатом последовательного выполнения отображений a и b (т. е. композиция $b o d$).

Сумма векторов может обозначаться так:

$$a + 1 \text{ или } (a + T>)\ (X) = 6\ (a\ \{X)).$$

Отметим, что в методической литературе имеет место упрощение терминологии. Например, говорится: построить вектор $AB = CD + EF$, что означает: построить направленный отрезок, изображающий вектор $A\ B$, который является суммой двух данных векторов CD и EF. Мы также будем использовать подобные упрощения в терминологии.

Известное правило треугольника, вытекающее из определения .суммы векторов, позволяет геометрически найти сумму данных векторов (рис. 5). Интересен случай, изображенный на рисунке 6. Здесь сумма векторов оказалась нуль-вектором. Этот случай ярко иллюстрирует отличие смысла математического термина «перемещение» от его житейского толкования (путь). Если, найример, ситуацию, изображенную на рисунке 6, истолковать как поведение путешественника в незнакомом городе, который долго -бродил по улицам и вернулся в гости- ницу (им проделан значительный путь), то перемещение (результат пути) выражается нулевым вектором. Путешественник «отобразился» в исходную точку.



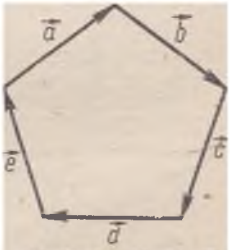
$AB + BC = AC$

Рис> 5

Рассмотрим физическую задачу, при решении которой используется сложение векторов.

З а д а ч а . Лодка движется от одного берега к другому со скоростью скорость течения реки v_2. Какова истинная скррость движения лодки?

Р е ш е н и е . Изобразим условия задачи с помощью векторов (рис. 7). Тогда решением задачи будет $v_{HCT} = v_x + v_2$.



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{0}$

Рис. 6

$V_{,,CT.}$

Так как любое перемещение F обратимо, то F^{-1} также является перемещением, причем $F^{-1} o F = F o F^{-1} = E$.

Если $F = a$, тогда по определению $F^{*1} = -a$ есть противоположный вектор, а из утверждения $F^{-1} o F = E$ следует, что $a + (-a) = 0$.

V_2

Рис.

Из определения суммы векторов получаем закон поглощения нулевого вектора: $a + 0 = 0 + a = a$.

Нетрудно установить, что из равенства $c = a + (-b)$ следует $b + c = a$. В самом деле, $b + [a + (-b)] = b + [(-b) + a] = (b + (-b)) + a = 0 + a = a$. Здесь мы пользуемся законами коммутативности и ассоциативности сложения векторов (см. п. 4).

Отсюда естественным образом получаем определение разности $a - b$ как вектора c, такого, что $b + c = a$.

Геометрическое построение разности векторов представлено на рисунке 8: $a - b = a + (-b)$.

Заметим, что операции сложения и вычитания векторов нередко встречаются в жизненных ситуациях, на которые мы обычно не обращаем внимания, например:

1) пешеход в безветренную дождливую погоду наклоняет зонтик вперед, хотя дождь падает отвесно;

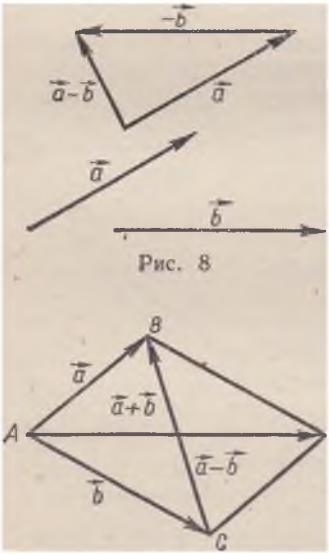


Рис. 9

2) дождевые полосы на окнах вагона двух встречных поездов имеют различные направления.

Отметим, что разность и сумма двух векторов могут изображаться направленными диагоналями одного и того же параллелограмма (рис. 9).

2. Умножение вектора на число. Умножение вектора на число можно определить так:

1) $0 \cdot a = 0$; 2) $k \cdot 0 = 0$;

3) если $k > 0$, $a \neq 0$, то $k \cdot a$ есть вектор направления a длины $k|a|$,

4) если $k < 0$, $a \neq 0$, то $k \cdot a$ есть вектор направления, противоположного направлению a, длины $|k| \cdot |a|$. Числовой множитель пишут слева.

Произведение вектора на число можно определить и так, как это сделано в учебном пособии по геометрии для

7 класса (Геометрия, VII класс. М., Просвещение, 1978, с. 90): «Произведением вектора a на число x называется вектор, имеющий (при a ф 0) направление вектора a, если $x > 0$, и противоположное направление, если $x < 0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора a на модуль числа x».

Заметим, что оговорка, сделанная в данном определении относительно a (aф 0), необходима для указания направления вектора $x \cdot a$ (в этом случае необходимо оговаривать и то, что x ф 0). Для указания длины этого вектора такие оговорки не нужны.

Приняв это определение умножения вектора на число, необходимо особо рассмотреть случаи умножения вектора на число 0 и умножение нулевого вектора на любое число x.

Из определения следует, что $\backslash x \cdot a \backslash =$ |*| • |a|. (1)

а) Пусть |лг| = 0, тогда правая часть равенства (1) есть нуль. Значит, $| x \cdot a \backslash$ — 0, т. е. 0 ■ a = 0 для любого a.

б) Пусть a = 0, тогда |a| = |0| = 0, т. е. праваячасть равенства (1) также обращается в нуль для любого числа x. Значит, $\backslash x \cdot a \backslash$ — 0, т. е. $x \cdot 0 = 0$ (закон поглощения нулевого вектора).

Прежде чем рассматривать остальные свойства операции умножения вектора на число, рассмотрим вопрос о коллинеарных векторах.

3. *Коллинеарные векторы*

Пусть O — любая точка плоскости. Каждый вектор a ф 0 имеет, как известно, бесконечно много изображений в виде направленных отрезков. Заметим, что легко осуществить операцию по построению направленного отрезка OK, для которого OK — a. Действительно, с этой целью достаточно через точку O провести луч с началом в точке О, имеющий то же направление, что и вектор a, а затем на этом луче отложить отрезок O K длины | a |. Операцию построения направленного отрезка OK, для которого OK — a, называют откладыванием вектора a от точки O.

Пусть на плоскости заданы сонаправленные или противоположно направленные векторы a, 6, c (рис. 10). Каждый из этих векторов отложим от одной и той же точки O. Мы видим, что они изображаются направленными отрезками одной и той же прямой.

Векторы, которые могут быть изображены направленными отрезками одной и той же прямой, на-

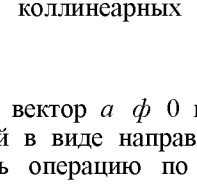


Рис. 10

зываются коллинеарными. Таким образом, векторы a, b и c коллинеарны. Можно также сказать, что ненулевые векторы коллинеарны, если их направления совпадают или противороложны.

Заметим, что вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда существует такое число k ф 0, что выполняется равенство $a = kb$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Используя операцию откладывания вектора от некоторой точки О, всегда можно любые векторы, заданные на плоскости, привести к этой точке (сделать ее началом направленных отрезков, изображающих данные векторы).

В ряде случаев оказывается удобным рассматривать векторы в некоторой системе координат.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат xOy.

Отложив на лучах Ox и Oy отрезки единичной длины OE_x и $OE.,$ получим два вектора, которые принято обозначать:

$$OE_x — i,\ OEy = /.$$

Мы видим, что система координат может быть определена указанием точки O и единичных векторов i и /. Векторы i и j взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Значит, можно считать, что произвольная прямоугольная декартова система координат задается указанием начальной точки O и двух взаимно перпендикулярных векторов i и / одинаковой длины. Неравные нулю векторы $a = OA$ и $Ъ = OБ$ перпендикулярны, если угол между направлениями этих векторов прямой. Нулевой вектор считают перпендикулярным любому другому.

Существует взаимно-однозначное отображение $a = OA$ A множества всех векторов $\vec{a}$ на множество всех точек A плоскости, а также отображение A -> $(x,\ y)$, т. е. множество всех точек A плоскости на множество всех пар чисел (x, y). Возникающее отсюда отображение a $(x,\ y)$ тоже взаимно-однозначно. Поэтому числа x и y можно считать и координатами вектора $\vec{a}$: они однозначно определяются вектором айв свою очередь, взятые вместе, однозначно определяют вектор a. Нетрудно усмотреть, что $a = O\ A — x \cdot i$ -f $+ y \cdot /$. Таким образом, вектор a может быть представлен в виде $a = x \cdot i + y \cdot /$ единственным образом.

Координаты вектора $\vec{a}$ обозначаются a_x и a_y соответственно.

Мы исходили из определенной системы координат, заданной точкой О и векторами $\vec{i}$ и $\vec{y}$. Но нетрудно заметить, что коэффициенты a_x и a_y представления $a — a_x \cdot i$ -f $a_y \cdot j$ не зависят от выбора точки О.

Векторы $a_x = a_y$ ■ *г, а* • / называются составляющими вектора а в данной системе координат.

Так как коллинеарные векторы могут быть изображены направленными отрезками одной прямой, возникает возможность выражения коллинеарных векторов через координаты точек прямой. Отсюда можно найти условие, при котором направленные отрезки прямой изображают один и тот же вектор.

Обозначим *е — OE Ф* 0, где О — начальная точка (нулевая).

Тогда *OE*\ — *е* — единица длины. Так как каждая точка прямой характеризуется своей абсциссой *XA* , *хв* и т. д., нетрудно установить условие совпадения векторов на прямой:

$AB = CD <\& (\backslash x_в — x_A | = \backslash x_D — x_c \backslash П$ (sign $(x_в —$ $x_A) =$ sign $(x_D —$ $— x_c))$, т. е. $AB = CD <=> xв — XA — XD — X_c$.

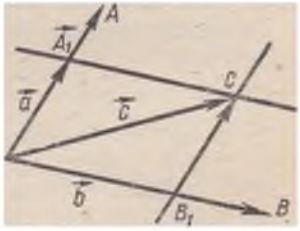
Пусть, например,

XA — 2; $x_в$ =—4; x_c — 7; X_D — 1; тогда AB —CD, так как —4 — 2 = 1 — 7; —6 = —6.

В векторном исчислении и его приложениях большое значение имеет представление (разложение) вектора в виде суммы нескольких векторов, называемых составляющими данного вектора. Разложить вектор *с* по двум неколлинеарным векторам *а и b* — значит представить его в виде суммы двух векторов, которые будут коллиеарны данным векторам *а* и *Ь*.

Пусть заданы три неколлинеарных вектора *а, Ь, с*. Разложим вектор *с* по векторам *а* и *Ь*. Для того чтобы разложить вектор *с* по двум векторам(неколлинеарным)*а* и *Ь*, надо представить *с* в виде суммы двух векторов, коллинеарных соответственно *а* и *Ь*. Для этого от точки *О* отложим векторы *а, b* и *с* (рис. 11).

Через точку *С* проведем прямые, параллельные отрезкам *OA* и *OB*. Получим параллелограмм, в котором *[OC]* — диагональ. В этом параллелограмме $OC = OA_c + OB_{lY}$ причем OA_x коллинеарен *а*, OB_x коллинеарен *Ь*. Значит, можно найти такие числа *x* и у, что $ОЛ_x = xa$, $OB_x = yЬ$. А -тогда $c — xa + yЬ$, т. е. мыпредставили *с* в виде суммы двух векторов *xa* и *yb*, соответственно коллинеарных *а п Ь*.



Докажем теперь единственность разложения вектора *с*. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что вектор *с* можно разложить двумя способами: $c == xa + yb$

рис. и

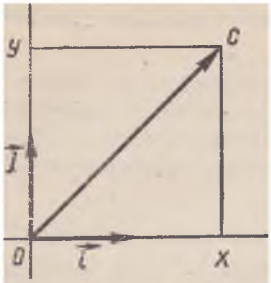


Рис. 12

и c — $x_i a + yxb$, где $x\phi x_b$ y Φy_x. Так как c — один и тот же вектор, то, применяя свойства сложения векторов и умножения вектора на число, имеем:

$$x_x a + y\phi = xa + yb,\ x_x a — xa — yb — y_c b,$$

$$(x_x — x)\ a = (y — y^\wedge\ b,\ a — y\text{–}y^* b.$$

Следовательно, a коллинеарен b. Получили противоречие с условием. И потому = * и $y_t = y$.

Итак, установлено существование и единственность такого разложения.

В общем случае, когда a и b — произвольные неколлинеарные векторы, заданные в определенном порядке (а — первый, b— второй векторы (базиса)), a c — $xa + yb$, то числа x и y называют координатами вектора c относительно базиса (a, b).

Разложение вектора c по двум перпендикулярным векторам, или, другими словами, по направлениям координатных осей декартовой прямоугольной системы координат xOy, заданной в плоскости (рис. 12), является частным случаем рассмотренного выше разложения.

Следовательно, и в этом случае $OC = xi + y/$.

Векторы i и / называются базисными векторами; также говорят, что они образуют координатный базис. Представление вектора c в виде суммы (составляющих векторов) называется разложением этого вектора по базису i и /. Коэффициенты x и y при базисных векторах i и / называют декартовыми координатами вектора c.

В дальнейшем вектор c, заданный координатами л: и у, будем обозначать так: c = (х, у) и записывать: $c = xi + yj$. В этом случае будем говорить, что вектор задан в координатной форме.

4. Свойства операций над векторами

Основные законы векторной алгебры представлены следующими свойствами:

1) $a + b = b + a$ — коммутативность;

2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность;

3) $a + 0 = 0 + a = a$ — закон поглощения нулевого вектора;

4) $(xy) \cdot a = x\ (y \cdot a)$ — сочетательность;

5) $xa + y\ a = (л: + y)\ a$ — первый распределительный закон;

6) $xa + xb$ — $x\ (a + b)$ — второй распределительный закон;

7) $0 \cdot \vec{a}$ — $\vec{O}$ — закон поглощения нуля;

8) $x \cdot 0 = 0$ — закон поглощения нулевого вектора.

5. Скалярное произведение двух векторов и его свойства

В 6—8 классах скалярное произведение векторов не рассматривается, однако для плоскости эта операция может быть рассмотрена на факультативах.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению числовых значений длин этих векторов на косинус угла между векторами.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Пример. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 3$, угол между ними равен 60°. Тогда скалярное произведение этих векторов будет равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}\ \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cos 60° = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Если из двух векторов хотя бы один вектор нулевой, то скалярное произведение таких векторов принимается равным нулю.

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность).

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивность).

3. $m\vec{a} \cdot \vec{b} = (m \cdot n)\ \vec{a} \cdot \vec{b}$, т. е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

4. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Из этого свойства вытекает справедливость следующей теоремы: для того чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

5. выражение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ будем обозначать a^2 и называть скалярным квадратом вектора $\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату числового значения его длины, т. е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$.

6. косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение числовых значений длин векторов, т. е.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

6. Операции над векторами, заданными своими прямоугольными координатами

Как известно, любой вектор в пространстве можно разложить по трем данным некомпланарным векторам. На практике чаще всего в качестве тройки векторов используют упорядоченную тройку

(/, /, k) попарно ортогональных единичных векторов. Пусть разложение вектора a по базису $(i, /, k)$ имеет вид:

$$a = a_x\ i\ \text{-j~}\ c\,iyj\ \text{-j-}\ clJz.$$

Числа a_x, a_{y9} a_z называют координатами вектора a относительно базиса $(i, /, k)$. Так как в данном случае базис прямоугольный, то они получили название прямоугольных (декартовых) координат. Для обозначения используется краткая запись:

$$a = (a_x{}' a_y{}- a_z)'$$

Известно, что если вектор а задается парой (Л, В), где точки Л и £ в прямоугольной (декартовой) системе координат заданы

своими координатами A (x_x, y_x, 2_X) и B (x_2, y_2, $г_2$), то вектор а = Л В имеет следующие прямоугольные координаты:

U_x — ~У₂ УЛ» ^ ₂ = ^*2^1*

Например, направленный отрезок, изображающий вектор AB, имеет начало в точке A (3; 2; —1) и конец в точке B (4; —5; 3);

тогда координаты вектора AB имеют вид: a_x — 4 — 3 = + 1 , a_y = -^{5} -_2 = -7, $a_г$ = + 3 - (-1) = +4.

Итак, AB = (+1, —7, +4).

Свойства операций над векторами

Имеют место следующие теоремы об операциях над векторами, заданными в координатной форме.

1. Пусть даны а = (a_x, a_{yt} a_z) и b — (b_x, b_y, b_z), тогда сумма этих векторов есть вектор c, координаты которого равны сумме одноименных координат слагаемых векторов, т. е. $c = \vec{a} + \vec{b}$ — = ^X» «у ^у> ^)*

П р и м е р , а = (3; 4; 6) и $Ь$ = (—1; 4; —3), тогда

с = (3 + (-1); 4 + 4; 6 + (-3)) = (2; 8; 3;).

2. a — (a_x, a_y, $a_г$) и 6 = (6_X, $Ь_y$, &*), тогда разность этих векторов есть вектор с, координаты которого равны разности одноименных координат данных векторов, т. е. c — a — b = (a_x — $Ь_x$, a_y — $Ь_y$\ $a_г$ — b_z^

П р и м е р , a = (—2; 8; —3) и 6 = (—4; —5; 0), тогда

с = а —?==(—2 —(—4); 8 —(—5); —3 — 0) = (2; 13; —3).

3. При умножении вектора $a = (a_x,\ a_y,\ a_z)$ на число m все его координаты умножаются на это число, т. е.

$$ma — (ma_x",\ ma_y\backslash\ ma_z).$$

П р и м е р , a = (—8; 4; 0) и m = 3, тогда

За = (-8-3; 4-3; 0-3) = (—24; 12;. 0).

4. Пусть $a — (a_x,\ a_y,\ a_z),\ b — (b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений одноименных координат данных векторов, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

П р и м е р . Пусть a = (1; —5; 8) и b — (0; 3; —2), тогда

а -ft- 1-0+ (—5)-3 + 8-(—2) = — 31.

5. Пусть вектор $\vec{a}$ задан координатами, т. е. $\vec{a} — (a_x,\ a_y,\ a_z)$.

Тогда числовое значение его длины |a| = $V+ {}^{a}l$ + «f, **а**

косинусы углов между направлениями вектора a и положительными направлениями осей координат (т. е. ортами) вычисляются по формулам

cos a = ^ -I* cos 6 = Ttq^ cos y = i -*.*
I a I I aI _ I a|

-+■

Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора a.

П р и м е р. Найти числовое значение длины и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ = (—2; 3; —5).

Р е ш е н и е . Находим числовое значение длины вектора:

$$|\ a\ | = V\,a^2_x + a^2_y + a^2_z = V(\sim 2)^2 + 34\text{-}\ (\sim 5)^2 = V38;$$

далее,

cos a = -т=^, cos p = -т=г, cos y = -т=-.
Y38 /38 Y 38

§ 3. Приложение векторов к доказательству теорем и решению задач

Понятие вектора, которое нашло широкое распространение в прикладных науках, явилось плодотворным и в геометрии. Аппарат векторной алгебры позволил упростить изложение некоторых сложных геометрических понятий, доказательства некоторых теорем школьного курса геометрии, позволил создать особый метод решения различных геометрических задач.

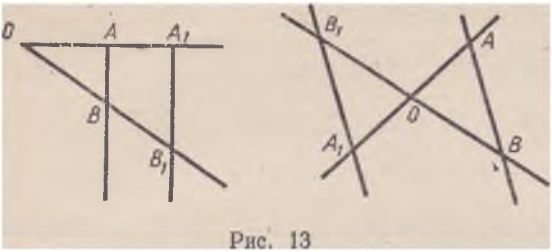
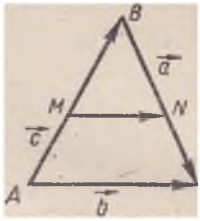


Рис. 13



1. Применение векторов при доказательстве теорем

В учебных пособиях по геометрии, начиная с 7 класса, уже используется векторный аппарат при доказательстве некоторых теорем. К таким теоремам можно отнести следующую: если при гомотетии с коэффициентом k точки X и ^отображаются на точки

$X_{г}$ и $У_{ь}$ то $x У_{1} = kXY$

Из этой теоремы получаем важные свойства гомотетии:

а) при гомотетии с коэффициентом k все расстояния между точками умножаются на $|k|$

б) гомотетичные фигуры подобны;

в) при гомотетии с положительным коэффициентом каждый луч отображается на сонаправленный с ним луч. При гомотетии с отрицательным коэффициентом каждый луч отображается на противоположно направленный с ним луч (рис. 13).

Из свойства (в) следует, что при гомотетии прямая отображается на параллельную ей прямую, отрезок — на параллельный ему отрезок, угол — на конгруэнтный ему угол.

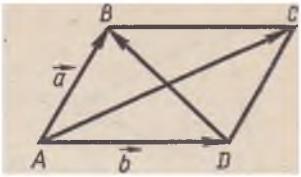
Итак, эта теорема позволяет отнести гомотетию к преобразованиям подобия (само определение гомотетии в своей формулировке этого не содержит). Заметим, что с использованием векторов в разделе о гомотетии и подобии доказывается еще одна теорема: если отрезки $OA_{г}$ и $OB_{=}$ пропорциональны отрезкам $O\ A$ и $OБ$ и лежат соответственно на лучах $O\ A$ и 05, то прямые $A_X B_X$ и AB параллельны.

Важную роль играют векторы при изучении тригонометрических функций в 8 классе. Здесь тригонометрические функции sin a и cos a определяются как координаты точек единичной окружности, а соотношения между элементами в прямоугольном треугольнике получаются из рассмотрения формул, связывающих координаты произвольного и единичного вектора:

$$a_x = | a [\cos a, \quad a_y = | a [\sin a.$$

Пользуясь векторами, можно доказать известные нам теоремы планиметрии. Так, например, в учебном пособии по геометрии для 6 класса доказана теорема Фалеса. Доказательство ее фактически

сводится к осуществлению параллельного переноса, отображающего точку A_c на точку C_c.



Следствием из этой теоремы является теорема о средней линии треугольника (ниже эта теорема доказана иначе).

Рассмотрим доказательство некоторых теорем с помощью векторов.

Т е о р е м а 1. Средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и ее длина равна половине длины этой стороны.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим Д ABC (рис. 14). Пусть $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$, тогда по определению суммы векторов $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$. Пусть M и N — середины сторон AB и BC A ABC, тогда

$$Ш = m + BN == -AB + -BC^{\wedge} - + - = -(c+a) = -b.$$
$$2\ 2 \qquad 2\ 2\ 2 \qquad 2$$

Так как $AC = b$ и $MN = —b$, то MN — $—AC$.
$$2\ 2$$

Таким образом, MN ff AC, следовательно, $[AC]$ || ШЛ/1. Так как $MN = \backslash AC$, то |MJV| =1|ЛС|.
$$л \qquad \wedge$$

Т е о р е м а 2. Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 15).

1. Положим $AB = a$, $AD = b$ (|/4£| = |CD| = a, $\backslash AD\backslash$ = - | $BC\backslash = b$).

2. По определению суммы и разности векторов $AC = a + b$, $DB = a — b$.
$$\mathbf{v} \qquad —\mathbf{v}—\mathbf{y}$$

3. Используя свойства скалярного квадрата, получим:

$$AC^2 + DB^2 = (a + b)^a + (a — b)^2 — a^2 + 2a \cdot b + b^2 + a^2 — 2a\text{-}\sim b +$$

$$+ b^2 = 2a^2 + 2b^2,$$ т. е. | /4С |^2 + | DB |^2 = | ЛВ |^2 +1 BC |^2 + I CD |^2 + #

$$+ \backslash AD\backslash\backslash$$ так как ЛС^2 = | AC|^2, DB^2 — \ DB j^2.

Т е о р е м а 3. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $ABCD$ — данный ромб (рис. 16).

1. Введем обозначения: AB — a, $BC = b$ Из определения ромба AB — DC = a, $AD = BC = b$.

2. По определению суммы и разности векторов $AC = a + b$, DB — a — b.
$$mm''\wedge$$

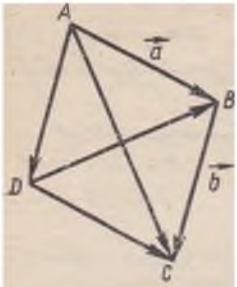


Рис. 16

3. Рассмотрим $AC \cdot DB = (a + b)$ x x (а— b) = $a^2 - b^2$ = а^2 — b^2 (по свойствам скалярного произведения).

4. Так как стороны ромба равны, то $a = b$. Следовательно,ЛС • DB — 0. Из последнего получаем: $AC \pm DB$, т. е. $[DB]$ 1 $\pm$ $[AC]$.

Т е о р е м а 4. Диагонали в прямоугольнике имеют равные длины.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $ABCD$— данный прямоугольник (рис. 17).

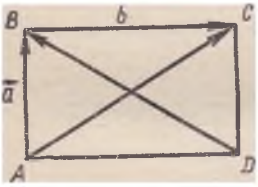


Рис. 17

1. Введя обозначения AB — a и $BC = b$, получим: $AC = a + b$\ DB — a — b.

2. Найдем квадраты длин диагоналей, используя свойство скалярного произведения:

ЛС^2 = |ЛС|^2 = $(a + b? = a^2 + 2a \cdot b$ + Г^2- $= a^2 + b^2$, так как а- 6 = 0, ибо в прямоугольнике a Lb.

Итак, | ЛС|^2 = а^2 + b^2. Далее, DB^2 — |DB|^2 $=(a—b)^2 — a^2 — 2a \blacksquare b + b^2 — a^2$ + &^{2}, так как $a \pm b$.

Следовательно, | ЛС|^2 = |£>£|^2 = $a^2 + b^2$, т. е. |ЛС| = \DB\.

2. Методика решения геометрических задач с помощью векторо

Введенный в среднюю школу векторный аппарат дает новый эффективный метод для решения геометрических задач. Подробнее об этом методе сказано в статье В. А. Гусева и Д. И. Хана «Методика решения геометрических задач с помощью векторов» (Математика в школе, 1978, № 3).

По значимости его можно уподобить методу составления уравнения.

Так как этот метод является новым для учащихся, необходимо:

а) заинтересовать учащихся, показав им эффективность его использования на специально подобранных задачах;

б) обучать учащихся некоторым эвристикам (системе определенных правил, помогающих найти ключ к решению задачи), которые помогут создать у них навык в его применении;

в) обучать этому методу на достаточно простых по геометрическому содержанию задачах, чтобы не отвлекать внимание школьников на трудности чисто геометрического содержания.

Следует иметь в виду (и впоследствии указать на это учащимся), что векторный метод не является универсальным, к решению некоторых задач он может быть неприменим или малоэффективен.

Можно выделить следующие эвристики:

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторной языке)
a II $Ь$	AB — kCD, где [AB\aa, [CD]ab, k — число; в зависимости от выбора [AB] и [CD] возникают различные векторные соотношения, среди которых выбираются подходящие
A е a B £ a C £ a (три точки принадлежат одной прямой)	а) Установить справедливость одного из следующих равенств: $AB = k\text{-}BC$, или AC&$mk'BC$, или $AC = k'AB$, или б) доказать равенство $QC = p>QA$ -f $q\text{-}QB$, где p -f- q = 1 и Q — произвольная точка, или в) доказать равенство $a\text{-}QA$ + $\$\text{-}QB$ -j- $y\text{-}QC$ = 0, где а -f- Р + y = 0, Q — произвольная точка,
c 6 [AB], | AB |: | CB | = m : n (деление отрезка в данном отношении)	AC =- CB n ИЛИ ftQ/f ^{m} ~ QR $m + n$ m n для некоторой точки Q
a ± $Ь$	AB • CD — 0, где A £ q, B £ ct_y C £ b_t D
Вычислить длину отрезка	а) Выбрать два неколлинеарных базисных вектора (или три некомпланарных), у которых известны длины и величина угла между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $a^2 = a^2$
Вычислить величину угла	а) Выбрать два неколлинеарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними; б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить cos $(a, Ь)$ — „ -*«-*■ a * $Ь$ / М - 1 Ч

Конкретные применения первых трех эвристик читатель может пронаблюдать при рассмотрении аффинных задач; последних трех эвристик — при рассмотрении метрических задач.

3. Аффинные задачи.

Хорошо известны те трудности, с которыми сталкиваются учащиеся и учитель, когда речь идет о решении аффинных задач.

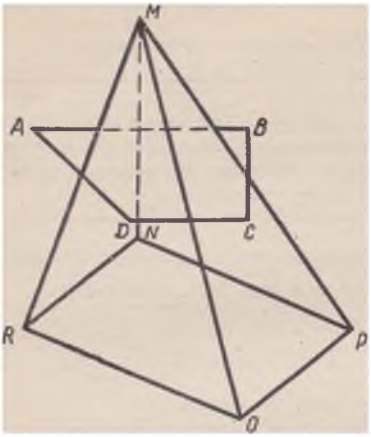


Рис. 18

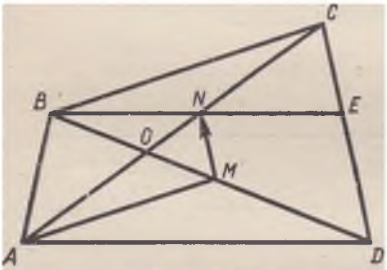


Рис. 19

Выделим несколько видов аффинных задач, которые целесообразно решать с применением векторов. При этом обращаем внимание на задачи, в тексте которых не содержится никаких понятий векторной алгебры (т. е. чисто геометрические).

Здесь не рассматривается система задач каждого вида, конкретный вид иллюстрируется задачами средней сложности. Вместе с тем указываются те требования, которые предъявляются к задачам данного вида. Следует отметить, что рассмотренные ниже три вида задач достаточно распространены среди тех задач, которые приходится решать учащимся средней школы.

К первому виду отнесем задачи, связанные с доказательством параллельности некоторых отрезков и прямых. В задачах этого типа для решения нужно показать коллинеарность векторов, изображаемых некоторыми данными отрезками, т. е. доказать, что $a = kb$, где k — некоторое число. Рассмотрим решение задач такого вида на примерах.

З а д а ч а 1. В плоскости даны четырехугольник $ABCD$ и точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон этого четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 18), а N, P, Q и R — точки, симметричные точке M относительно середин $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DA]$.

Согласно «правилу параллелограмма» имеем:

$$MN = MA + MB,\ MP = MB + MC,\ MQ = MC + MD,$$

$$MR = MD + MA. \qquad (1)$$

По определению разности векторов:

$$NR = MR - MN \text{ и } PQ = MQ - MP.$$

Так как $NR - PQ = (MR - MN) - (MQ - MP)$, то, используя равенства (1), убеждаемся, что $NR - PQ = 0$, т. е. $NR =$

■= PQ. Аналогично доказывается, что $NP = RQ$. Следовательно, $NR = PQ$ и $NP — RQ$, а это значит, что четырехугольник $NPQR$ — параллелограмм.

З а д а ч а 2. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямая, проведенная через вершину A параллельно (BC), пересекает (BD) в точке M, а прямая, проведенная через вершину B параллельно стороне AD, пересекает (AC) в точке N. Доказать, что ШЛП || [DC1.

Р е ш е н и е . Для решения задачи достаточно доказать коллинеарность векторов (рис. 19), т. е. надо доказать, что $DC = kMN$, где k — некоторое число. Но векторы DC и MN непосредственно один через другой не выражаются, т. е. их коллинеарность видна не сразу. Чтобы убедиться в их коллинеарности, нужно выразить каждый из этих векторов через некоторые другие векторы. При этом замечаем следующее: вектор DC легко выражается через векторы OC и OD, вектор MN — через векторы OM и ON, где $O = (AC)$ П (BD). А векторы OC и ON можно выразить через вектор AO, векторы OD и O — через вектор BO. Отношение длин отрезков диагоналей четырехугольника можно принять равным отношению чисел: $|AO\ :\ |0C| = p : q$, $\backslash B0\backslash : \backslash 0D\backslash — m : n$ (1). Тогда можно выразить вектор DC через AO и BO последовательными заменами:

$$DC = OC — OD = \hat{}AO — -BO = — (mqAO — npBO).$$

p m mp

С другой стороны, из параллельности отрезков BE и AD вытекает $|AO\backslash : |$ОЛП = |DO| : $\backslash OB\backslash = n : m$ (2). Тогда из чертежа и равенств (2) следует: ON = —AO. Аналогично из параллельности отрезков AM и BC следует: |£0| : $\backslash\ OM\ \backslash$ = |CO| : $|AO\backslash = q\ '\ p$ и OM = —BO. Тогда можно выразить вектор MN через AO и BO последовательными заменами: MN —ON — OM— ——BO + + $^{r}L\overset{m}{A}\bar{O}^{\prime}$ = $\frac{}{nq}$ $(-np = BO + mqAO)$.

Откуда DC = —MN, что и означает в переводе на геометрический язык параллельность отрезков MN и DC.

Ко второму виду относятся задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в некотором отношении или, в частности, является его серединой.

Для доказательства того, что точка C делит отрезок AB в некотором отношении $\backslash AC\backslash : \backslash CB\backslash = m : n$, достаточно:

а) доказать равенство AC = —CB;

б) доказать равенство

$$QC = \frac{\quad}{m+n} \cdot QA - f \frac{\quad}{m+n} QB,$$

где Q— произвольная точка. Доказательство достаточности последнего пункта (б) несложно:

$$QC. \frac{n\ QA}{m+n} \qquad m\,4\text{-}/n \qquad \backslash m \quad n\} \qquad =r.\ IQA + \frac{}{m} LQB, \frac{}{n}$$

$$*=»\text{-}\frac{}{m}(QC\text{-}QA) = \text{-}(QB \frac{}{n} \qquad \blacksquare QC)\wedge > \text{-}\frac{}{m}AC = \frac{}{n}\text{-}CB,$$

что и означает, что I AC]:] CB \ = ^{m}

Заметьте, что, проведя доказательство в обратном порядке, можно убедиться в необходимости условия б) для деления точкой C отрезка AB в отношении m : n.

Решим несколько задач этого вида.

З а д а ч а 3. В произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий. Доказать, что этот отрезок делится ею пополам.

Р е ш е н и е . Тот факт, что точка O (рис. 20) является серединой отрезка EF, можно доказать различными способами. Наиболее естественными из них являются:

1) доказать, что EP — QF, это означает, что $EPFQ$ — параллелограмм, и так как $[EF]$ является его диагональю, то она проходит через точку O и делится ею пополам;

2) доказать, что EO — OF;

3) доказать, что $Q0 = —\ (QE + QF)$ или $NO = \text{-i}\ (NE + NF)$;

4) доказать, что CO — — $\frac{}{2}(CE + CF)$ или DO ——$(DE + DF)$.

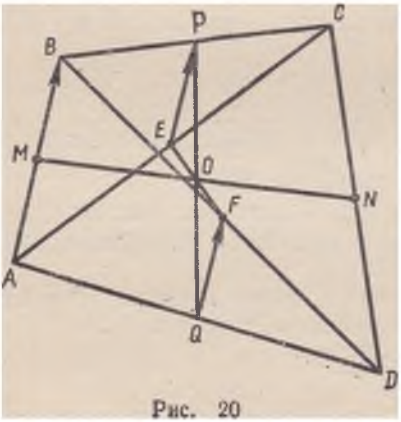


Рис. 20

Рассмотрим первый способ доказательства, который в Данном случае является и самым простым.

В треугольнике ABC отрезок EP является средней линией, откуда EP— AB. В треугольнике ABD отрезок QF является средней линией, откуда

$\frac{}{2}QF = —AB$. Это значит, что

$EP = QF$, и задача решена.

З а д а ч а 4. В параллелограмме $A\ BCD$ сторона AD разделена на n конгруэнтных частей и первая точка деление со-

ма

единена с вершиной B (рис. 21). На какие части делит полученная прямая диагональ AC?

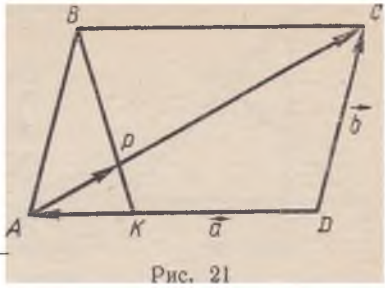


Рис. 21

Решение. Пусть $DC = b$, $DA = a$ и $AP = a\ AC$ (рис. 21).

Выразим вектор AP двояким образом через векторы a и b:

1) AP — а AC — $a\ (b - a)$ =а $ф$— — $a) - ab - aa$\

2) $AP = AK + KP = \frac{-a}{n} + aKB = \frac{-a}{n} + a(-a + b)$^ I

$= \frac{a}{n} + ab$ (KP= а KB, так как А APK <*> А BPC).

Тогда по теореме о единственности представления вектора через два неколлинеарных вектора имеем: $\frac{a - 1}{n} = -a_4 \Rightarrow a = \frac{1}{n+1}$.

Это значит, что длина отрезка AP составляет $(n + 1)$ часть от длины отрезка AC. Задача решена.

При решении задач второго вида иногда выбирается произвольная точка Q плоскости в качестве полюса. При решении задач второго вида (и вообще при решении задач векторным способом) находит широкое применение следующая теорема.

Теорема. Пусть точки A_1, A_2, A_3 не лежат на' одной прямой, M — четвертая данная точка, а Q — произвольная точка плоскости. "Если

$$QM - o^{\wedge}iQ4_1 + PiQ^2 + YiQ^3>$$

$$QM - a_2QA - i + P_2\ Q^4{}_2 + y\%QA_3,$$

то $a_e = a_2$, pi = p_2, $y_e = y_2$.

Доказательство. Имеем:

$$QM = a, OAг + {}^{\wedge}QA, + {}_{yi}QA_3\ j\ q\% + \quad + {}_y q\%$$

$$QM = a_2Q\ л\ i + J\backslash QA_2 + j_2QA_3\ j\ 1 \quad {}^{\wedge}\ '1 \quad -$$

$$= oc_2\ Q^{\wedge}{}_1 - j - P_2\ Q - <4_2 \quad {}^{\wedge}(^a i\ ^{\wedge}{}_2)\ 1 - \{-(Pi\ P_2)Q.A_2 \sim \backslash \sim$$

$$(Yx - Y_2)Q^{\wedge}{}_3\ {}^{-}0 - Ho\ QA_2 = QA_1 - \{-\ A_XA_{21}\ QA_3 = QA_1 - f - A_eA_3.$$

Тогда $(a_e - a_2)\ QA_X + (P_x - p_2)\ QA_1 + (Э_x - (3_2)\ A\ A_2 +$

$+ (Yi - V_2)Q^{\wedge}i + (У_1 - У_{21}\ A_1A_3 = 0 \text{»} [(«_1 - a_2) +$

$+ (Pi - P_2) + (Yi - V_2)|\ QA_1 = (Pi - Pa) + (Yi - Ye) <Mi*$

Так как точкой Q может быть любая точка плоскости, то в левой части последнего равенства вектор QA_X переменный, а в правой — векторы A_2A_b A_3A_e постоянны и неколлинеарны. Значит, это

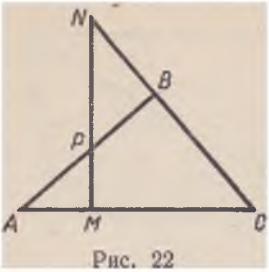


Рис. 22

равенство возможно только при равенстве нулю коэффициентов при этих векторах:

$$[(1 - a_2] + [Pi - P_2] + [Yi - Yt] = 0,$$
$$Pi - Pr = °<$$
$$Yi - Y* = °-$$

Откуда и вытекает, что $a_x = a_2$» Pi = $= P_2$, Yi = Y2*

Рассмотрим теперь решение задачи из второй группы с использованием этой теоремы.

З а д а ч а 5. На стороне AC треугольника ABC взята точка M, что $|AM| = \frac{1}{3}|AC|$, а на продолжении стороны BC — такая точка N, что $|BN| = |CB|$. В каком отношении точка P пересечения отрезков AB и MN делит каждый из этих отрезков?

Р е ш е н и е. Обозначим: $|NP|:|PM| = a : p$, $|AP|:|PB| = y : б$ (1) (рис. 22). Тогда нам нужно найти $a : P$ и $y \cdot б$. Для этого нужно составить несколько уравнений, содержащих a, P, Y. б. Два таких уравнения можно написать сразу, используя теорему о делении отрезка в данном отношении.

Если Q — произвольная точка плоскости, то для отрезков A B и NM имеем:

$$QP = \frac{1}{a+p}QyV + \frac{1}{a+P}QM, \qquad (2)$$

$$QP = \frac{JL}{V+б}QA + \frac{L}{Y+б}QB. \qquad (3)$$

Написанные равенства содержат пять различных векторов. Уменьшим их число, заменив имеющиеся векторы другими на основе той же теоремы. Тогда для отрезков NC и AC имеем:

$$QB = \frac{1}{2}(QN + QC), \quad QM = \frac{1}{O}QA + \frac{1}{O}QC. \qquad (4)$$

Подставляя из равенства (4) в равенства (2) и (3) значения QB и QM, получим:

$$QP = \frac{7+6}{2a}QA + \frac{V}{2(Y+6)}QN + \frac{p}{2(Y-6)}QC, \qquad (5)$$

$$QP = \frac{2a}{3(a+P)}QA + \frac{m+p}{3(a+p)}QC. \qquad (6)$$

Откуда на основе доказанной выше теоремы имеем:

$$\frac{V}{2(|+б)} = \frac{P}{a+P'}$$

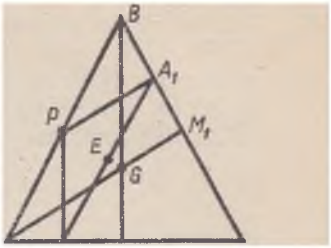
$$\frac{7+6}{[2(7+б)} = \frac{2a}{3(a+P)'}$$

$$\frac{Y}{3(a+p)} = \frac{a}{3(a+p)}$$

Решив эту систему уравнений, получим: $y = 8$ и P = —- a. Это говорит о том, что $|AP| = |BP|$ и $|NP|$:[Ш| = 3:1.

Задача решена.

К задачам третьего вида отнесем те, в которых требуется доказать принадлежность трех точек одной прямой. Эти задачи можно было бы рассматривать как частные случаи задач предыдущего вида. Но они имеют некоторую специфику решения в связи с использованием условия принадлежности прямой трех точек. Представителем задач этой группы является следующая.



A B, M_2 C

Рис 23

З а д а ч а 6. На стороне ЛЛтреуголь-ника ABC дана точка P, через которую проведены прямые параллельно его медианам AM± и BM_2 и пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_y и B_x. Доказать, что середина отрезка A_1B_1 (точка E), а также точка P и точка G пересечения медиан данного треугольника лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е . Изменим заключение задачи таким образом, чтобы можно было применить векторы к ее решению. Это можно сделать следующими способами (рис. 23):

1) Установить, что $EP = kGP$ (можно взять и другие векторы).

2) Для некоторой точки Q установить, что $QE = k\ QP +$

$+ (1 — k)\ QG$ (условие принадлежности трех точек одной прямой).

Первый путь решения нам знаком из решения задач первого вида.

Рассмотрим второй путь. Но для этого вначале выведем условие принадлежности Трех точек одной прямой.

Для того чтобы точки A, B, C принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы для полюса Q выполнялось равенство

$QC = pQA + q\ QB,\ p + Q = I$-

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой. Тогда можно написать: $|AC| : |CB| = m$.: я. Это означает справедливость следующей цепочки равенств:

$$|AC|:|CB| = m: \qquad OC = \frac{QA}{m+n} \text{ Н} — \frac{QB}{m+n} \ \&$$

$$\&\{QC = pQA + q\ QB \bullet p + q = 1\}.$$

Рассуждения, проводимые по этой цепочке, доказывают и необходимость, и достаточность условия.

Решение данной задачи, таким образом, сводится к тому, чтобы установить зависимость между векторами QP, QE, QG. Если точку Q выбрать произвольно, то решение задачи окажется весьма усложненным, поэтому выберем точку Q в удобном для нас месте. Лучше всего принять ее совпадающей с точкой С. При этом векторы CP,

CE, CG легко выражаются через CA и CB. Действительно, пусть $|AP| : |PB| = m : n$ (1). Тогда | ЛВ$_X$|: |ВхС| — $m : (m + n + n) = m : (2n + m)$ (2) (так как M_2— середина [ЛС]) и | BA_y\ : | A_cC\— $= n : (m + m + n) = n : (2m + n)$ (3) (так как M_t — середина 15С1). Из свойства центра тяжести G вытекает:

$$CG = \wedge\text{-}\pm(CA + CB) = \wedge(CA+CB). \qquad (4)$$

Из отношений (2) и (3) можно написать:

$$CB = \frac{2n + £?}{2(m+n)}, - CA, \quad CA_c = \frac{2я>+я}{2(m+n)} CB.$$

Тогда из свойства середины E отрезка Л^ можно написать:

$$CE = -\left(CB + CAJ = -/ \quad — \quad C \quad A \quad + \quad m \quad - CB\right). \qquad (5)$$

По теореме о делении отрезка в данном отношении имеем:

$$CP = \frac{СЛ}{m+n} + \frac{CB}{т+п}. \qquad (6)$$

Чтобы связать векторы CG, CE, CP, преобразуем вектор CE:

$$\wedge = \frac{1}{4} / E+idll \wedge + \wedge L\pm ZLdl\wedge. cs) = \frac{1}{4}(СЛ + CB +$$

$$+ \frac{!!}{m+я} СЛ + \frac{Щ}{т+n} = -(3CG+ CP) = — CG +$$

$$+ -CP, \text{ т. е. } C£=-CG + -CP, \text{ а так как } 1 + 1 = 1,$$

то точки £, G, P принадлежат одной прямой и |£G| :|P£| = 1 :3. Задача решена.

Рассмотренные нами виды аффинных задач на плоскости далеко не исчерпывают всего многообразия этих задач. Но они образуют самые многочисленные группы задач, что и оправдывает их специальное рассмотрение.

4. *Метрические задачи*

При решении метрических задач используется скалярное произведение векторов. Мы не будем классифицировать эти задачи по видам, а приведем несколько примеров таких задач.

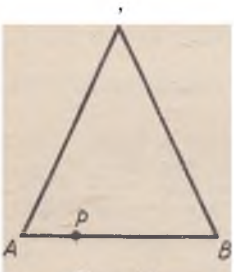


Рис. 24

З а д а ч а 7. На основании AB равнобедренного треугольника ABC дана точка P. Доказать, что $|PC|^2 = |ЛС|^2 — |AP| - |BP|$. Выяснить, как изменится формула, если точка P расположена на продолжении основания AB.

Р е ш е н и е . Запишем требуемое равенст-

во в векторной форме. Учитывая сонаправленность^векторов ЛР и PB (рис. 24), получим: $PC = AC^2 - AP \cdot PB$ (1). Доказательство равенства (1) и есть решение задачи. Преобразуем правую часть (1): AC^2 — -ЛРх РВ = AC(ЛС + CP)- (PC + CB) = ЛС² — AC ■ PC — — $AC \cdot CB + CP^2 - CP \cdot CB$ = (ЛС² — ЛС • РС) — (ЛС х Х СВ + CP- CB) + СР² = $AC \cdot (AC - PC)$ — СВ • (ЛС + СР) -f- + CP^2 = (ЛС" + С?) • (^с — СВ) + СР² = ЛР • (ЛС — С5) + + СР².

Если теперь вектор СВ' — ЛС, то ЛС — СВ = CB' — CB — = ВВ', но А $AB'B$ прямоугольный. Таким образом, $AP \cdot (AC$ — — СВ) = AP • ВВ' = 0. Следовательно, ЛС² — ЛР • РВ — СР², откуда и вытекает справедливость доказываемого равенства. Исследуем изменение этого равенства в зависимости от расположения точки Р на прямой AB. Если точка P принадлежит отрезку AB, то при переходе от векторного равенства (1) к скалярному равенству имеем: РС² = |РС|²= |РС|², ЛС⁵ = |ЛС|²= |ЛС|², AP ■ PB =

= | ЛР| • | PB\cos (ЛР, РВ) = | ЛР| • | РВ| • cos 0° = | ЛР| х х |РВ|, т. е. |РС|² = |ЛС|² — |ЛР| • |РВ|.

Если же точка Р не принадлежит отрезку AB, то векторы ЛР и PB противонаправлены и ЛР • PB — | ЛР| • | РВ| cos 180° = = —| Л Р | • | РВ|. Тогда доказываемое равенство имеет вид: | РС|² = = |ЛС|²+ | ЛР| • |РВ|. Задача решена полностью.

З а д а ч а 8. Найти сумму квадратов длин медиан треугольника, если известны его стороны a, b и c.

Р е ш е н и е . Рассмотрим Д ЛВС (рис. 25).

1. Пусть Л В — c, BC — a, $C A$ — b.

2. По определению суммы векторов

$AD = c + BE^*$ a+-, СР=Ь + -

3. Используя свойство скалярного квадрата, получим:

Ш+ТЕ²+ СР² = (с- + |) + (а +1) +

+ (^+₇)= Г² + с - а + ^ a^* + $aЛ$+

+ $\frac{1}{4}$ ² + Ь ² + &.;+^. = $\frac{1}{4}$(а² + &² + с²) +

= [c - а + b ■ a +& • c]. (1)

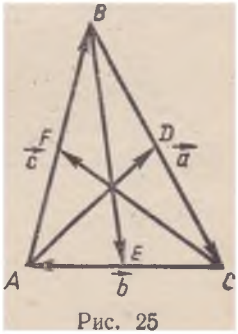


Рис. 25

4. Так как по правилу сложения векторов $a + b + c$ — О, то $(я + b + c)^2 = 0$. Таким образом, $a^2 + \&^2 + c^2 + 2\,[a - c + a \cdot Ь + fc \cdot c] = 0$, т. е. $a^2 + Ь^2 + c^2 = —2\,[c \cdot a + 6 \cdot a + 6 \cdot d$

Итак, $c - a + Ь - a + Ь * c$ $a^2 + 6^2 + c^2$

Подставив полученное значение **в** равенство **(1),** получим:

$$\backslash AD\backslash^* + \backslash BE\,|^2 + |CF|^2 = |(a^2 + b^2 + c^2),.$$

так как согласно свойству скалярного квадрата

$$AD^2 = |\,AD\ I^2,\ BB^2 = |\,BE\,|^2,\ CF^2 = \backslash CF\,|^2.$$

З а д а ч а 9. Доказать, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1. Пусть $[AP] \pm$ [BC], [BQ] -L $[CA]$, где [ЛР] и [BQ]—высоты А ABC и O — точка их пересечения (рис. 26).

2. Обозначим $OA = a$, $OB = Ь$, $OC = c$ и L — точка пересечения (OC) и (ЛВ).

3. По определению разности векторов AB — b — a, BC = «= c — $Ь$, CA— a — c.

4. Таккак $[PA] \pm$ [BC], то $a \cdot (c — Ь) = 0$, т. е. $a \cdot c = a \cdot Ь$.

5.Аналогично, так как [OB] JL [СЛ], то $6 \cdot (a — c) = 0$, $т.\ е.\ b \cdot c = b \cdot a$.

6. Из этих равенств по транзитивности $a \cdot c — b > c$ (так как $a \cdot b = b \cdot a$), т. е. $c \cdot (я — 6) = 0$.

Последнее означает: [OC] J_ [ЛВ].

7. Итак, [CL]— высота А ЛВС.

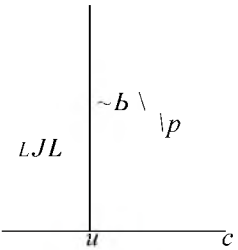


Рис 26

З а д а ч а 10. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов длин противоположных сторон четырехугольника были равны. Доказать.

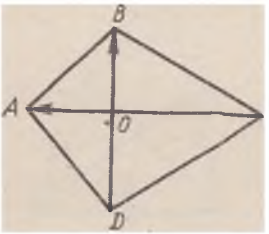


Рис. 27 *

Н е о б х о д и м о с т ь . Имеем перпендикулярность диагоналей ЛС и BD (рис. 27). Нужно доказать равенство $|\,ЛВ|^2 + 1\ CD\ |^2 = |BC|^2 + |ЛО|^2$. Здесь можно обойтись без векторов, используя теорему Пифагора. В самом деле, $|ЛВ|^2 + \backslash CD\backslash^2 = |ЛО|^2 + |OB|^2 + |CO|^2 + |OD\backslash^2$ — $(|ЛО|^3$ Н- $+ |\ 0£>|^2) + (|\ OB|^2 + 1\ OC|^2) - 1\ ЛО|^2 + |BC|^2$. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь . Имеем равенство

$$j AB |^2 + J CD)^2 = | BC |^2 + | AD |^2.$$

Нужно доказать перпендикулярность диагоналей AC и BD. На языке векторов это означает доказательство одного из равенств:

а) CA ■ DB = 0; б) OA • OB = 0; в) OA • DO — 0;

г) CO ■ OB = 0; д) CO • DO = 0; е) CO • DB = 0;

ж) OA • DB = 0; з) OB • CA = 0; и) DO • СЛ = 0.

Теперь нужно составить такое равенство, в котором содержа* лись бы величины |ЛВ|², |CD|², |BC|², $\backslash AD\backslash^2$ и члены одного из равенств, которые нужно доказать.

Для этого прежде всего преобразуем исходное скалярное равенство AB^2 + CD² = BC^2 + DA^2 (при записи векторов, получаемых из скаляров, лучше всего соблюдать определенный порядок букв по определенному выбранному направлению обхода). Здесь мы замечаем, что можно дополнить суммы до полного квадрата и рассмотреть первые степени полученных сумм, т. е. приходим к необходимости сравнения выражений AB + CD и BC + DЛ. Но они в сумме дают нулевой вектор в силу замкнутости четырехугольника $ABCD$:

$AB + CD + BC + DA = 0$& $AB+CD = CB$ + ЛОфф

^ $(AB + cЪy$ = (CBj-f ADf^> | ЛВ|² +J CD |² + 2 Л В • CD -

«= | BC I² + $\backslash AD\backslash^2$ + 2 AD • CBфф AB • $CD = AD$ ■ CB&

<=> $(AO + OB)$ $(CO + OD) = (M) + OD)$ $(CO + OB)$ ф=>

«=» ло-со + ло-оВ + ов-со + ов-оо = ло-со +

+ ло-ов + о5-со+о5 - ов<=> (ло • oh— AO ■ $дв)$ +

+ $(OB$ ■ CO — OD ■ $CO)$ = 0 « ЛО (OD — 0"B) + CO (OB — OD)=

= 0«=* $(OB$ — $OD)$ $(OA + CO) = 0$<& DB ■ CA = 0,

что и означает перпендикулярность диагоналей.

§ 4. Система геометрических задач, решаемых с применением векторов

1. Понятие вектора. Сложение и вычитание векторов

1. Записать различными способами выражения:

а) Вектор $\overrightarrow{a}$ отображает точку Л на точку B;

б) Вектор AB отображает точку E на точку С;

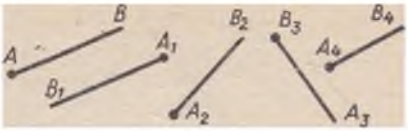
в) Вектор CD отображает $[AB]$ на [$Л_1$^5_1];

г) Параллельный перенос на расстояние AB в направлении от Л к В отображает точку D на точку С;

д) Вектор $\overrightarrow{a}$ отображает фигуру F на фигуру F_t.

2. Прочитать следующие выражения: $a\ (B) = A,\ AB\ (c) = D,$ $A\ B = OE$ — и изобразить их на чертеже.
3. Сколько различных векторов задает:
   а) множество точек $\{A,$ В$\}$;
   б) множество точек $\{A,\ B,$ С$\}$;
   в) множество вершин равностороннего треугольника;
   г) множество вершин параллелограмма;
   д) множество точек $\{A,\ B,\ C,$ £>$\}$?
4. Сколько различных векторов изображено на рисунке 28, $a,\ Ь,$ в?
5. Известно, что $AB = CD$. Можно ли утверждать, что $\backslash AB\backslash$ — = |CD|?
6. Известно, что $\backslash AB\backslash = \backslash CD\backslash$ и |C£>| ϕ 0. Можно ли утверждать, что $AB = CD\}$
7. Могут ли быть различными два вектора, изображаемые направленными отрезками равной длины, расположенными на одной прямой? Привести пример.
8. Можно ли один и тот же вектор изобразить направленными отрезками, расположенными на: а) двух пересекающихся прямых;
   б) на различных параллельных прямых; в) на одной прямой?
9. Могут ли пары точек, первая из которых — центр окружности, а вторая — точка окружности, определять один и тот же вектор?
10. Могут ли пары точек, одна из которых — центр окружности, а другая — точка круга, определять один и тот же вектор? Привести пример.
11. Определяют ли пары точек, -составленные из несмежных вершин равнобедренной трапеции, один и тот же вектор?
12. Отложить от точки О до плоскости все векторы, определяемые парами вершин данного ромба.
13. Задать вектор $\bar{a}$ и точки $A,\ B,\ C,\ D$. Построить точки $\bar{a}$ (Л), $a\ (B),\ AB\ (C),\ DC\ (B).$
14. Вектор $\bar{a}$ отображает начало координат в точку (2, 3). В какие точки отображает этот же вектор точки A (0,2); B (—2, 0); C (-2, -3); D (-3, 1)?

15. Вектор b отображает точку M (—2, —1) на точку M_x (—1, 3), а отрезок $A\ B$ — на отрезок AxB_c с координатами точек A_x (2, 0) и B_x (3,3). Найти координаты концов отрезка AB.



16. Точку A (—2, 3) вектор a отображает на точку Q (1, 0). В какую точку отображает точку A вектор той же длины и противоположного направления.
17. Записать на языке векторов, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.
18. Даны треугольник ABC, медиана BM этого треугольника и $MN = BM$. Доказать, что AB — NC.
19. Изобразите на плоскости несколько фигур, каждую из которых данный вектор переводит снова в эту фигуру.
20. Отложить от данной точки О три таких вектора, чтобы при их последовательном откладывании один за другим получился треугольник.
21. В какой из изображенных на рисунке 29 лучей можно отобразить луч AB при помощи: а) некоторого вектора; б) центральной симметрии; в) поворота?
22. Что является результатом двух последовательных центральных симметрий? Показать на рисунке.
23. Какое отображение получится, если над точками плоскости произвести последовательно два переноса. Показать на рисунке.
24. Дан квадрат $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Какими перемещениями можно отобразить: а) вершину B на вершину D; б) отрезок BO на отрезок ОС; в) отрезок BO на отрезок OD; г) отрезок BC на отрезок DC; д) отрезок BC на отрезок AD; е) квадрат $A\ BCD$ сам на себя?
25. Существуют ли перемещения, при которых в квадрате $ABCD$ G центром О: а) $(B$ -> 0; б) $\begin{cases} A \to C, \\ O \to O; \end{cases}$ в) $\begin{cases} B \to A, \\ C \to B; \end{cases}$ г) $\begin{cases} A \to A, \\ C \to C, \\ O \to O; \end{cases}$

д) $(A\ A,$

1с-*-С?

26. Дан равносторонний треугольник ABC, $[AD]$ — его биссектриса. Какими перемещениями можно отобразить: а) B -*■ C; б) $[AB]$-*--$[AC]$\ в) треугольник ABC сам на себя?
27. Дан ромб $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей О. Какими перемещениями можно отобразить: а) отрезок $A\ B$ на отрезок DC; б) $\begin{cases} A \to A, \\ O \to O, \\ C \to C; \end{cases}$ в) $\begin{cases} A \to A, \\ B \to B, \\ C \to C, \\ D \to D; \end{cases}$ г) ромб $A\ BCD$ сам на себя?

28. Дан квадрат $ABCD$ с центром О. Какое перемещение отображает! а) $[AB)$ -у [DC); б) $[AB)$ -+ $[CD)$ \ в) $[AB)$ $[AD)$ \ г) (ЛВ) $[DA)$ \ д) $[AC)$ -у $ЮС)$ -, е) ЮЛ) [ОС); ж) $ЮВ)$ -у [ОС); з) $[OB)$ -у [ЛО)?

29. Дан равносторонний треугольник ABC, AD — биссектриса угла Л. Какое перемещение отображает! а) [Л В) [С Л) ; б) [Л£>)-ИВС)?

30. Построить произвольный треугольник ЛВС и начертить луч MN. Найти образ этого луча при' последовательном выполнении векторов Л В и ВС.

31. Даны два вектора a и b и отрезок. Изобразить образ этого отрезка для композиции векторов b и a.

32. Даны два вектора (рис. 30) a и $Ь$. Найти сумму этих векторов по правилу треугольника (при решении использовать клетчатую сеть).

33. Даны два вектора a и $Ь$. Построить вектор c такой, что $a + c = — Ь$.

34. Может ли быть длина суммы двух векторов одинаковой длины: а) меньше длины каждого вектора; б) равна длине каждого вектора; в) больше длины каждого вектора; г) больше суммы длин векторов; д) равна сумме длин векторов?

35. Найти сумму векторов Л В и CD, если Л (1, 1); В (3, 4); С (0, -1); D (1, 3).

36. Найти сумму векторов а и & по правилу параллелограмма (рис. 30, *б)*.

37. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ построен другой параллелограмм $ACEF$. Чему равен вектор FE, если $a\ (A) = B$ и $b(A) \sim D$?

38. Доказать равенство $BC + A\ B = AD + DC$, не используя рисунок.

39. Дан вектор $\vec{a}$. Представить его в виде суммы двух векторов!
а) имеющих данные направления; б) один из которых дан;
в) имеющих длины (всегда ли это возможно?); г) имеющих взаимно перпендикулярные направления.

40. Как найти сумму трех и более векторов? Сформулируйте правило сложения. Сделайте рисунок.

41. Найти сумму векторов: а) AB -+• $BC + CD'$, б) $MN + MP +$ + PQ + QE; в) ХК -\- $YZ + ZX$.

42. Записать вектор AB в виде суммы двух векторов, один из которых есть вектор AM.

43. Записать вектор CD в виде суммы двух векторов, один из которых есть вектор PD.

44. Записать вектор MN в виде суммы двух векторов.

45. Записать вектор AB в виде суммы трех векторов, если один из них — вектор: а) Л/С; б) DB; в) CD.

46. Записать вектор MN в виде суммы трех векторов.

47. Даны векторы a, b и d. Найти вектор c такой, что $a + b$ -f $c = d$.

48. Какому условию должны подчиняться три вектора а, & и с, чтобы можно было построить треугольник ABC такой, что
$AB = a$, $BC = b$, CA = с?

49. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром О. Упростить суммы векторов: а) $(A\ B + OD)$ + СО; б) $(BC + O\ A) + OD$.

50. Указать на рисунке 31 коллинеарные векторы.

51. Как провести прямую, чтобы векторы, изображенные направленными отрезками этой прямой, были коллинеарны вектору $BA7$ Сколько таких прямых можно провести?

52. Изобразить в тетради несколько коллинеарных

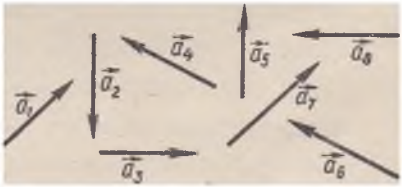


Рис. 31

векторов; отложите эти векторы от одной и той же точки, сделайте вывод.

53. Дана равнобедренная трапеция. Выпишите все множества коллинеарных векторов, определяемых вершинами трапеции.

54. Для четырехугольника $MNPQ$ векторы: а) MN и PQ коллинеарны, а NP и MQ неколлинеарны; б) NM и QP, NP и QM коллинеарны. Какую фигуру представляет в каждом из этих случаев четырехугольник $MNPQ$?

55. Упростить суммы: а) $AB + MN + BC + CA + PQ + NM$;

б) $FK + MQ + \sim KP + AM + QK + PF$\ в) $KM + \sim DF + AC + FK + CD + PA + MP$; г) $AB + BA + CD + MN + DC + NM$.

56. Даны векторы AB и CD. Найти сумму векторов AB и вектора, противоположного вектору CD.

57. Возможно ли равенство векторов AB и BA?

58. Найти разность векторов a и b (рис. 30).

59. Даны векторы AB и CD. Найти разность вектора CD и вектора; противоположного вектору AB.

60. Даны четыре точки A, B, C, D. Выразить вектор AB в виде разности двух векторов, определяемых данными точками. Сколькими способами это можно сделать?

61. Записать вектор AB в виде разности двух векторов, один из которых равен вектору OA.

62. Записать вектор CD в виде разности двух векторов, один из которых равен вектору KD.

63. Записать вектор MN в виде разности двух векторов.

64. Представить вектор AB в виде алгебраической суммы следующих векторов: а) AC, DC, BD; б) DA, CD, BC; в) DA, DC, CB.

65. Упростить выражения: а) $OP - EP + KD - KA$; б) AD -f $+ MP + E\sim K - ЁP - MD$; в) $AC - BC + MP - PA + BM$,

66. Рассматривая параллелограмм, определяемый векторами a и b, проверить правильность соотношений $(a - b) + b = a$.

67. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка O. Выразить вектор OD через векторы $OA = m$, $OB = n$, $OC = p$.

68. В каком отношении находятся векторы a и b, если векторы $a + b$ и $a - b$ коллинеарны?

69. $ABCD$ — параллелограмм. Какому условию должны удовлет-

ворять векторы BA и BC, чтобы вектор AD — AB образовывал равные углы с ними?

70. Может ли выполняться равенство $|CA + CB| = |CA - CB|$?

71. Могут ли длины векторов $AB \pm AC$ быть больше длины каждого из векторов AB и AC? Привести пример.

72. Доказать, что $|AB - AC|$ $|AB| + |$ЛС$|$. В каком случае имеет место знак равенства?

73. Сравнить длины j $a + b|$ и $\backslash\ 'a\backslash + |b\backslash$, если: а) a и b сонаправлены; б) a и b неколлинеарны. Чему равна длина $\backslash\ a +$ й|, если a и b противонаправлены?

74. Для любых четырех точек Л, B, C, D доказать справедливость равенств: а) $AB + CD$ == Л£ + СВ; б) $AC + BD$ = ЛЛ + + ВС; в) AB + ВС = Л/) + DC. Изобразить эти соотношения на рисунке.

75. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, имеющие общую медиану AA_X. Доказать, что $CB_X = C_XB$.

76. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A^C^$. Доказать, что векторы AA, и C_XC равны.

77. Пусть $ABCD$ и Л^С^ —два четырехугольника. Доказать, что AAi -f- BB_A -f- CC_X -j- DDi = ЛС^ -f- В/^+СЛ] -f- DBi.

78. Проверить справедливость равенства $ЛЛ_г + BB_X + CC_X + DD_{\{}$ = $ЛВ_X$ + $ВС_X$ + CD_X + $ДЛ_X$. Составьте еще несколько аналогичных равенств и докажите их справедливость.

79. При каждой вершине треугольника ЛВС построены ромбы, стороны которых конгруэнтны и направлены по сторонам треугольника; [$ЛЛ_1$1, [ВВJ, [ССJ—диагонали этих ромбов. Доказать, что $AA\{ + BB_1 + CC_1 = 0$.

80. Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки Q выполнялось равенство $QA + QC = QB + QD$. Доказать это.

2. *Умножение вектора на число*

1. Выразить вектор MN на рисунке 33 через векторы a и b, используя клетки.

2. При каком значении k справедливо соотношение $AB + CD + + BC = k(EA + DE)$?

3. Доказать, что в параллелограмме $ABCD$ $AC + BD$ = 2ВС.

4. Дан треугольник ЛВС. Доказать, что если для двух точек M

G) *6)* *6)* *г)* *J)*

Рис. 32

и N выполняется равенство $MA + MB + MC = N\ A + NB + + NC$, то точки M и N совпадают.

5. В треугольнике ABC $[CM]$ —* медиана и CB — a, $CA = Ь$.

Выразить вектор CM через векторы a и h.

6. Л, 5, С — три точки, принадлежащие одной прямой и такие, что $\backslash AC\backslash = |\ BC\ |$. Доказать, что для произвольной точки Q плоскости выполняется равенство QC = ~ (C^Л +QS).

7. Пользуясь свойством средней линии треугольника, доказать, что $\frac{}{2}\frac{}{2}\frac{}{2}(a + Ь) = \frac{}{}a + \frac{}{}Ь$.

8. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму $AD + BE + CF$.

9. Л, В, С, D — четыре точки плоскости, M и N — соответственно середины отрезков AD и BC. Выразить вектор MN через:

а) $AB = a$ и $DC = b\backslash$ б) $AC = c$ и $DB = d$.

10. Точки M и N являются соответственно серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $MN =$

$= -\frac{}{2}\frac{}{2}(AB + CD)$ и $M{\sim}N = -(AD +$ CS).

11. Записать на языке векторов, что четырехугольник $EFKP$ — трапеция.

12. В трапеции $A\ BCD$ длины оснований равны |ЛВ| — a и $\backslash CD\backslash =$ = b. Выразить вектор DC через вектор ЛВ.

13. Точка P — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$.

Выразите вектор PC через векторы $A\ B$ и Л1).

14. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — соответственно середины сторон CD и AD. Выразить вектор MN через векторы $CB = a$ и $DC = b$.

15. В четырехугольнике Л BCD точки Af, N_y P, Q — соответственно середины последовательных сторон. Доказать, что $MNPQ$ — параллелограмм.

16. В параллелограмме,- $A\ BCD\ AC = a$ и $BD = Ь$. Выразить векторы $A\ B$ и BC через a и $Ь$.
17. В пятиугольнике $ABCDE$ $M,\ N,\ P,\ Q$— соответственно середины четырех последовательных сторон, начиная от AB. Найти зависимость между векторами $MN,\ PQ$ и AE‘.
18. $ABCD$ и $BDCF$— два параллелограмма и O — центр первого из них. Выразить векторы $AD,\ BO,\ FC,\ OF,\ DF,\ CD$ через векторы $BF = a$ и $CO = Ь$.
19. $ABCD$ — параллелограмм, O — его центр, Q — произвольная точка плоскости. Выразить вектор QO через векторы $QA = a$, $CD — b$, $AD = c$.
20. $ABCD$ и $ACEF$ — два параллелограмма с центрами O и D. Выразить векторы $AC,\ BF,\ EO,\ FO,\ AF,\ BE$ через векторы $EC — a$ и $FD = Ъ$.
21. Доказать, что если в четырехугольнике $ABCD$ точки M м N — соответственно середины сторон AB и CD и для построенного параллелограмма $ABDD'$ точка О — середина отрезка CD', то [ЛШ ^ $[AO]$, [ЛШ || $[AO]$.
22. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ построен параллелограмм $ABCC$ и взята точка O — середина отрезка $C'D$. Доказать, что если M н N — соответственно середины сторон $A\ B$ и CD, то отрезок AO равен отрезку MN по длине и параллелен.
23. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $Л_1В_1С_10_1$. Доказать, что в общем случае середины отрезков AA_X, BB_t, CC_r, DD_X являются вершинами параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$. Построить два таких параллелограмма, чтобы точки A_0, B_0, $С_е$, D_0 совпали или принадлежали одной прямой.
24. Доказать, что если $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ — соответственно середины последовательных сторон шестиугольника, то $AB + CD + + EF =$ ОТ
25. Пусть A_x, B_x, C_x — середины сторон треугольника ABC, Q — •произвольная точка плоскости. Доказать, что QA_X -J- QB_X -f $+ QC_X = QA + QB + QC$.
26. Дан треугольник ABC, в котором проведены медианы. Доказать, что если A_x, B_x, C_x — середины медиан, то,для любой точки Q плрскости выполняется равенство $QA + QB + QC =$* $— QA\ i + QB_X + QC_X$.
27. В треугольнике ABC точка D взята на стороне AC так, что $\backslash AC\backslash : \backslash DC\backslash == m : n$. Выразить векторы $B\ A$ и BC через $AC = = a$ -и $BD == -■\ Ь$.

28. Дана трапеция $ABCD$, в которой основание AB в k раз больше основания CD. Выразить векторы AC и BC через векторы AD — b и $DC = a$.

29. Точки /Си L служат соответственно серединами сторон BC и CD параллелограмма $A\ BCD$. Полагая $A\ K = m$ и $AL = n$, выразить векторы BC и CD через m и n.

30. В трапеции $ABCD$ основание AD в k раз больше основания BC. Для произвольной точки Q выразить вектор QD через векторы $QA = a$, $QB = b$, $QC = c$.

31. a и b — ненулевые и неколлинеарные векторы. Доказать, что если числа a и |3 удовлетворяют условию $aa + \$Ь = 0$, то а = 0 и Р = 0.

32. Известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. При каких k_x, k_2, k_3 верно равенство $k_x\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{O}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно жколлинеарны)?

33. Доказать, что любой вектор $\vec{m}$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\vec{m} = aa + fib$, где a, р — числа, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Можно ли обобщить задачу на случай большего числа слагаемых?

34. Пусть вектор m представляет собой линейные комбинации векторов a_x и $Ь_x$, a_2 и $Ь_2$, где% и $Ъ_x$ неколлинеарны, а a_x и a_2, $Ь_г$ и $Ь_2$ соответственно коллинеарны. Доказать, что соответствующие слагаемые этих линейных комбинаций равны. (Линейной комбинацией векторов a_2, ..., a_n называется выражение вида Mi + k_2a_2 + ... + , где $\&_2$, ..., — числа.)

35. Два параллелограмма $ABCD$ и ЛВ^/)! имеют общую вершину Л. Доказать, что $\backslash BB_г\ \backslash$ ^ |CC_X| + $\backslash D_{\pm}D\backslash$.

36. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — соответственно середины сторон AD и BC. Доказать, что 2 | AliV | $|AB\backslash$ + + I $CD\backslash$.

37. Даны две различные точки Л, B и число k. Найти такую точку М, что в векторы ЛМ и Ь ЛМ: а) равны между собой;
б) противоположны.

38. Дан параллелограмм $A\ BCD$. Найти на плоскости такую точку Q, чтобы выполнялось равенство $QA + QB + QC + QD = O$. Сколько существует таких точек?

39. Дан четырехугольник $ABCD$. Найти на плоскости такую точку Q, чтобы выполнялось равенство $QA + QB$ -f $QC + QD = 0$. Сколько существует таких точек?

40. Пусть 5 — точка пересечения средних линий четырехугольни-

ка $ABCD$ и Q — произвольная точка плоскости. Доказать, что имеет место равенство $QA + QB + QC + QD = 4QS$.

41. Дан четырехугольник $ABCD$. Его средние линии пересекаются в точке M. Построена ломаная $MAUV$, где $AU = MB$, $^rUV = = MC$. Доказать, что M — середина отрезка VD.
42. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности ее оснований.
43. Если длина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равна полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм. Доказать.
44. Точки M и N — соответственно середины сторон AB и CD четырехугольника $A\ BCD$. Доказать, что середины диагоналей четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ являются вершинами параллелограмма (или лежат на одной прямой).
45. На прямой заданы три точки Л, B, C. Существует ли на плоскости такая точка Q, что выполняется равенство $QA + QB$ -f- $+ QC =к$ О?
46. Доказать, что медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке М, которая обладает следующими двумя свойствами: а) расстояние от точки M до каждой вершины треугольника равно $\frac{2}{3}$ длины соответствующей медианы; б) для любой точки Q справедливо соотношение

$$QM = \frac{1}{o}(0Л + QB + QC).$$

47. Для того чтобы точка Q была центром тяжести треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы QA -f $QB + QC = 0$. Доказать это.
48. Существует ли в плоскости треугольника ABC точка Q, удовлетворяющая равенству $QA + 2QB$ 4* $3QC$ — 0?
49. Пусть A_x, A_2, A_3 — три не принадлежащие одной прямой точки плоскости и a_x, a_2, cc_3, Pi, P_2> Рз — данные действительные числа. Если для некоторой точки M выполняются со<}тношения $QM = <x_xQA_x + a_2Q/4_2$ 4* a_3Q4_3, QM — PiQ/4i -j- P_2Q-^$_2$ "t* $+ p_3Q$^$_3$ независимо от выбора точки Q, то $a_x =$ $a_2 =$ p_2, $a_3 = p_3$.
50. Дан произвольный треугольник ABC. От произвольной точки M отложены векторы $MB_X = AB$, $MC_X = BC$, $MA_X = CA$. Доказать, что M — центр тяжести треугольника $A_XB_XC_X$.
51. Из точки М, лежащей внутри треугольника ABC, проведены перпендикуляры на стороны BC, AC, AB и на этих перпендикулярах отложены отрезки MA_X, MB_X, MC_X, конгруэнтные

соответствующим сторонам треугольника. Доказать, что M — центр тяжести треугольника $A_XB_XC_X$.

52. В треугольнике ABC $[AA_X]$ — медиана и M — ее середина. Выразить для произвольной точки Q плоскости вектор QM через векторы QA, QB, QC.
53. Доказать, что в произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий и делится ею пополам.
54. В треугольнике ABC проведены медианы AA_X, BB_X, CC_X и Q — произвольная точка плоскости. Выразить векторы QB, QC, QA_X через векторы QA — a, $QB_X = b$, $QC_X = c$.
55. Пусть A_XA_2 ... A_n — произвольный многоугольник, а B_x, B_2, ..., B_n — середины его сторон. Доказать, что для произвольной точки Q справедливо соотношение QA_X + QA_2 -j* ... + + QA_n — QB_X 4- QB_2 + ••• + QB_n.
56. Точки M_x, M_2, делят отрезок AB на три равные части. Для произвольной точки Q выразить векторы QM_X и QM_2 через векторы QA = a n QB — $Ь$.
57. Отрезок AB разделен точками M_3 и M_b в отношении 3 : 5 и 5 : 3 (от точки A). Выразить векторы QM_S и QM_5 через векторы QA =5 a и QB = $Ь$.
58. Для того чтобы точка C делила отрезок A B в отношении $\backslash AC\backslash$: [$CB\backslash$ = m : n, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки Q плоскости выполнялось равенство

$$0C = \frac{-0A}{m-\backslash-n} + \frac{-^0B}{m-\backslash-n}.$$

Доказать это.

59. В условиях предыдущей задачи рассмотреть случай, когда $\backslash AC\backslash$! $\backslash CB\backslash$ = k.
60. Если * точки M и N делят отрезки AB и CD так, что

4 $|AM|:|MB|$ — $|CM|:|ND|$ =s $m:n$, то выполняется равенство

MN — $\frac{}{т+n}$ AC Ч$\frac{}{т+n}$ BD. Доказать это. Сформулировать и доказать предложение, обратное данному.

61. На прямой P_x даны три точки A_x, B_x, C_x, а на прямой P_2 — три точки A_2, B_2, C_2, причем $A_XB_X = mB_xC_x$, $A_2B_2 = mB_2C_2$. Отрезки A_XA_2, B_XB_2 и C_XC_2 разделены точками A_0, B_0, C_0 в равных отношениях. Доказать, что эти точки принадлежат одной пря-
/ мой или совпадают.

62. Для того чтобы точки Л, B, С принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки Q плоскости выполнялось равенство $QC = PQA$ 4- QQB, где $P + Q =$ = 1. Доказать.

63. Даны треугольник ABC и произвольная точка Q. Доказать, . что если построить параллелограммы QBB_LC и QAA_XB_X, то диагональ QA_X последнего проходит через центр тяжести O данного треугольника и I <2Л$_X$| = 3 |Q0|.

64. Доказать, что прямая, проходящая через вершину Л треугольника ABC и середину медианы BD, делит сторону BC в отношении 1 : 2 .

65. Пусть О и Ох — точки пересечения средних линий двух четырехугольников $ABCD$ и $A_XB_XC_XD_X$. Доказать, что: а) AA_X 4- BB_X 4* 4* CC_X DD_X = 4 • OO_x, б) AA_X "4 BB_X 4* CC_X 4* DD_X —

-s=s AB_X 4- BC_X 4- CDi + DAi-

66» Даны два конгруэнтных отрезка A B и A_XB_X. Каким должен быть угол между прямыми, которым принадлежат эти отрезки, чтобы расстояние между серединами отрезков AA_X и BB_X было равно — |ЛВ|?

67. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что n ■ $AP = AB$. Прямая DP встречает диагональ AC в точке Q. Доказать, что $(n$ 4- 1) A Q = A C.

68. Дан правильный шестиугольник Л$_1$Л$_3$Л$_3$Л$_4$Л$_5$Л$_6$. Доказать, что A_XA_2 4- A_XA_3 4" A_XA_4 4" A_XA_5 4» A_xA_e = ЗЛ$_1$Л$_4$.

69. Величина угла Л ромба $ABCD$ равна 60°. Из центра O этого ромба' на его стороны проведены перпендикуляры OM, ON, OP и OQ. Выразить векторы OM, ON, OP и OQ через векторы $AB = m$ и AD =Ъ.

70.- Через точку M, взятую внутри параллелограмма, проведены прямые, параллельные его сторонам. Они пересекают стороны параллелограмма в точках Л, C и B, D. Доказать, что точка пересечения средних*линий четырехугольника $ABCD$ является серединой отрезка OM, где O — центр данного параллелограмма.

71. Даны треугольник ABC и точка M на стороне AB. Прямая, проведенная через M параллельно медиане CC_X, пересекает (СЛ) в точке P, а (CB) — в точке Q. Доказать, что PM -f QM =э ‘ — $2CC_X$.

72. Доказать, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжения боковых сторон и через точку пересечения диагоналей.

3. Скалярное произведение векторов ^

1. Вычислить скалярное произведение векторов a и $Ь$, если:

а) |oj = 2, \b\ =3, aV= 30°; б) Й =|Ь| = 4, ~a b- =120°; •

в) |a| = 4, |Ь| = 5, a = k ■ b, k<0; г) |a|= |fr| =1, a = = k • b, k > 0.

2. Что можно сказать о векторах *a* и *Ь, если:* а) а • Ь = |а| • \Ь\;
   б) *a* • *b* — — | *a* 11Ь |; в) *a* ■ 6 = 0?
3. Для равностороннего треугольника *ABC,* длина стороны которого равна 2, вычислить выражение *BC* ■ *CA* -J- СЛ • *AB*-\- Н- AS -*BC*.
4. Известно, что *a* = *kb*, *c* = Ы. Справедливы ли пропорции:

   а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; б) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; в) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; г) $\frac{d}{c} = \frac{a}{Ъ}$?
5. Какие из следующих преобразований справедливы:

   а) $(2a - Ъ)^2 = 4a^2 - 4a6 + Ь^2$; б) $(a + Ь)(a - Ь) = |a|^2 - |Ь|^2$, в) $2a^2 - ab = 0 \Rightarrow a(2a - Ь) = 0 \Rightarrow$ $2a - Ь = 0 \Rightarrow$ $a = 0$

   а» = — о?
6. При каких векторах а и Ь верно равенство

$$a(ab) = a^2 b?$$

7. Справедливо ли равенство (ЛС • SD)^2 = AC^2 ■ BD^2?
8. Какой угол образуют единичные векторы *s* и *t,* если известно, что векторы s + *2t* и 5s — 4/ взаимно перпендикулярны?
9. Вычислить (За — *Ь) (2Ь + 2а),* если известно, что *a* и *b* — единичные взаимно перпендикулярные векторы.
10. Записать с помощью векторов следующие утверждения:
    а) ЛВС — равнобедренный треугольник с основанием *AC;*
    б) *ABC* — равносторонний треугольник; в) *A BCD* — ромб;
    г) *ABCD* — прямоугольник; д) *ABCD* — квадрат.
11. Даны две стороны | *AB* | = *a,* *CD*\ = *b* четырехугольника Л BCD и угол *a* между этими сторонами. Найти длину отрезка, соединяющего середины двух других сторон четырехугольника.
12. В треугольнике ЛВС со сторонами | Л В | = 5, | ВС f = 2, |ЛС| — = 4 вычислить величину угла ЛВС.
13. Для треугольника ЛВС выразить скалярное произведение векторов *A B* • *AC* через длины сторон треугольника.

14. В треугольнике ЛВС со сторонами $|AB|$ =3, |ВС| = 4, $\backslash AC\backslash$ — = 6 найти скалярное произведение $AB \cdot AC$.
15. Доказать, что в равностороннем треугольнике ABC с центром тяжести M $\backslash AB\backslash^2 = 3\ \backslash MC\backslash^2$.
16. В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M. Доказать, что справедливо равенство $MA * MC = MB \cdot MD$.
17. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить сумму $BC \cdot AD + C\ A \cdot BE + A\ B \cdot CF$.
18. Доказать справедливость тождества $a\ -b\ =$ } j ■ $\left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2$ для любых векторов a и b.
19. Доказать, что скалярное произведение двух векторов, отложенных от данной точки до концов любого диаметра данной окружности, есть величина постоянная.
20. Доказать, что для любых четырех точек плоскости Л, В, С, D имеет место равенство $BC * AD + C\ A \cdot BD + A\ B \cdot CD = 0$. Записать это равенство через векторы $a = DA$, Ь = DB, с = $= DC$.
21. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
22. Доказать, что в параллелограмме сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.
23. Доказать, что если M — середина отрезка AB, то для произвольной точки Q плоскости выполняется равенство

$$|QA\backslash * + \backslash QB? = 2\backslash QM\backslash * + \pm\backslash AB\backslash\backslash$$

24. Доказать, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M верно равенство $\backslash MA$ $|^2 + \backslash\ MC\backslash^2 = \backslash MB\backslash^2 +$ |уИ£>|^2.
25. Даны три точки A, В, С, для которых | Л С р + | ВС |^2 -= ~| AB |^2.

    Доказать, что Л С + $BC = 0$.
26. Доказать, что угол С треугольника ЛВС будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли длина медианы CD больше, равна или меньше ~ |ЛВ|.
27. Доказать, что в треугольнике ЛВС с центром тяжести M справедливо соотношение

$$|AB\ \mathrm{I}^2 + |BC|^2 + |\text{Л С}|^2 = 3\ (|MA|^2 + |MB|^2 + |\mathrm{MCJ2}).$$

28. Доказать, что если центр тяжести треугольника ЛВС совпадает с точкой пересечения высот, то треугольник равносторонний.
29. Доказать, что если векторы a и b удовлетворяют условию

—У “-V —V *-У
(а — Ь) (| Ь\ • а + |а| • Ъ) — 0, то они либо коллинеарны, либо равны их модули. ■'

30. Выразить длину каждой медианы треугольника через длины его сторон.
31. В трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями большее основание равно 4, а меньшее 3. Найти ее боковую сторону, если известно, что она составляет угол в 60° с большим основанием.
32. Дан треугольник ЛВС, в котором [AC\ — 3, | BC\ = 4, ACB = == 120°. Найти расстояние от вершины C до точки M, делящей сторону AB в отношении 1 і 3, считая от вершины A.
33. Если в прямоугольном треугольнике A BC из вершины прямого угла проведена высота CD, то: а) |СО|²=|Л.О|- \BD\-,
б) | ЛС|² =?jAB\ • \$AD$\-, в) |ВС|² = \$BA$\ • \$BD$\. Доказать.
34. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что высота трапеции есть среднее пропорциональное между ее основаниями.
35. Доказать, что в трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполняется равенство | ЛС|² + |ВD|² = | AD\² + | ВС|²+2| ЛВ|х Х \DC\. '
36. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника были равны. Доказать это.
37. Доказать, что если в треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны, то сумма их квадратов равна квадрату третьей медианы.
38. Найти зависимость между сторонами треугольника ABC, если его медианы AA_X и BB_X перпендикулярны.
39. Катеты прямоугольного треугольника равны a и $Ь$. Найти длину биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.
40. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого • угла проведена высота CD. Выразить через векторы a =- CB и Ъ — CA\ а) вектор AD; б) вектор CD.
41. Из середины D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведен перпендикуляр DM на сторону BC. Точка N — середина отрезка MD. Доказать, что отрезки AM и CN перпендикулярны. - ' -V
42. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена прямая, на которую из вершин A и B проведены перпендикуляры ЛЛ$_X$ и ВВ$_X$. Вершина C отражена в точку С$_x$ относительно середины M отрезка A_XB_V Доказать, что $AC_гB$ — А
43. На стороне AB А ABC по разные стороны от прямой Л В построены равносторонние треугольники ЛВС$_X$ и ЛВС$_2$. Найти

зависимость между сторонами данного треугольника, если прямые CC_x и CC_2 перпендикулярны ($C \Phi C_x$, $C \phi C_2$).

44. Выяснить условия, при которых $(a \blacksquare Ь) \blacksquare (c \bullet d) — (a \blacksquare c)$ x X$(Ь \blacksquare d)$.

4. Преобразование векторов

1. Дан вектор a. Найти его образ при некотором: а) переносе; б) центральной симметрии; в) осевой симметрии; г) повороте.
2. Дан вектор a. Найти его образы при нескольких центральных симметриях с произвольными центрами и сравнить полученные образы между собой.
3. Дан вектор а. Найти его образы при нескольких осевых симметриях со взаимно параллельными осями и сравнить полученные образы между собой.
4. Найти образ вектора $\overline{a}$ при последовательном выполнении двух осевых симметрий со взаимно перпендикулярными осями.
5. Найти образ вектора a при последовательном выполнении переноса и центральной симметрии. Играет ли роль при этом порядок выполнения указанных перемещений?
6. Вектор a отобразить гомотетиями с коэффициентом $к$ и центрами Ox и 0_2 в некоторые векторы $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_2$ и сравнить их.
7. Векторы AB и BC отображаются гомотетиями с коэффициентом k и центрами 0_X и 0_2 на векторы AxB_x и B_2C_2. Найти зависимость между векторами AC и $A_XB_X + B_2C_2$.
8. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O и образуют угол $AOD = 60°$. При каком перемещении вектор AD отображается на векторы: а) OC; б) BC; в) OB; г) CB; д) OA; е) QD?
9. Дан равносторонний треугольник ABC с центром О. При каком перемещении: а) вектор Л С отображается на векторы AB; CA; BC; CB; б) вектор AO отображается на векторы BO; CO; OB; ОС?
10. Каким образом в равностороннем треугольнике ABC с центром О и медианами $ЛЛ_X$, BB_X и CC_X можно отобразить вектор Л О на векторы: а) $Л_xO$; б) OC_x; в) B_xO?
11. В квадрате $ABCD$ с центром О: а) найти образ вектора AO при повороте на +90°; б) найти образ вектора OB при последовательном выполнении поворота на —45° и гомотетии е коэффициентом У 2.
12. Каким преобразованием можно отобразить в квадрате $A\ BCD$

с центром О: а) вектор DA на вектор $O\ B$; б) вектор AC на вектор CD?

13. В квадрате $A\ BCD$ с центром O рассмотреть образы векторов AO и OD при повороте на +90°. Сумму полученных'векторов сравнить с вектором AD.

14. Дан равносторонний треугольник ABC с центром О. Некоторое перемещение отображает*вектор AO на вектор OB. В какой вектор отображается вектор $A\ B$ этим же перемещением?

15. В квадрате $ABCD$ с центром O проведен перпендикуляр OK к стороне CD. При некотором перемещении вектор AO отображается на вектор OB. В какой вектор при этом отображается - вектор FK?

16. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами квадрата.

17. На сторонах $A\ B$ и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Доказать, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника ABC по длине и перпендикулярен к ней.

18. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники $ABC_г$ и BCA_X. Доказать, что отрезок, соединяющий середины отрезков $A\ B$ и ЛхСх, равен половине отрезка AC по длине и составляет с ним угол в 60°.

19. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_X и $BCA_г$. Доказать, что если $My\ N$ и P — соответственно середины сторон ЛС, $C_{\pm}B_Y\ BA_X$, треугольник MNP равносторонний.

20. Диагонали ЛС и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ $([AB] \parallel [CD])$ пересекаются в точке O под углом 60°. Доказать, что середины отрезков ОЛ, OD и BC являются вершинами равностороннего треугольника.

21. В трапеции $ABCD$ диагональ AC отсекает равносторонний треугольник ACD. Из точки E диагонали AC (или ее продолжения) основание BC видно под углом 60°. Доказать, что середины отрезков $AEy\ BC$ и CD являются вершинами равностороннего треугольника.

22. Если на двух сторонах параллелограмма, исходящих из-одной вершины, построить (внешним или внутренним образом) правильные треугольники, то противоположная вершина параллелограмма и свободные верщины треугольников образуют правильный треугольник. Доказать.

23. Даны два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $Л_2В_2С_2$ одинаковой ориентации. Отрезки $A_xA_{2t}\ B_tB_2$ и $C\backslash C_2$. разделены точками Л, B *и* C *в* одном и том же отношении соответственно

от концов $A_ь$ B_x и $C_г$. Доказать, что треугольник ABC равно* сторонний.

24. Составить несколько задач, используя результат предыдущей задачи.

25. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с острым углом D в 45° диагональ AC равна стороне CD. Доказать, что середина меньшего основания равноудалена от вершины A и середины стороны CD.

26. На отрезках A B и AC некоторой прямой построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABC_1 и ACB_1 ($C_г$ = $B_±$ = = 90°) противоположной ориентации. Доказать, что середина отрезка BC и точки $B_г$ и $C_г$ служат вершинами равнобедренного и прямоугольного треугольника.

27. В треугольнике ABC с углом B в 45° проведены высоты $CC_г$ и $AA_{1У}$ пересекающиеся между собой в точке О. Доказать, что середины отрезков BC, A_1C_1 и CO служат вершинами равнобедренного и прямоугольного треугольника.

28. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники $ABC_г$ и $BCA_г$ с центрами соответственно $O_г$ и 0_2. Доказать, что отрезок 0_X0_2 вдвое длиннее отрезка, соединяющего середины отрезков $O_гC$ и $C_гO_2$, и составляет с ним угол в 60°.

29. На сторонах A B, BC, CD прямоугольника A BCD вне его построены равносторонние треугольники $ABO_ь$ $BC0_2$, $CD0_3$. Доказать, что расстояния между серединами отрезков AB, $0_г0_2$ и BC, 0_20_3 равны.

30. На сторонах'Л В и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$, а затем параллелограмм $AELG$. Доказать, что:
а) $|LA| = |BC|$ и $[LA]$ 1 $[BC]$; б) $|LC| = |BF|$ и $[LC]$ 1 $\pm[BF]$; в) $|LB| = |DC|$ и $|LB]$ 1 $[DC]$.

31. На сторонах AB, BC и CA A ABC вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что центры $O_г$, 0_2 и 0_3 этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

32. A BCD и AxB-$ьCmPx$ — два квадрата с общим центром и одинаковой ориентацией. Доказать, что середины отрезков $AA_Ъ$ $BB_Ъ$ $CC_г$, $DD_±$ являются вершинами некоторого квадрата.

33. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABMN$ и $BCQP$. Доказать, что центры этих квадратов и середины отрезков MP и AC являются вершинами квадрата.

34. На сторонах A B и CD произвольного выпуклого четырехугольника A BCD вне его построены квадраты $ABMN$ и $CDKL$. Доказать, что середины диагона лей четырехугольников A BCD и $MUKL$ являются вершинами квадрата или совпадают.

35. Даны два квадрата $Л_1B_1C_1C_1$ и $Л_2B_2C_20_2$ одинаковой ориен-

тации. Отрезки Л$_a$Л$_2$, $B\backslash B_2$, $C_xC_й$, D_XD_2 разделены течками Ло, Bo, Co, Do в одном и том же отношении, начиная от вершин одного из этих квадратов. Доказать, что $AoBoCoDo$ — квадрат.

36. Составить несколько задач, используя результат предыдущей задачи.
37. Даны два правильных одноименных многоугольника $A_гA._г$,,, A_n и B_XB_2... B_n одинаковой ориентации. Отрезки $A_xB_г$, A_2B_2, ..., A_nB_n разделены точками C_{lt} C$_2$,...» C_n соответственно в одном и том же отношении, начиная от вершин одного из этих многоугольников, Доказать, что многоугольник C$_X$C$_2$ ... C_n правильный.
38. На сторонах AB *и* BC треугольника ABC вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABD и BCE ($B = C$ 90°) одинаковой ориентации. Доказать, что середины отрезков AB, BC и DE являются вершинами прямоугольного равнобедренного треугольника,
39. В квадрате $ABCD$ точка O — его центр и M и N — середины отрезков BO и CD. Доказать, что треугольник AMN равнобедренный и прямоугольный.
40. На сторонах четырехугольника A BCD вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABM, BCN, CDP и DAQ ($M = N = P = Q$ = 90°). Доказать, что середины отрезков МР и NQ и середины диагоналей четырехугольника являются вершинами квадрата.
41. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD, Точки M и N делят соответственно стороны AC и CB в равных отношениях (начиная от концов Л и C). Доказать, что треугольник DMN подобен данному треугольнику,
42. На основании и одной из боковых сторон равнобедренного треугольника вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов и середина другой боковой стороны служат вершинами равнобедренного и прямоугольного треугольника.
43. В прямоугольнике A BCD проведен перпендикуляр B K к диагонали AC. Точки М и N делят соответственно отрезкй Л K и CD пополам, Доказать, что BMN — 90ч.
44. Для прямоугольного треугольника ABC построен ему симметричный — ABC_X относительно гипотенузы AB. Если точка M — середина высоты C$_X$D Д ABC_X и N — середина стороны BC, то АAMN подобен АABC, Доказать.
45. Дан параллелограмм A BCD, На прямых A B и BC выбраны точки соответственно H и K так, что треугольники KA B и HC B равнобедренные (| $KA\backslash$ = | $AB\backslash$ и | $HC\backslash$ =э | CB|), Доказать, что треугольник KDH тоже равнобедренный и точки K, A, D, C и H принадлежат одной окружности,
46. Четырехугольник $ABCD$ повернут около некоторой точки О,

лежащей в его плоскости, на 90° в положение $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что если точки P, Q, R и S суть соответственно середины отрезков $A_гB_y$ B_XC, $C_{\pm}D$ и £>$_X$Л, то отрезки PR и QS перпендикулярны и равны по длине.

47. На сторонах четырехугольника вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника с равными по длине и взаимно перпендикулярными диагоналями.
48. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена вьшота CD и построена точка D_{1y} симметричная точке D относительно катета Л С. Доказать, что точка Л и середины отрезков D_XC и CB служат вершинами треугольника, подобного данному.
49. В прямоугольном треугольнике ABC построена точка D_{1y} симметричная некоторой точке D катета BC относительно гипотенузы ЛВ; E — точка пересечения отрезков DD_t и AB, M и N — соответственно середины отрезков AD_X и CE. Доказать,

    что $MNB = 90°$.
50. В треугольнике ABC проведены высоты AA_X и $BB_г$ и построена точка Л $_2$, симметричная точке Л$_{1г}$ относительно прямой Л С; M и N — соответственно середины отрезков $B_XЛ_2$ и AB. Доказать, что треугольник CMN прямоугольный.
51. На стороне A B треугольника ABC как на диаметре описана окружность, пересекающая прямые ЛС и BC соответственно в точках Лх и B_t. Доказать, что середины хорд $AB_г$ и $BA_г$ и
    $_г$ основание высоты, проведенной из вершины C в данном треугольнике, образуют треугольник, подобный данному.
‘52. Из произвольной точки M, взятой на окружности, описанной BqKpyr треугольника ЛВС, проведены перпендикуляры $MA_г$ и MB\ на стороны BC и ЛС; Р и Q— соответственно середины

    отрезков ЛВ и Л^. Доказать, что $PQM = 90°$.
53. В треугольнике ABC из вершины Л проведена биссектриса AD до пересечения с описанной вокруг данного треугольника окружностью в точке $A_г$; M и N — соответственно середины отрезков CD и $A_гB$. Доказать, что треугольники $ACA_Л$ и AMN подобны.
54. Общая хорда двух пересекающихся окружностей является диаметром одной из них. Уерез один из концов этого диаметра проведены касательные к данным окружностям. Доказать, что другой конец диаметра и середины отрезков проведенных касательных, отсекаемых окружностями, служат вершинами прямоугольного треугольника.
55. В треугольнике ABC высоты AD и BE продолжены за вершины Л и В, и на их продолжениях отложены отрезки ЛM и BN такие, что \$AM]$ Ш$ [ВС] и [ВМ ^ [ЛС]. Доказать, что отрезки CM и CN перпендикулярны, а длины их равны.
56. На сторонах ЛС и BC треугольника ЛВС вне его построены

равносторонние треугольники $ACB_г$ и ВСЛ; M — середина стороны AB и O — центр треугольника ЛСВ$_X$. Определить углы треугольника MA_xO.

57. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ACBA_г$ и $BCЁB_1$. Доказать, что прямые AB_X и BA_X пересекаются на высоте данного треугольника, проведенной . к стороне $A\ B$.

58. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники с центрами соответственно 0_3, $0_г$ и 0_2. Если $C_{1У}\ A_ъ\ B_±$ — соответственно середины сторон $A\ B$, BC и $C\ A$, то доказать, что $C_г0_3 + A_x0_г + B_x0_2 = O$.

59. Дан многоугольник $A_гA_2 \ldots A_n$. Доказать, что векторы Ь$_2$, ..., $Ь_n$, образующие соответственно с векторами A_XA ^ A_2Л$_3$,..., ..., один и тот же ориентированный угол и такие, что $\backslash b_1\backslash = \sim k$ |ЛИ$_2$|, $\backslash Ь_2\backslash = k\backslash AM$ ..., | b_n | $= \sim k$ $\backslash A_nA_x\backslash$, в сумме равны нулевому вектору.

60. Даны три равносторонних треугольника $A_±BC$, $AJL>E$ и A_3FQ, имеющие одинаковую ориентацию, причем точки Лх, Л$_2$ и Л$_3$ являются вершинами равностороннего треугольника той же ориентации. Доказать, что середины отрезков CD, EF и QB являются вершинами равностороннего треугольника.

61. Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах CD и ЛD построены вне его одинаково ориентированные подобные треугольники CDE и FBC. Доказать, * что треугольник PAE подобен им и одинаково с ними ориентирован.

62. На сторонах AB, ЛС и BC треугольника ЛВС, как на основаниях, построены три равнобедренных подобных треугольника ABP, ЛСС и $BCR\backslash$ два первых расположены вне данного треугольника, третий, напротив, по ту же сторону от (ВС), как и данный треугольник (или обратна). Доказать, что $APRQ$ — параллелограмм.

63. На сторонах ЛС и ВС треугольника ЛВС вне его построены подобные прямоугольники $ACMN$ и $BCPQ$. Доказать, что прямые NB и QA пересекаются на высоте треугольника (или ее продолжении), проведенной из вершины С.

5. *Смешанные задачи*

1. В конце Л хорды Л В окружности O проведена к ней касательная, к которой из точки В проведен перпендикуляр ВМ, встречающий окружность вторично в точке С. Доказать, что центр О, точка N, делящая хорду ЛВ в отношении | $AN\backslash$: |iVB| = 1 : 2, и точка С', симметричная точке С относительно точки М, лежат на одной прямой.
2. Противоположные стороны ЛВ и CD четырехугольника $A\ BCD$ разделены соответственно точками M и N в равных отношениях, считая от точек A и D. Доказать, что отрезок MN делит

среднюю линию четырехугольника в том же отношении и делится сам средней линией пополам.

3. Точки Я, Q, R, S делят стороны четырехугольника $ABCD$ так, что $\backslash AP\backslash:\backslash PB\backslash=\backslash DQ\backslash:\backslash QC\backslash = m$ и $\backslash AR\backslash:\backslash RD\backslash=\backslash BS\backslash: : \backslash SC\backslash = n$. Доказать, что отрезки PQ и RS делят друг друга в том же отношении.
4. Доказать, что для всякого многоугольника $A_XA\backslash \ldots A_n$ найдется точка О, для которой $0A_{\pm}$ + ОЛ$_2$ + ... + $0A_n$ = О, и что такая точка только одна.
5. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, 4jo вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах A B, BC и AC. Через середину M стороны BC проведена прямая AM, пересекающая прямую DE в точке /(. Доказать, что $CFDK$ — параллелограмм.
6. Через противоположные вершины параллелограмма проведены прямые, пересекающие его стороны или их продолжения в четырех точках. Доказать, что эти точки являются вершинами трапеции или параллелограмма.
7. В трапеции A BCD произвольная точка M боковой стороны A B соединена с вершинами C и D. Из вершин A *и* B проведены прямые AN и BN, параллельные соответственно прямым CM и DM. Доказать, что точка N их пересечения принадлежит стороне CD.
8. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямая, проведенная через вершину A параллельно стороне BC, пересекает диагональ BD в точке M_y а прямая, проведенная через вершину B параллельно стороне AD, пересекает диагональ AC в точке N. Доказать, что ША$^{\Gamma}$] Н $ICDL$
9. Даны шесть точек. Центроид (точка пересечения медиан) треугольника с вершинами в трех из этих точек соединяется отрезком прямой с центроидом треугольника, имеющего своими вершинами три остальные точки. Доказать, что полученные таким образом 10 отрезков имеют общую середину.
10. На стороне AC треугольника ABC взята такая точка M, что

    $\backslash AM\backslash$ = — |ЛС|, а на продолжении стороны BC — такая
    • 3
    точка N, что |ВЛП = $|CB\backslash$. В каком отношении делит точка P пересечения отрезков AB и MN каждый из этих отрезков?

И. Даны три отрезка $A_xA_г$, B_XD_2, $C_xC_г$. Их середины обозначим соответственно через A_3, B_3, C_3. Если центры тяжести треугольников $AxBxCx$, A^B^C_2, $A_3B_aC_3$ соответственно М$_x$, M_2, M_3, то требуется доказать, что M_3 — середина отрезка $M_гM_2$ (или $M_1 = M_2 = M_3$).

12. На медиане CM_3 треугольника ABC дана точка M. Через нее проведены прямые AM и BM, пересекающие стороны BC и AC соответственно в точках Ay и $B_г$. Доказать, что отрезок Л$_1$й$_1$ делится медианой CM_3 пополам и параллелен стороне AB.

13. На стороне $A\ B$ треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые параллельно его медианам и BM_2 и пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках $A_г$ и $B_г$. Доказать, что середина отрезка $A_гB_и$ точка P и точка пересечения медиан Q данного треугольника лежат на одной прямой.
14. Расстояние от точки пересечения йедиан треугольника до центра описанной около него окружности равно одной трети радиуса этой окружности. Доказать, что треугольник прямоугольный.
15. На даух прямых даны соответственно отрезки AB и CD. Точками M и M_x отрезок $A\ B$ разделен в отношениях $\backslash AC\backslash:\ \backslash BD\backslash$ и — $|A\ C|:|BD|$, $|A\ C|\ Ф\ |BD|$, а отрезок CD точками N *и* $A\backslash$ разделен соответственно в тех же отношениях. Доказать, что отрезок MN перпендикулярен отрезку MxA^.
16. Доказать, что если боковые стороны трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов ее оснований равна сумме квадратов диагоналей.
17. Если в четырехугольнике сумма квадратов его диагоналей равняется сумме квадратов всех его сторон, то этот четырехугольник — параллелограмм. Доказать.
18. Даны два одинаково ориентированных квадрата $A\ BCD$ и ЛiBADi. Доказать, что $\backslash AA_г\backslash^2 + \backslash CC_г\backslash^2 = |BB_г\backslash^2 + |DD_X\backslash^2$.
19. На медиане CM_S треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые AP и BP, пересекающие стороны CB и CA соответственно в точках $A_г$ и $B_г$. Доказать, что если $|AA_г\backslash = \backslash BB_г\backslash$, то треугольник равнобедренный.
20. На основании $A\ B$ равнобедренного треугольника ABC дана точка P. Доказать, что $|PC\backslash^2 = |ЛC|^2 — \backslash AP\backslash\ \backslash BP\backslash$. Выяснить, как изменится формула, если точка P расположена на продолжении основания AB.
21. Доказать, что если из произвольной точки M, взятой внутри прямоугольного треугольника ABC (C — прямой угол), провести перпендикуляры MX, MY, MZ соответственно на стороны BC, CA, AB, то имеет место соотношение $\backslash AY\backslash\ \backslash AC\backslash + +|BZ\backslash\ |B\ A|+\backslash CX\backslash\ |CB|=|AB?..$
22. На продолжениях сторон AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки M, N, P так, что $\backslash BM\backslash = \backslash AB\backslash$, $|CN| = \backslash BC\backslash$, $\backslash AP\backslash — \backslash CA|$. Вычислить отношение суммы квадратов сторон треугольника PMN к сумме квадратов сторон треугольника ABC.
23. Боковые стороны BC и AD трапеции $A\ BCD$ повернуты около своих середин в положительном направлении на 90^e, после чего они занимают положение отрезков [BjCJ и $1A\wedge_X]$. Доказать, что I D A I — $\backslash A_1B_1$[.
24. На сторонах AB, CD и EF центрально-сймметричшг© шестиугольника построены одинаково ориентированные равносторонние треугольники ABP, CDQ и EFR. Доказать, что треуголь-

на

ник PRQ равносторонний (в частности, он может выродиться в точку).

25. Сторона AC треугольника ABC повернута около вершины A на +90°, а сторона BC повернута около вершины В на —90°. Доказать, что положение середины отрезка C_xC_2, соединяющего концы $C_{\pm}$ и C_2 повернутых отрезков, не зависит от поло-
• жения вершины C.

26. На сторонах четырехугольника, как на диаметрах, построены полуокружности, причем две противоположные полуокружно-
♦ сти обращены внутрь четырехугольника, а две другие — во внешнюю область. Доказать, что середины этих полуокружностей являются вершинами параллелограмма.

27. Дан квадрат. Строятся всевозможные равнобедренные прямоугольные треугольники, вершина одного из острых углов которых совпадает с вершиной квадрата, а вершина прямого угла принадлежит его диагонали. Найти множество третьих вершин рассматриваемых треугольников.

28. На сторонах произвольного треугольника вне* его построены квадраты. Тогда высоты треугольника, вершины которого являются центрами этих квадратов, проходят соответственно через вершины данного треугольника. Доказать.

29. В треугольнике ABC проведены высоты AA_{1y} $BB_г$ и CC_X; $Л_0$, B_0, C_0 — середины этих высот. Доказать, что треугольники $Л_0B_0C_0$, $B_0C_0A_г$ и $AQCQBX$ подобны.

30. Даны параллельные прямые g_x и g_2 и две пары точек A_{19} A_2 и $B_ь$ B_2. На прямых найти соответственно такие точки $C_{\pm}$ и C_2, чтобы $(A_xCi) \parallel (Л_2C_2)$ и $(BjlCi) \parallel (B_2C_2)$.

31. В четырехугольнике' A BCD стороны ВС и AD точками $B_ь$ B_2 и A_{lt} A_2 соответственно разделены на равные части. Можно ли провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами A B и CD, разделился на равные части прямыми $AiBi$ и A_2B_2?

32. Даны три точки $A_{1\%}$ $B_и$ $C_г$. Считая их точками деления соот-
• ветствующих сторон некоторого треугольника ABC в отношении 2 і 1 в одном и том же направлении обхода, построить треугольник ЛВС.

33. На гипотенузе прямоугольного треугольника или на ее продолжении найти такую точку, чтобы прямая, соединяющая ее проекции на катеты, была перпендикулярна гипотенузе.

34. В треугольнике ЛВС проведена биссектриса ЛD. Выразить вектор AD через векторы ЛВ = с и ЛС — $Ь$.

35. Пусть [ОЛ), [ОВ), [ОС) — три луча, пересекающие две прямые
■ a и $Ъ$ соответственно в точках Л, В, С и A_{1y} $B_ь$ $C_г$ так, что | Л В |: I | ВС| = ос, | ОЛ | :|ЛЛ$_X$| — р. Найти зависимость между отношениями | ОВ | ! | ОВ$_x$| == x $и$ | ОС J ! | ОС$_L$ | — у.

36. Противоположные хтороны Л В и DC, ЛD и ВС четырехугольника $ABCD$ пересекаются соответственно в точках E и F.

Доказать, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют равенству

$$\frac{|AE||CE|}{|BE||DE|} \cdot \frac{|AF||CF|}{|BF||DF|} = 1$$

37. Для того чтобы точка O принадлежала треугольнику ABC, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $QO = pQA + qQB + rQC$, где Q — произвольная точка плоскости и $p + q + r = 1$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$. Доказать.

38. Прямая, проходящая через центр тяжести треугольника, делит его стороны на некоторые отрезки. Найти зависимость между отношением длин отрезков одной стороны и отношением длин отрезков другой стороны.

39. Даны две точки A и B. Найти множество точек X плоскости, удовлетворяющие условию $QX = mQA + nQB$, где $m + n < 1$ ($m + n > 1$) и Q — произвольная точка одной из полуплоскостей, образуемых прямой AB.

40. Доказать, что если в четырехугольнике продолжения противоположных сторон попарно пересекаются, то середина отрезка, соединяющего эти точки пересечения, лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

41. Доказать, что сумма четвертых степеней расстояний данной точки, расположенной в плоскости некоторой окружности, до вершин любого вписанного в нее квадрата постоянна.

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

З. А. Скопец,
Л. И. Кузнецова

Перемещения и преобразования подобия плоскости, изучаемые на теоретико-множественной основе, относятся к числу фундаментальных методов построения и изложения современного курса планиметрии в средней школе. Практически исчезли из математической речи учащихся такие бытовавшие в недавнем прошлом слова и выражения, как «совместить», «наложить», «перевернуть другой стороной», «перегнуть чертеж» и др. Вместо этих чисто интуитивных и наглядных понятий начиная с 6 класса употребляются новые, четкие математические понятия: «отображение», «преобразование», «конгруэнтность», «перемещение», «преобразование подобия» и т. д., которые позволяют корректно формулировать определения и теоремы, отчетливо проводить доказательства теорем и решать различные геометрические задачи на построение, нахождение множеств точек и доказательство.

Не следует, однако, думать, что успех достигается одними лишь "точными определениями. Существенно то, что на базе этих новых определений, формулируемых на теоретико-множественном языке, строится теория перемещений и преобразований подобия плоскости, элементы которой и входят важнейшей составной частью в школьный курс планиметрии. Центральное место в этой сравнительно небольшой, но вполне очерченной и законченной теории (с точки зрения школьных требований) занимает аксиома о перемещениях плоскости, благодаря которой вводится сначала осевая симметрия, затем перенос, поворот (в частности, центральная симметрия) и переносная симметрия плоскости. И хотя в школьном курсе не 'удается (по известным причинам) полностью реализовать эту ясную линию изложения предмета, все же необходимые сведения (в минимальном, правда, объеме) о роли перемещений и преобразований подобия, об их видах и свойствах учащиеся получают на высоком логическом уровне и дальше пополняют свои знания в этой области при изучении стереометрии.

Если бы изучению теории перемещений и преобразований подобия плоскости было отведено немного больше учебного времени, чем это обусловлено сейчас (что, к сожалению, вряд ли осуществимо

из-за перегрузки курса обязательным программным материалом), то важнейшие понятия, сопутствующие этой теории, можно было бы в доступной форме осветить с надлежащей полнотой и тогда эффективность использования преобразований подобия в изложении самого курса и при решении задач заметно бы повысилась. Именно отсутствие полноты в освещении отдельных важных деталей этой теории служит основным тормозом при изучении метода преобразований, рождающим трудности в понимании самой теории и как следствие осложняющим *возможность ее применения к решению задач.

Многолетний опыт применения метода геометрических преобразований к решению (различной трудности) геометрических задач показывает, что те сведения по перемещениям и преобразованиям подобия, которые учащиеся получают, следуя программе, в процессе изучения курса планиметрии, в ряде случаев не обеспечивают успешное их применение. Например, при решении задач с помощью поворота чаще всего используется свойство: «Угол между любым лучом и его образом при повороте — величина постоянная». Оно в школе не рассматривается. Решая задачу методом перемещений, как правило, приходится отыскивать перемещение, при котором одна из данных фигур отображается на другую. Для нахождения перемещения, приводящего к цели, требуется знание классификации перемещений и их сравнительных свойств (род, существование и взаимное расположение неподвижных точек, неподвижных и двойных прямых, взаимное расположение прямой и ее образа и т. дО- Однако классификация перемещений в школе не проводится (о переносной симметрии даже не упоминается), свойства перемещений в плане их сравнения не изучаются. Именно поэтому в школе ограничиваются рассмотрением простейших примеров и построений и не практикуют решение содержательных геометрических задач методом перемещений. Только отдельные опытные учителя, владеющие в более полном объеме методом преобразований, справляются с необходимыми приемами решения задач, основанными на применении названного метода.

Повышение квалификации учителей по теории перемещений и преобразований подобия позволит, на наш взгляд, более широкому кругу учителей включить в сферу их учебно-методического мастерства метод, который в ходе решения задач проявляется своей геометричностью, эффективностью, конструктивностью, краткостью и необычайной наглядностью. Более глубокое знание учителем теорий, несомненно, скажется на обучении учащихся как обязательным, так и дополнительным (на факультативных занятиях) вопросам программы.

Отметим основные направления изучения преобразований подобия плоскости, полагая, что основы теории перемещений уже изучены: 1) гомотетия, 2) композиции гомотетий, 3) композиции гомотетии и перемещения, преобразования подобия, 4) классификация преобразований подобия, 5) свойства, 6) способы задания,

7)'инвариантные фигуры, 8) разложения, группы, подгруппы,
9) общие пары соответственных точек двух преобразований подобия,
10) трансформация подобий. Они служат теоретической основой, обеспечивающей применение преобразований подобия к решению задач.

Важно учесть, что овладение теорией и умение ее применять при решении задач представляет собой при правильной постановке преподавания единый процесс: знание теории обеспечивает выработку умения ее применять, а умение ставить и решать конкретные задачи содействует углублению и улучшению теоретических знаний.

Ниже освещены все основные направления в изучении преобразований подобия, за исключением вопросов, касающихся групп, поскольку они в силу их большой значимости требуют специального рассмотрения. Вопросы об аналитических направлениях в изучении преобразований подобия в восьмилетней школе (посредством векторов, координат, комплексных чисел), естественно, также приходится оставлять в стороне.

Избранные вопросы теории преобразований подобия плоскости

Приступая к рассмотрению вопросов теории преобразований подобия плоскости, мы считаем известными следующие определения, свойства плоскости и свойства перемещений плоскости:

1) Обратимое отображение плоскости на себя называется *преобразованием плоскости* или *геометрическим преобразованием.*

2) Отображение плоскости на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами/ называется *перемещением* плоскости*

3) Аксиома подвижности плоскости. *Если ^ расстояние \AB\ положительно и равно расстоянию \A_1B_1\, то существуют два и только два перемещения, при которых точка A отображается на $A_ь$ а точка B — на точку $B_±$.*

Если а — полуплоскость с границей (AB)> то она этими двумя перемещениями отображается на две различные полуплоскости с границей (ЛА). *гШ*

Пусть, например, заданы точки Л, *B*, $A_ь$ *B*.$_ь$ такие, что \A_1B_1\==< = |ЛВ|>0(рис. 1). Одно из перемещений, при которых точки *A* и *B* отображаются на A_t и B_x соответственно, обозначим буквой $f_Є$ Тогда, пользуясь аксиомой, нетрудно установить, что второе .перемещение есть композиция S_a о Д где *а* — (Л^),

4) Исходя из аксиомы подвижности плоскости, можно доказать, что *существует бесконечное множество перекещений и каждое из них представимо композицией - осевых симметрий, причем число осевых • симметрий в композиции не более трех.*

Перемещение, равное композиции двух осевых симметрий, называется *перемеще-*

a

1 "« *1* j

Рис. 1

кием первого рода. Осевая симметрия и перемещение, равное композиции трех осевых симметрий, но отличное от осевой симметрии, называются *перемещением второго рода.*

•*c*

Рис. 2

Перемещения первого и второго рода можно классифицировать далее по числу неподвижных точек.

Определение. *Точка А называется неподвижной точкой преобразования /, если f (A) = A.*

При классификации перемещений по роду и числу неподвижных точек обнаружим пять и только пять видов перемещений плоскости. Из них три вида перемещений первого рода (тождественное преобразование, поворот вокруг точки и параллельный перенос) и два вида перемещений второго рода (осевая симметрия и переносная симметрия).

Если же классифицировать перемещения по роду и числу неподвижных точек и двойных прямых, то центральная симметрия также выделяется как самостоятельное перемещение.

Замечание. Прямая *а* называется *двойной* прямой преобразования /, если / *(а)* = *а.* Если каждая точка прямой *а* отображается на себя (неподвижна), то прямая *а* называется *неподвижной.*

Двойные и неподвижные прямые — *инвариантные* фигуры преобразования.

5) С понятием преобразования неразрывно связаны понятия направления на плоскости и ориентации плоскости.

Если два луча параллельны, то один из них отображается на другой либо центральной симметрией, либо композицией двух центральных симметрий.

Луч л:$_2$ называется сонаправленным с лучом $x_{ь}$ если существует композиция двух центральных симметрий, при которой луч $x_{г}$ отображается на луч x_2-

Луч *$_2$ называется противоположно направленным с лучом x_{19} если существует центральная симметрия, отображающая луч $x_{г}$ на луч x_2.

Отношение сонаправленности на множестве лучей, параллельных данному лучу, есть отношение эквивалентности. *Класс эквивалентности по отношению сонаправленности на множестве лучей, параллельных данному лучу, называется направлением на плоскости.*

Определение. Объединение полуплоскости и луча на ее границе называется *плоским репером.*

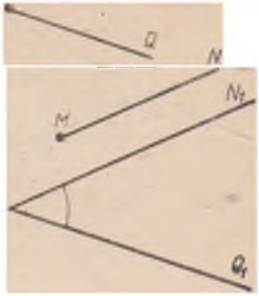
Репер, заданный полуплоскостью *а* и лучом *ОА* на ее границе* обозначается ([ОА), а) или (О, Л, *В*), где *А* — точка открытого луча *О А*, *В* — точка открытой полуплоскости *а* (рис. 2).

Пользуясь аксиомой подв-ижности плоскости, нетрудно доказать, что один плоский репер отображается на другой либо осевой симметрией, либо композицией двух осевых симметрий, либо композицией трех осевых симметрий, не равной осевой симметрии.

Репер x_2 называется сооориентирован- *Р*
ным с репером x_b если существует композиция двух осевых симметрий, отображающая репер x_x на репер л;$_2$.

Репер x_2 называется противоположно ориентированным реперу x_b если существует осевая симметрия или композиция трех осевых симметрий, отображающая репер x_2 на репер x_2.

Отношение сооориентированности реперов есть отношение эквивалентности на множестве плоских реперов. Это отношение имеет два и только два класса эквивалентности.



Класс эквивалентности по отношению сооориентированности на множестве плоских реперов называется ориентацией плоскости. Репер, определяющий выбранную ориентацию, называется положительно ориентированным. Тогда репер, принадлежащий другому классу эквивалентности, называется отрицательно ориентированным.

*

По традиции, исходя из наглядных представлений, положительно ориентированным принято считать такой репер (О, А, *В)*$_y$ у которого «обход» точек *О — А — В* по сторонам треугольника *ОАВ* совершается против хода стрелки часов (рис. 2). Репер (О, Л, *С)* на рисунке 2 отрицательно ориентирован.

Так как любое перемещение первого рода представимо композицией двух осевых симметрий, то^оно не меняет ориентации репера, а значит, и ориентации плоскости. Перемещение второго рода представимо композицией трех осевых симметрий и, следовательно, меняет ориентацию репера, а значит, и ориентацию плоскости.

6) Угол *АОВ* называется *ориентированным* и обозначается */-АОВ,* если стороны его упорядочены (ЮЛ) — первая сторона, [05) — вторая).

Всякий ориентированный угол *АОВ* определяет плоский репер (О, *А, В).* Если этот репер положительно ориентирован, то и угол *АОВ* положительно ориентирован. Если же репер (О, Л, *В)* отрицательно ориентирован, то и угол *АОВ* отрицательно ориентирован.

Мера положительно ориентированного угла считается положительной, отрицательно ориентированного — отрицательной.

Углом между двумя лучами, заданными в определенном порядке, называется мера ориентированного угла, стороны которого соответственно сонаправлены с данными лучами. Например, углом между лучами *MN* и *PQ* (рис. 3) является мера угла *N OQ*$_y$ Обозна-

чение: *([MNJT.[PQ)) = N^SQ*$_Y$

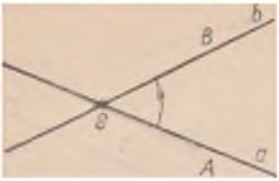


Рис.. 4

7) Углом между двумя пересекающимися прямыми, заданными в определенном порядке, называется мера, не превосходящая по абсолютной величине 90°, ориентированного угла, первая сторона которого лежит на первой прямой, вторая — на второй.

Например, углом между прямыми *a* и *b* на рисунке 4 является мера угла *AOB*.

Обозначение угла между двумя прямыми, заданными в определенном порядке, —*(a, b)*:

(a, *b) = AOB, ф, a) = BO A.*

Ясно, что (a, *b)* — —(*b*, *a)*.

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю,

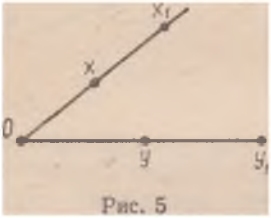


Рис. 5

§ 1. Гомотетия, ее свойства и признак

к. Определение гомотетии

Зададим точку *O* в плоскости и число *k ф* 0. Рассмотрим отношение, при котором образом точки *X* плоскости является такая точка X_{ll} что OX_x — *k OX*.

Точка *O* в паре с любой точкой *X* определяет единственный вектор *OX* (рис. 5). Произведение вектора *OX* и числа *k* есть вектор *k OX*. В плоскости для точки *O* существует единственная точка X_x такая, что $OX_г = k\,OX$. Следовательно, для любой точки X плоскости при заданном отношении существует единственный образ.

Образом точки *O* является сама эта точка.

Пусть теперь — произвольная точка плоскости. Является ли она образом какой-нибудь точки при заданном отношении? Другими словами, существует ли такая точка *Y*, что выполняется равенство $OF_x = kOY$?

Так как по условию *k ф* 0, то из равенства $OУ_г = kOY$ следует равенство $\frac{OY}{k} = —OY_{\pm}$. Следовательно, каждая точка плоскости является образом единственной точки плоскости при заданном отношении*

Таким образом, заданное отношение есть обратимое отображение плоскости на себя. Это отношение называется гомотетией. Существенным при задании гомотетии оказалось задание точки *O* и числа *k ф* 0. Точка *O* называется *центром гомотетии*, а число *k* — *ее коэффициентом*.

О п р е д е л е н и е .' *Гомотетией* е центром O и коэффициентом k (k Ф 0) называется отображение плоскости на себя, при котором

образом точки X является такая точка $X_{1У}$ что $OX_г — kOX$.

Запись $OX_{:} — kOX$ равносильна записи $Ho(X) = X_{у}$

При k — 1 выполняется равенство $OX_г = OX$, т. е. Ho — тождественное преобразование. При k = —1 любая точка X отображается на такую точку что OX_x — —OX. Следовательно, гомотетия с коэффициентом —1 есть центральная симметрия,

Б. *Свойства гомотетии*

1. Как видно из проведенных ранее рассуждений, гомотетия является *обратимым отображением* плоскости на себя. Это значит, что для гомотетии существует обратное ей отображение, причем

i_

отображение, обратное гомотетии Ho, есть гомотетия Hoi

$$(H^k o\ (X) = X_y) <^\wedge \{OX_г = KOX) \wedge (o_j x o = X \wedge i H \wedge X J \wedge X).$$

Для гомотетии выполняются и другие свойства обратимых отображений, в частности пересечение (объединение) фигур при гомо-
' тетии отображается на пересечение (объединение) их образов.

2. Т е о р е м а 1 . *Если при гомотетии $H^k{}_0$ точки X и Y отображаются на X_1 и Y_{1f} то $X_1Y_1 — kXY$,*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как $X_г — Ho\{X)$ и Fi = $H\%$ (У), то по определению имеем:

$$OX_= = kOX,\ OY^\wedge kOY.'$$

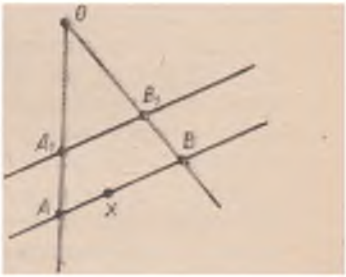
Поэтому xTr, = $0Y_1 — OX_г = kOY — kOX = k\ (OY — OX) = kXY$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е . *При гомотетии Но любые точки X и Y отсражаются на такие точки $X_г$ и $Y_{1у}$ что* $|X_1Y_1| = |k| \cdot |XY|$.

3. Важно выяснить, на какую фигуру отображаются при гомотетии прямая, отрезок, луч, полуплоскость.

Пусть даны прямая $A\ B$ и точка X на ней, X ф A, X ф B (рис. 6). При гомотетии Ho точки А, B и X отображаются на $A_{1У}$ $B_г$ и $X_г$ соответственно. Принадлежит ли точка X_1 прямой A_1B_1?

Три точки принадлежат одной прямой, если одна из этих точек лежит между двуия другими. Следовательно, нужно выяснить, лежит ли одна из точек $A_{1з}$ $B_г$ и $X_=$ между двумя другими. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.



Рис, 6

Теорема 2. *При гомотетии сохраняется отношение «лежать между», т. е. если точка X лежит между точками A и B и $A_{1У}$ $B_г$, $X_х$ — образы точек A, B и X при гомотетии H*Ь$_У$ то $X_±$ лежит между $A_х$ и $B_у$*

Доказательство. Так как *X* лежит между *A* и Я, то точки X, *A* и *B* попарно различны (т. е.. \AB\Ф0, |AX\ ф О, \XB\ ф 0) и выполняется равенство | AX \ + \XB\ ===. \AB\. После умножения обеих частей этого равенства на \k\ получим: \ k \ |ЛХ| + + \k\ \XB\ = \k\ \AB\ или (по следствию из теоремы 1) $\backslash A_1X_1\backslash$ + -f- | XiBi| = | $A_1B_1$1 и | $A\backslash X_г$| ф 0, | X±$B_1$1 ф 0, ı A\B±\ ф 0, откуда следует, что точка $x_г$ лежит между $A_г$ и B_L.

Пусть теперь дан отрезок *A B* — объединение различных точек *A и B и* множества точек, лежащих между ними. Так как при гомотетии объединение фигур отображается на объединение их образов (свойство 1) и сохраняется отношение «лежать между» (теорема 2), то отрезок *A B* отображается на объединение образов $A_г$ и $B_г$ точек Л и В и множества точек, лежащих между $A_г$ и $B_{1У}$ т. е. на отрезок *A.B,*. Следовательно, *образом отрезка при гомотетии является отрезок.*

Луч *A B* можно рассматривать как объединение отрезка *A B* и множества точек X, таких, что *B* лежит между Л и X. Учитывая свойства гомотетии отображать объедийение фигур на объединение их образов , и сохранять отношение «лежать между», находим, что *образом луча при гомотетии является луч.*

Выясним,, на какую фигуру отображается при гомотетии прямая.

Для любых трех попарно различных точек Л, В и X прямой одна ' из них лежит между двумя другими. Тогда из точек $A_± = Но$ (Л), $B_г = Но$ *(B)* и $X_х$ т= *Но* (X) также одна лежит между двумя другими, т. е. X_1 6 (ЛА). Обратно, если $Y_1i(A_1B_1\backslash$ то Y = (//5)$_{-1}$(Ki) принадлежит прямой *AB.* Следовательно, прямая A_1B_1 есть множество образов точек прямой *AB*, т. е. образ прямой *AB.* Итак, *прямая отображается при гомотетии на прямую.*

Пусть а и (5 — полуплоскости с границей а, точка *B* принадлежит полуплоскости (3, но не принадлежит прямой^. Полуплоскость *a* можно рассматривать как объединение прямой *a* и множества точек X, таких, что точки *B* и X разделены прямой *a* (пересечение отрезка *BX* и прямой *a* есть точка). При гомотетии полуплоскость *a* отобразится на объединение прямой $a_г$ — образа прямой *a* и множества точек $X_х$, таких, что точки $B_г$ и $X_г$ разделены прямой $a_{1У}$ т. е. *полуплоскость сс с границей а отображается на полуплоскость a_1 с границей $a_г$.*

Итак, мы показали, что *образом отрезка, луча, прямой,, полуплоскости при гомотетии является соответственно отрезок, луч, прямая, полуплоскость.*

4. *Прямая и ее образ при гомотетии параллельны*; при $k > 0$ любой луч отображается на сонаправленный с ним луч (рис. 7, а),

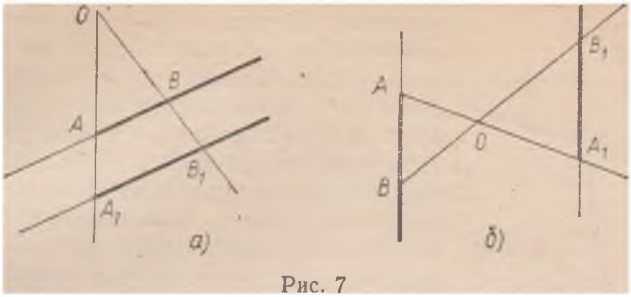


Рис. 7

при k < О любой луч отображается на противоположно направленный с ним луч (рис. *7, б)*.

В самом деле, если A *и* B — точки прямой a> A_x и B_x — их образы при гомотетии Ho* то $A_X B_X$ = kAB (теорема 1), откуда следует, что (Л^) || $\{AB)$\ $[AxB$^$W/AB)$ при k >0и [АА) \\ \$AB)$ при k < 0.

5. *Центр гомотетии*, не являющейся тождественным преобразованием, есть *единственная неподвижная точка* этого преобразования.

6. Прямая, проходящая через центр гомотетии, *отображается* на параллельную ей и проходящую через центр гомотетии прямую, т. е. *на себя.*

Выясним, только ли такие прямые будут при гомотетии двойными. Если прямая *а* отображается на себя при гомотетии #о, k *ф* 1, то для любой точки X 6 *а* образ ее = *Но* (X) также принадлежит прямой *а.* Но точка и ее образ при гомотетии лежат на одной прямой с центром, т. е. О 6 (^^i) = ^{a}-

Таким образом, прямые, проходящие через центр, и только они — двойные прямые гомотетии, отличной от тождественного преобразования.

7. *При гомотетии любой угол отображается на конгруэнтный ему угол.*

Всякий выпуклый угол можно рассматривать как пересечение двух полуплоскостей с пересекающимися границами (рис. 8, *а*),

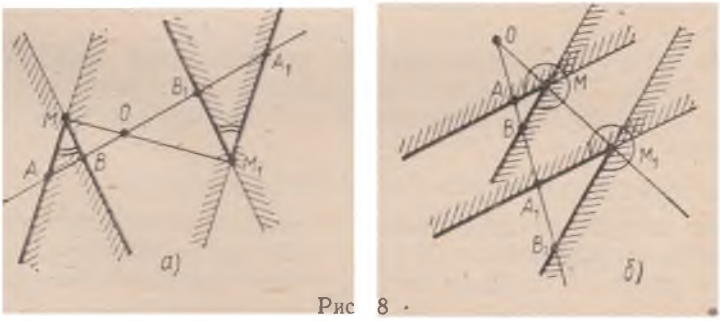


Рис 8

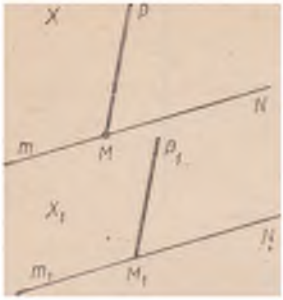
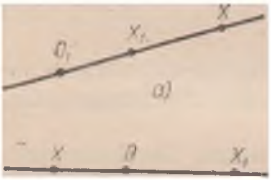


Рис. 9

развернутый угол — полуплоскость с выделенной на границе точкой, невыпуклый, угол — объединение двух полуплоскостей с пересекающимися границами (рис. 8,6). Поскольку при гомотетии полуплоскость отображается на полуплоскость, пересечение полуплоскостей — на пересечение их образов, объединение полуплоскостей — на объединение их образов, то образом угла при гомотетии является угол. Кроме того, при гомотетии каждый луч отображается на сонаправленный с ним или на противоположно направленный с ним луч. А два выпуклых (невыпуклых) угла с соответственно сонаправленными или соответственно противоположно направленными сторонами конгруэнтны, так как в первом случае существует перенос, а во втором — центральная симметрия, при которых один угол отображается на другой.



б)

Рис. 10

Таким образом, угол и его образ при гомотетии конгруэнтны.

8. *Любой репер и его образ при гомотетии одинаково ориентированы.*

Доказательство. Пусть задан репер X — полуплоскость с границей m и лучом MN на границе (рис. 9). Выберем в полуплоскости еще луч MP. При гомотетии с положительным коэффициентом репер X отображается на X_1. При этом лучи MN и MP отображаются на соответственно сонаправленные с ними лучи M_1M_1 и MiPi (свойство 4). Но тогда существует перенос, отображающий лучи MN и MP на лучи M_1N_1 и M_XP_V Перенос, как было отмечено вначале, не меняет ориентации репера. Следовательно, реперы X и X_2 сооориентированы.

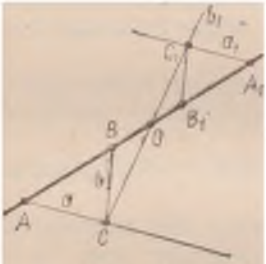


Рис. 11

При гомотетии с отрицательным коэффициентом репер X отображается на X_2 и существует центральная симметрия, отображающая^ репер X на X_2, т. е. реперы X *и* X_2 также одинаково ориентированы.

9. *Конструктивные способы задания гомотетии*, ~

Как следует из определения, гомотетия однозначно задается центром и коэффициентом. При этом либо центр, .либо коэффициент, либо и центр, и коэффициент могут быть заданы опосредованно. Например, если *Но {X)* == $X_=$ и точки О, X и X_x заданы, то коэф-

фйциент k можно найти из условия $OX_1 = kOX$: $|к\ = \ OX_г\ | : |OX|$;

и $к > 0$, если направления векторов OX и $OX_г$ совпадают (рис. 10, а), $k < 0$, если направления векторов OX и OX_x противоположны (рис. 10, б).

Если $Но$ (X) = $X_г$ *и* заданы точки X, $X_г$ и число $к$, то точка О может быть построена, так как из равенства $OX_г = кOX$ следует, что точка O делит отрезок X_xX в отношении k (считая до точки $X_±$) внутренним образом при $к < 0$ и внешним образом при $k > 0$ (см. рис. 10, *а*, *б*).

Если $Но$ (Л) = $A_г$ и $Но$ (B) = B_u O £ (AB) (рис. 6), то Об *(ААJ* и О 6 (55_x), т. е. О = (ЛЛ$_X$) П (В^iK а коэффициент & определяется из условия OA_x = £ОЛ.

Таким образом, *гомотетия* (с учетом ее свойств) *может быть однозначно задана*:

а) *центром и коэффициентом*,

б) *центром и парой соответственных точек {точки попарно различны и лежат на одной прямой*),

в) *коэффициентом и парой соответственных точек*,

г) *двумя парами соответственных точек* (Л; Лі), (5; £$_x$), *таких*, <//770 *прямые А В* и Л А *параллельны и различны и* $\backslash AB \backslash \Phi \backslash A_1B_1 \backslash$. Возможны и другие способы задания.

З а д а ч а. Построить центр гомотетии, заданной двумя парами точек (Л; Лх), (5; Ві), лежащих на одной прямой, $A\ B\ \phi\ A_1B_1$ (рис. И).

Р е ш е н и е. Центр гомотетии можно построить, вычислив

предварительно ее коэффициент, исходя из равенства $A_гB_г = kAB$.

Более рационально, на наш взгляд, следующее решение.

Возьмем произвольную точку $C\ \$\ \{AB)$ и проведем прямые $a = (AC)$ и b — $\{BC)$. При заданной гомотетии они отобразятся на прямые $a_г$ и $Ь_{1У}$ параллельные a и b и проходящие через точки Л$_x$ и B_x соответственно. Пересечение фигур при гомотетии отображается на пересечение их образов. Поэтому точка C — a $[\}$ b отобразится на $C_± = a_x$ П $Ь_±$. Точка О — (ЛЛ$_X$) Г) $(CC_г)$ есть центр заданной гомотетии. Так так $AB\ \ \Phi\ A_±B_{1У}$ то задача всегда имеет и притом единственное решение.

В. *Признаки гомотетии и параллельного переноса*

При сравнении свойств параллельного переноса и гомотетии (центральная симметрия — частный случай гомотетии) нетрудно заметить, что при том и другом преобразовании любая прямая отображается на параллельную ей прямую. Оказывается, никакие другие преобразования, кроме гомотетии и переноса (тождественное преобразование — частный случай гомотетии и переноса), данным свойством не обладают.

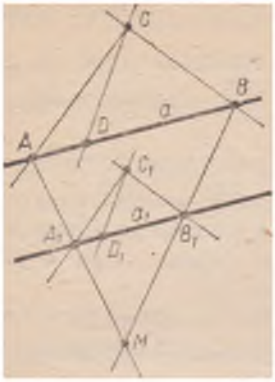


Рис. 12-

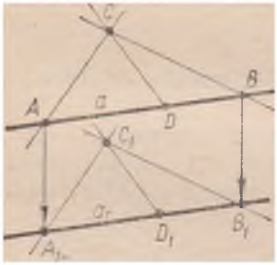


Рис. 13

Т е о р е м а 3 . *Преобразование плоскости, при котором любая прямая отображается на параллельную ей прямую, есть либо гомотетия, либо параллельный перенос.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть преобразование / отображает любую прямую на параллельную ей, в частности прямую *а* на a_c¥=*а* (рис. 12). Для произвольных точек *А* и В прямой а их образы A_c и B_c принадлежат прямой a_x. Если *С £ а*, то она является точкой пересечения прямых *СА* и *СВ*. Тогда образ ее при преобразовании / есть точка C_c, которая является пересечением прямых, проходящих через точки $Л_x$ и $В_x$ и параллельных прямым *С А* и СВ соответственно. '

Пряхмые AA_l и BB_l лежат в одной плоскости и, следовательно, либо пересекаются, либо параллельны. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) *(АА_)* Л *(ВВ_c)* =*М*.^ (рис. 12). При гомотетии *Н*\^^^, заданной центром *М* и парой точек (А; $Л_x$), точка *С* отображается на точку пересечения прямых, проходящих через $Л_x$ и $В_x$ и параллельных (Л С) и *(ВС)* соответственно,т. е. *Нм''^А1) (С)* = /(С) = $С_x$ для *С~£ а.*

Если *D £ а,* то и при гомотетии *Н(й^Ах* и при преобразовании *f* точка *D* отображается на точку пересечения прямой a_x и прямой, -проходящей через точку C_c и параллельной прямой *CD,* т. е. *Н$^А)* *(D)* = / (D) = D_1.

Таким образом, для любой точки *X* плоскости имеем: *НМ'^А1)(X)* = =*f(X)* —X_{1}, а значит, / = *Ни'^Al)*. При этом */(М) = Нм'^А'/(М)* —*М*.

2) *(ААJ* П *(ВВJ* = 0 (рис. 13). Нетрудно установить, что в этом случае лучи *А А_X* и $ВВ_X$ сонаправлены и *А А_c*\ = | $ВВ_X$|,

т. е. $ЛЛ_X$ =. *ВВ_c*. При переносе, заданном парой точек (Л; $Л_x$), любая точка С *а, С = (АС)* П *(ВС),* отображается на точку пересечения прямых, проходящих через точки Л и *В* и параллельных *(АС)* и (ВС) соответственно. Следовательно, для точек С, не принадлежащих прямой *а*, /(С) = $АЛ_x$ (С) = $С_x$.

Если *D £ а,* то и при переносе *АА_Л,* и при преобразовании / точка *D* отображается на точку пересечения прямой a_x и прямой, проходящей через точку C_x и параллельной прямой *CD*. Следова-

тельно, и для точек D прямой a AA_X (D) = = $f(D)$ $= D_1$.

Таким образом, для любой точки X плоскости имеем: AA_c (X) = f (X) - = X_1, а значит, / = AA_c.

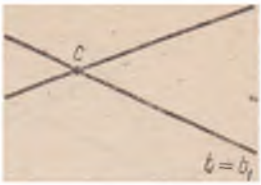


Рис. 14

Мы рассмотрели случай, когда прямые a и a_c = / (a) различны. Если таких прямых не найдется, т. е. любая прямая и ее образ при преобразовании /совпадают, то f — тождественное преобразование. Действительно, любая точка C может быть рассмотрена как точка пересечения двух прямых, например a и b (рис. 14). По условию / (a) = a и / (bj = b. Тогда / (c) = / $(a$ Л $b)$ = $f(a)$ f| П $f(b)$ = a {] b = C.

Тождественное преобразование — частный случай гомотетии и параллельного переноса.

Итак, теорема доказана.

Учитывая доказательство теоремы 3, можно сформулировать следующие признаки гомотетии и параллельного переноса.

Преобразование плоскости, при котором любая прямая отображается на параллельную ей прямую и прямые, проходящие через точку и ее образ, принадлежат одному центральному пучку, есть гомотетия.

Преобразование плоскости, при котором любая прямая отображается на параллельную ей прямую и прямые, проходящие через точку и ее образ, принадлежат одному пучку параллельных (попарно паралмльных), есть параллельный перенос.

§ 2. Композиция гомотетий

Теорема 1. *Композиция двух и большего числа гомотетий есть либо гомотетия, либо параллельный перенос.*

Доказательство. При гомотетии любая прямая отображается на параллельную ей прямую. Отношение параллельности прямых транзитивно. Поэтому при композиции двух и большего числа гомотетий любая прямая отображается на параллельную ей прямую. По теореме 3 (§ 1) можно утверждать, что эта композиция есть либо гомотетия, либо перенос.

Центр гомотетии (или пара точек, определяющих перенос) композиции гомотетий может быть получен конструктивным путем.

Рассмотрим, например, композицию гомотетий H™ и N $ф$ M. Легко заметить, что образ точки M при композиции Hft o H™ принадлежит прямой MN: $Hм$ о $Hм$ = $H\%$ (M) = M_2. Точка M и ее образ M_2 при гомотетии лежат на одной прямой с центром N гомотетии. Для произвольной точки X плоскости построим ее образ X_2 при композиции Hfi о //«*.

Рис. 15

Если *(MN)* П *(XX2)* — *P* (рис. 15, а), то композиция tfj} о *H"}* есть гомотетия (см. признак гомотетии в § 1), а точка *P* — ее центр. Одновременно установлено, что *если композиция двух гомотетий есть гомотетия, то центры всех трех гомотетий принадлежат одной прямой.*

Если прямые *MN* и XX_2 параллельны (рис. 15, *б),* то композиция *Hfi* о — параллельный перенос (см. признак параллельного переноса в § 1). Так как *Ны* ° *Нм (X)* = X_2, то искомый перенос определяется парой точек *(X;* X_2) или (M; M_2).

Рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве данной теоремы, показывают, что композиция гомотетии и параллельного переноса есть либо гомотетия, либо перенос. Если коэффициент к гомотетии отличен от 1, то при композиции гомотетии и переноса любые точки *X* и *Y* отображаются на такие точки X_t и Y_{1t} что выполняется равенство I XjFJ = \k\ |XY\. Следовательно, композиция гомотетии (отличной от тождественного преобразования) и переноса есть гомотетия.

При выяснении вопроса о композиции гомотетий можно пользоваться также векторным уравнением гомотетии. Получим его.

Пусть *O* — некоторая точка плоскости и *H*™ — данная гомотетия. Для произвольной точки *X* плоскости имеем:

$$(Hм(X) = Xj) \text{ фф } (Ш_1 \wedge mMX) \wedge (\partial X_1 — 6M = m\,OX — mOM)\&$$
$$\text{ф=> } (0X_{1=} = mOX + (1 — m)\,OM).$$

Таким образом, уравнение

$$OX_{1=} \text{тОX} + (1 — m)\ OM,$$

где X — любая точка плоскости, есть векторное уравнение гомотетии *Hм* - Заметим, что сумма коэффициентов при *OX* и *OM* равна единице.

Выведем также векторное уравнение параллельного переноса *a*.

Для произвольной точки *X* плоскости имеем:

$$(a\ (X) = \text{Xj})\ (XX_x = a) \text{ о } (OX, — OX_{1=}\ a) \wedge (0X_x = OX + a).$$

Выясним теперь, чему равна композиция гомотетий H^{TM} и tfJJ.

Если $H\%$ о Я* (X) = $HЪ$ (X_t) - X_2, то _

$$6X_1 = mбX + (1 — m)\,0M, \qquad (1)$$

$$OX_2 = nOX_t + (1 — n)\,ON. \qquad (2)$$

Подставляя в равенство (2) значение $0X_y$ из равенства (1), получим уравнение

$$OX_2 = mnOX\text{-f- и } (1 — m)\,OM\text{ -f } (1 — n)\,ON. \qquad (3)$$

Рассмотрим случаи, когда mn ф 1 и mn = 1.

1) mn ф 1.

Вектор, равный сумме векторов n (1 — m) OM и (1 n) ON, обозначим (1 —mn) OP:

$$n\{\backslash — m)\,OM + \{\backslash — n)\,ON = (\backslash — mn)\,OP. \qquad (4)$$

Уравнение (3) примет вид:

$$0X_2 = mnOX + (1 — mn)\,OP. \qquad (5)$$

Уравнение (5) есть уравнение гомотетии с центром в точке P и с коэффициентом mn.

Таким образом, если mn ф 1, то композиция $Hи$ °$Hм$ есть гомотетия с коэффициентом mn и с центром P, где

$$OP = \frac{n}{1-mn}OM + \frac{}{1-mn}ON. \qquad (6)$$

В равенстве (6) сумма коэффициентов при OM и ON равна коэффициенту при OP. Это означает, что точки M, N и P лежат на одной прямой.

Если M — N, то точка P также совпадает с M и N (см. равенства 4 и б).

··л

2) mn = **1.**

Подставляя в уравнение (3) значение mn = 1, получим:

$$OX_2 = ■\ OX + (1 —/г)\ M/V. \qquad (7)$$

Уравнение (7) есть уравнение переноса (1 — n) MN.

Следовательно, если mn — 1, то композиция H_N ° $Hм$ есть перенос (1 — n) MN. Если M = N, то MN — О, $0X_2$ = OX, а значит, композиция H_N о H_M есть тождественное преобразование.

§ 3. Композиция гомотетии и перемещения. Преобразование подобия плоскости

Гомотетия и перемещение являются преобразованиями плоскости. Следовательно, композиция их также преобразование плоскости. При этом если A и B — две произвольные точки плоскости, A_x

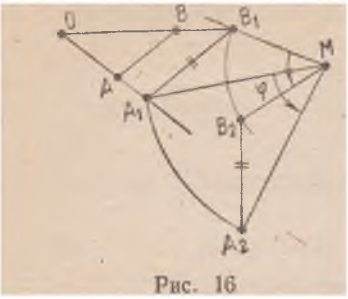


Рис. 16

и B_1 — их образы при гомотетии, A_2 и B_2 — образы точек A_x и B_x при перемещении, то $|A_2B_2| = |A_1B_1|_1$ $|A_1B_1| = |k||AB|$ или $|A_2Bo| = |k|$ $|AB|$ (рис. 16). Значит, композиция гомотетии и перемещения есть такое преобразование плоскости, при котором расстояния между любыми двумя точками изменяются в одном и том же отношении $|k| > 0$. Такое преобразование называют подобием. Очевидно, что подобием является композиция перемещения и гомотетии, композиция двух гомотетий, композиция двух перемещений, гомотетия.

Определение. Отображение плоскости на себя, при котором расстояния между любыми двумя точками изменяются в одном и том же отношении $k > 0$, называется преобразованием подобия или подобием.

Число k называется коэффициентом подобия. Преобразование подобия с коэффициентом k будем обозначать U^k.

Примером преобразования подобия являются перемещение (подобие с коэффициентом 1), гомотетия Ho (подобие с коэффициентом |&|), композиции гомотетии и перемещения, перемещения и гомотетии, двух и более гомотетий.

§ 4. Свойства преобразований подобия

1. Подобие плоскости действительно является преобразованием: если предположить, что различные точки A и B отображаются на одну и ту же точку A_b то из равенства $|A_XA_X| — k\ |AB|$, которое выполняется по определению преобразования подобия, следует, что $|AB| — 0$, т. е. A = В, что противоречит условию.

Являясь преобразованием, подобие обладает всеми свойствами преобразований. В частности, пересечение (объединение) фигур при подобии отображается на пересечение (объединение) их образов, для подобия существует обратное ему преобразование, которое также

является подобием: $(П^*)^{"1} = П^к$.

2. При подобии сохраняется отношение «лежать между», образом отрезка, луча, прямой, полуплоскости является соответственно отрезок, луч, прямая, полуплоскость (см. доказательство соответствующего свойства гомотетии).

3. Подобие фигур.

Определение. Если фигуру F можно отобразить на фигуру так» что для любых точек X, Y фигуры F и их образов X_x, Y_t выполняется равенство $|K^\wedge Y_X| = k\ |XY|$, $k > 0$, то фигура F_x называется подобной фигуре F с коэффициентом k.

Так как при подобии любые две точки X и К отображаются на такие точки X_t и Y_{lt} что IX^! = k |ХУ|, то образ фигуры при подобии подобен самой фигуре.

Легко доказать, что отношение подобия фигур обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности.

Так как перемещение и гомотетия являются частными случаями подобия, то конгруэнтные фигуры подобны с коэффициентом 1. Образ фигуры при гомотетии H^{κ} подобен самой фигуре с коэффициентом подобия $\backslash k \backslash$.

4. Композиция преобразований подобия с коэффициентами k_t и й$_2$ есть преобразование подобия с коэффициентом $k_y k_2$. В самом деле, если X и У — произвольные точки плоскости, X_1 и Y_1 — их образы при подобии П?*, X_2 и Y_2 — образы точек X_x и Y_t при подобии Щ^2, то | $X_2У_2$| = $\kappa_x \kappa_г$ | XY|. Получили, что композиция Пг^2 о П?^{1} есть преобразование, при котором расстояния между любыми двумя точками изменяются в отношении $k_1 k_2$, т. е. П|$^!$ о о $\Pi\backslash^1 = \Pi^{\kappa A}$.

5. Теорема о преобразованиях подобия плоскости.

Для дальнейшего изучения преобразований подобия, для исследования возможностей использования преобразований подобия при решении задач важно выяснить, как может быть задано преобразование подобия, какие частные виды преобразований подобия, отличных от гомотетии и перемещения, существуют, каковы характеристические свойства частных видов преобразований подобия и т. д.

Преобразование подобия общего вида мы получили, рассматривая композицию гомотетии и перемещения. Закономерно это или случайно? Другими словами, любое ли преобразование подобия плоскости равно композиции гомотетии и перемещения?

Перемещение плоскости — частный вид преобразования подобия. Для задания перемещения, как следует из аксиомы подвижности, достаточно указать три пары точек (Л; Лj), *(В\ ВJ,* (С; C_X), таких, *чюС $\$\{AB)$ и $\backslash A_1 B_1 \backslash = \backslash AB \backslash$,* |$5_1C_1$|=|SC|, |$C_X$^| - $\backslash CA \backslash$. Сколько пар точек и каких однозначно определяют преобразование подобия?

Ответы на поставленные здесь вопросы мы получим, если докажем теорему о преобразованиях подобия плоскости, являющуюся аналогом аксиомы подвижности.

Теорема о преобразованиях подобия плоскости: если расстояния | $AB\backslash$ и $\backslash A_x B_г 1$ положительны, то существуют два и только два преобразования подобия плоскости, при которых точки А и В отображаются на A_x и В) *соответственно.*

Доказательство. Если $|A_X B_X \backslash$ =$|AB \backslash$, то теорема доказана (см. аксиому о перемещениях).

Рассмотрим случай, когда | $ф \backslash AB \backslash$. Тогда $\backslash A_X B_X \backslash = k \backslash AB \backslash$, $k > 0, k$ $Ф$ 1.

При гомотетии H^k с произвольным центром точки A и B отобразятся на такие точки A' и B', что $\backslash A'B'\backslash$ — k $\backslash AB\backslash$. По условию $\backslash A_1B_1 1$ — $k\backslash AB\backslash$. Поэтому | $A'B'\backslash$ =| Л^! >0. Тогда существуют два и только два перемещения Д и $/_2$. при которых точки A' и B' отображаются на A_1 и $B_г$ соответственно (см. аксиому подвижности). Тогда при композициях $/_x$ о $H^к$ и $/_2$ о $H^к$ точки A и B отображаются на Ax и B_1. Каждая из этих композиций есть преобразование подобия, причем $/_2 = S_a$ о f_{lt} где a = (Л^). Поэтому $П_2 == S_a$° $П_г$.

Преобразования $П_а$ и $П_2$ различны, так как отображают одну и ту же полуплоскость с границей *(А В)* на различные полуплоскости с границей (Л^х).

Предположим, что существует еще подобие $П_3$, отображающее Л и B на $Л_х$ и B_x соответственно. При композиции $П_х$ о $П_3^{-1}$ точки A_x и B_x неподвижны. Но эта композиция есть перемещение, так как коэффициенты преобразований П~> и Hi — взаимно-обратные числа. Тогда либо $П_х$ о $П_3^{-1}$ = Е и $П_г = П_3$, либо $П_х$ о $П_3^{-1}$ — S_a и $П_3 = S_a$ о $П_г$ — $П_2$, где S_a — симметрия с осью (Л^).

Таким образом, теорема доказана. Кроме того, в процессе доказательства выяснилось, что, во-первых, каждая полуплоскость с границей *(АВ)* отображается этими двумя преобразованиями подобия на различные полуплоскости с границей ($A_гB_х$) и, во-вторых, любое преобразование подобия плоскости равно композиции гомотетии и перемещения.

Доказанная теорема дает возможность выяснить еще ряд свойств преобразований подобия. Рассмотрим их.

6. Как известно, гомотетия и перемещение первого рода не меняют ориентации репера. Поэтому репер и его образ при композиции гомотетии и перемещения первого рода одинаково ориентированы. Композиция гомотетии и перемещения первого рода называется преобразованием подобия первого рода. Композиция гомотетии и перемещения второго рода называется подобием второго рода. Это название обусловлено тем, что гомотетия не меняет ориентации репера, а перемещение меняет ее на противоположную.

Из доказательства теоремы о подобиях плоскости следует, что две пары точек (Л; $Л_2$) и (В; $S_х$), |Л£|>0, $\backslash A_1B_l\backslash$ ~$k\backslash AB\backslash$, k > 0, задают единственное преобразование подобия первого рода и единственное преобразование подобия второго рода.

Для задания преобразования подобия достаточно указать две пары точек (Л; $Л_х$) и (B; $B_г$), таких, что $\backslash AB\backslash$ > 0 и и род подобия или три пары точек (Л; $Л_х$), *(В;* $В_х$), *(С;* $С_х$), таких, что $Ct(AB)$ и 1ЛА1 : $\backslash AB\backslash$ = : |5С| = KVU : |СЛ|.

7. Каждый частный вид перемещения плоскости и гомотетия являются и частными видами подобия. Выясним, чем характеризуются частные виды преобразований подобия, отличные от перемещений. Для этого рассмотрим композиции гомотетии, не равной перемещению, с каждым из перемещений плоскости.

Перемещениями первого рода являются тождественное преобразование, перенос и поворот вокруг точки.

Очевидно, что композиция гомотетии и тождественного преобразования есть гомотетия. Композиция гомотетии и переноса, гомотетии и центральной симметрии (частного вида гомотетии) есть гомотетия (см. § 2).

Композиция гомотетии и поворота на угол, не кратный 180°, не может быть гомотетией, так как при этой композиции ни одна из прямых не отображается на параллельную ей.

Таким образом, если преобразование подобия первого рода отлично от перемещения, то оно является либо гомотетией, либо композицией гомотетии и поворота на угол, не кратный 180° (см. табл. 1).

Таблица 1

Перемещение t	Первого рода				Второго рода	
	E	T	Z_c	ф =?£= 180° • fi	S_a	$S_a - T$
Подобие	«о	H^k_M	4	Я»$_A$оН$^k_0$, ф =£■ 180° • n	$Sa°H^k_0$	$Sa°H^k_{„}$

Различают два вида перемещений второго рода: осевая симметрия и переносная симметрия. Переносная симметрия есть композиция переноса и осевой симметрии. Тогда композиция гомотетии и переносной симметрии совпадает с композицией гомотетии, переноса и осевой симметрии. Но композиция гомотетии с коэффициентом, отличным от единицы, и переноса есть гомотетия. Следовательно, композиция гомотетии, отличной от перемещения, и любого перемещения второго рода равна композиции гомотетии и осевой симметрии.

Таким образом, если преобразование подобия второго рода отлично от перемещения, то оно является композицией гомотетии и осевой симметрии (см. табл. 1).

Поскольку свойства других частных видов преобразований подобия уже рассмотрены (см. свойства перемещений и гомотетии), далее предстоит изучить свойства преобразований подобия двух видов: композиции гомотетии и поворота с углом, не кратным 180°, и композиции гомотетии и осевой симметрии.

8. При изучении свойств поворота выясняется, что угол между любым лучом и его образом при повороте — величина постоянная, она равна углу поворота. При гомотетии любой луч отображается на сонаправленный с ним луч или на противоположно с ним направленный в зависимости от знака коэффициента гомотетии.

Пусть $л^к = R®\ o\ H^к$, ф $ф$ 180° • n. Если гомотетия $H^к$ отображает произвольный луч MN на Ш^), а поворот R^v отображает луч M_XN_X на Ш$_2$#$_2$), то при $k > 0$ (рис. 17, *а)* имеем:

PWtttMAo, = ф)=м([мло, [авд) = $_ф$).

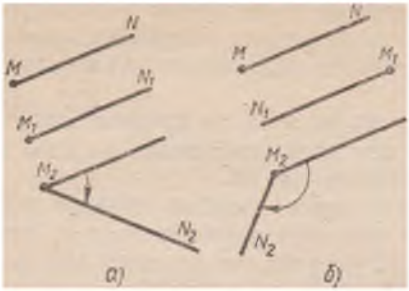


Рис. 17

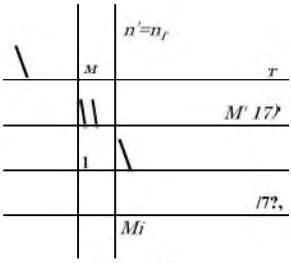


Рис. 18

При $k < 0$ (рис. 17, *б)* получим:

([ВД) If *[MN), {{M^SJM))=y)*$_?$ >(([MJV), [M_2A^$_2$)) = 180°— ф).

Таким образом, угол между любым лучом и его образом при преобразовании подобия, равном композиции гомотетии и поворота, — величина постоянная.

Из рассмотренного свойства следует, что при преобразовании подобия, равном композиции гомотетии и поворота (на угол, не кратный 180°), ни одна прямая не отображается на параллельную ей, т. е. при таком преобразовании подобия не существует инвариантных пучков параллельных прямых.

З а м е ч а н и е . Пучок прямых называется инвариантным пучком преобразования /, если для любой прямой *а* пучка прямая a_x — = / *(а)* принадлежит этому же пучку.

Преобразование подобия второго рода имеет два и только два инвариантных пучка параллельных прямых. Докажем это.

Если преобразование подобия второго рода равно композиции S_a о Ho, то любая прямая *m*, параллельная *а*, отображается на прямую $m_ь$ также параллельную *а*, т. е. || *m*. Любая прямая *n*, перпендикулярная *а*, отображается на прямую %, перпендикуляр-лую *а*, и значит, параллельную *n* (рис. 18).

Итак, пучок прямых, параллельных *а*, и пучок прямых, перпендикулярных *а*, — инвариантные пучки композиции S_a ° Ho.

Если прямая *p* не принадлежит ни одному из найденных инвариантных пучков преобразования S_a ° Ho, то при гомотетии она отображается на прямую *p'*, параллельную *p*, а *p'* при симметрии —

на $p_ь$ прич*ем *p' и* p_l равнонаклонены к оси а, углы (а, *p')* и

(а, $p_г$) противоположно ориентированы. А значит, прямая *p* и ее образ *P i* при преобразовании подобия второго рода равнонаклонены

к оси *а*, причем углы *(а, p)* и *(а,* $p_г$) противоположно ориентированы,

т. е. прямые p и p_x не параллельны (рис. 19).

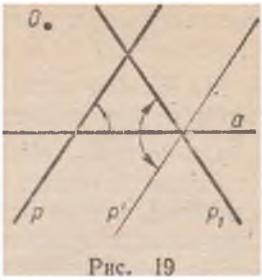


Рис. 19

9. Перемещение, как известно,[4] может не иметь неподвижных точек (параллельный перенос и переносная симметрия), иметь единственную неподвижную точку (поворот вокруг точки), иметь прямую неподвижных точек (осевая симметрия), и, наконец, каждая точка плоскости может быть неподвижной (тождественное преобразование). Поскольку перемещение является преобразованием подобия, то названные случаи имеют место и для преобразования подобия. Однако если рассматривать только преобразования подобия с коэффициентом, отличным от единицы, то естественно, что у таких преобразований более одной неподвижной точки быть не может. Действительно, если предположить, что подобие № , где k Φ 1, имеет две неподвижные точки P и Q, то должно выполняться равенство $\backslash PQ\backslash$ = k |PQ|, что для k ϕ 1 невозможно.

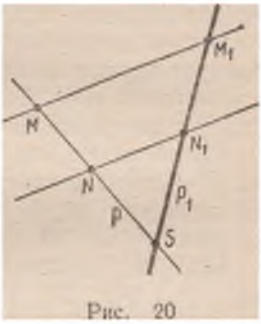


Рис. 20

Остается выяснить, существует ли хотя бы одна неподвижная точка.

Гомотетия всегда имеет неподвижную точку. Рассмотрим преобразование подобия П, равное композиции гомотетии и поворота (с. углом, не кратным 180°) или композиции гомотетии и осевой симметрии.

Предположим, что неподвижная точка преобразования подобия существует. Обозначим ее *S. Для любой прямой р, проходящей-через точку 5, образ ее при заданном подобии также проходит через точку S (рис. 20). Пусть M и N —m произвольные точки прямой /?, a M_x и N_x — их образы при заданном преобразовании подобия. Ясно, что $\{M_u$ $N_x\}$ a p_v При этом имеем:

$$|\quad|:|SM|=|SN_1|:|SN|$$

или

о)

Из равенства (1) следует, что прямые $MM_{\circ}$ и $NN_{=}$ параллельны.

Обратно. Если заданы пары точек (М; $M_г$) и $(N\backslash$ Д^), такие, что (АШО || (NNj), а (MN) f| = 5, то S — неподвижная точка преобразования подобия, при котором точки M и N отображаются на M_l и Nx соответственно.

Действительно, при этом преобразовании подобия точка S, принадлежащая прямой MN, должна отобразиться на точку S_u

принадлежащую прямой $M_X N_V$ Преобразование подобия сохраняет отношение отрезков и отношение «лежать между». Поэтому точки

S, M, N, для которых выполняется равенство SM = a SN, отображаются на такие точки S_{1t} M_x, N_u что выполняется равенство

SiAfi — a $SxNx$. Но тогда = S.

Таким образом, неподвижная точка преобразования подобия есть точка пересечения прямых MN и где (M; и $(N;\ N_x)$ — пары точек, соответственных при заданном подобии, и прямые $MM_г$ и NN_t параллельны.

^ Существуют ли такие пары точек?

Чтобы это установить, воспользуемся следующими свойствами преобразования подобия: любая прямая и ее образ при композиции гомотетии и поворота пересекаются (заметим, что рассматривается поворот на угол, не кратный 180°); прямая и ее образ при композиции гомотетии и осевой симметрии пересекаются в том случае, когда прямая не принадлежит ни одному из инвариантных пучков.

Пусть теперь тип — произвольные параллельные прямые (если П — преобразование подобия второго рода, то прямые нужно выбрать так, чтобы они не принадлежали инвариантным пучкам заданного подобия П).

Построим прямые $m_1 = 1\backslash\ (m)$, n_x — П (n), m_2 = П (m_x), $п_2$ = = П («$_x$) (рис. 21). Исходя из выше отмеченного свойства, каждая из построенных прямых пересекается со своим образом. Обозначим точки пересечения:

$$m[\backslash m_1 = M,\ m\hat{}mъ — M_x,\ nf\backslash n_1 = N,\ n_x f|n_2 = N_v$$

Так как при преобразовании подобия пересечение фигур отображается на пересечение их образов, то П (М) « M_x и П (N) = N_{1t} т. е. (М; Мх) и $(N;\ Nj)$ — пары точек, соответственных при подобии П. Из параллельности прямых mun следует параллельность их образов $т_x$ и «х- Прямые MN и $Af_x iVx$ не параллельны, так как в противном случае четырехугольник $MM_X N_X N$ — параллелограмм и |MiV| = | Mx<Vx I- Последнее невозможно, поскольку рассматривается подобие, отличное от перемещения. Следовательно, подобие П имеет неподвижную точку S — (MN) f) $(MxNx)$.

Для дальнейшего (см. § 5) заметим следующее: нетрудно доказать, что прямая MN (прямая $MiNJ$ есть множество точек пересечения прямых, параллельных прямым mun (соответственно m_x и n_t) со своими образами при подобии П.

Мы доказали теорему о существовании и единственности неподвижной точки преобразования подобия: *преобразование подобия с коэффициентом, отличным от единицы, всегда имеет, и притом единственную, неподвижную точку.*

Неподвижная точка преобразования подобия называется его центром.

Пользуясь свойством преобразования подобия иметь единственный центр, докажем еще ряд свойств подобий.

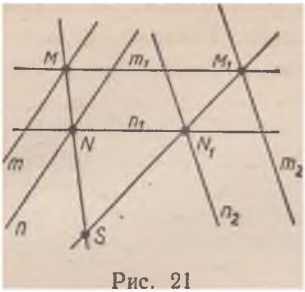


Рис. 21

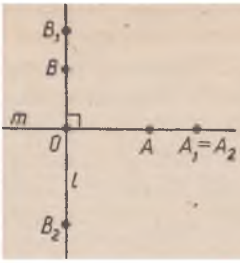


Рис. 22

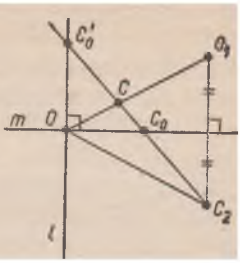


Рис. 23

10. При преобразовании подобия второго рода существуют две и только две взаимно перпендикулярные двойные прямые. Каждая из них проходит через центр подобия и принадлежит одному из инвариантных пучков прямых.

Прямая, не проходящая через центр, не может быть двойной в силу различия расстояний от центра до прямой и от центра до образа прямой. Прямая, не принадлежащая инвариантному пучку, также не может быть двойной, так как отображается на непараллельную ей прямую.

Остановимся более подробно на одном свойстве двойных прямых преобразования подобия второго рода.

Пусть задано преобразование подобия П второго рода, точка O — его центр, m и I — двойные прямые, П = $S_m \circ H^к$.

Если точка A принадлежит прямой m, то П (Л) = $S_m \circ$ (Л) = — S_m (Лх) = $Л_2$ = $A_г$ и $Л_2$ — образ точки Л при гомотетии $H^к{}_0$ (рис. 22).

Если точка B принадлежит прямой $/$, то П (B) = $S_m \circ H^к{}_0$ (B) = = $S_m(Bj)$ — B_2 и $B_г$ — образ точки B при гомотетии $H\sim^к$ (рис. 22).

Если точка C не принадлежит ни прямой m, ни прямой I, то П (С) = S_{ff}оН‘ (С) = S_m $(Сг)$ = C_2 (рис. 23).

Прямая CC_2 пересекает прямую m в точке C_0, а $/$ — в точке C'_0. При заданном подобии прямая OC отображается на (OC_2), а каждая из прямых I и m — на себя. Следовательно, $((OC), m) = (m, (OC_г))$ и $((OC), t) — (I, (OC_2))$, т. е. прямая m содержит биссектрису угла COC_2, а прямая I — биссектрису угла, смежного с углом COC_2. Используя известные свойства биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника, находим:

$$\frac{1\ CgPi}{|C_{,,}C|} \quad \frac{\text{юсу}}{\text{i OC I}} = k, \qquad \frac{|OC_2 1}{|OC|} - к$$

кс 1

Таким образом, двойная прямая преобразования подобия второго рода делит отрезок с концами в точке и ее образе (считая от образа к точке) в отношении, равном коэффициенту подобия. Так как точка

C_a принадлежит отрезку C_2C, то говорят, что прямая m делит отрезок C_2C в отношении k внутренним образом. Точка C' не принадлежит отрезку C_2C. Поэтому говорят, что прямая I делит отрезок C_2C в отношении k внешним образом.

На отрезке D_2D (где $D_2 = S_m \circ H^k_Q (D))$ существует единственная точка D_0, делящая отрезок D_2D (считая от точки D_2) в отношении k внутренним (внешним) образом. Поэтому если точка D_0 делит отрезок D_2D в отношении k, то она принадлежит двойной прямой преобразования подобия П второго рода, при котором точкаD отображается на D_2.

Следовательно, *множество точек, делящих внутренним образом отрезки с концами в точке и ее образе (считая от образа) в отношении, равном коэффициенту подобия, есть одна из двойных прямых подобия второго рода.* Аналогичным образом получаем вторую двойную прямую — множество точек, делящих указанные отрезки в том же отношении внешним образом.

Рассмотрим некоторые задачи.

З а д а ч а 1. Даны параллельные неконгруэнтные отрезки AB и A_1B_1. Построить двойные прямые подобия второго рода, отображающего точки A и B на A_x и B_x соответственно.

Р е ш е н и е. Возможны два случая: прямые AB и A_1B_1 различны или совпадают. Рассмотрим каждый из них.

а) $(AB) \neq (A_1B_1)$ (рис. 24).

Строим точки P и Q, делящие отрезки A_XA и B_XB в отношении k — $|A_XB_X| : |AB|$ внутренним образом. Прямая PQ — одна из двойных прямых заданного преобразования подобия второго рода.

Точки, делящие отрезки A_XA и B_XB в отношении k внешним образом, совпадают с точкой $S = (A_XA) \cap (B_XB)$. Следовательно, вторая двойная прямая проходит через точку 5.

Известно, что двойные прямые преобразования подобия второго рода взаимно перпендикулярны. Поэтому вторую двойную прямую строим через точку S перпендикулярно прямой PQ.

б) $(AB) = (A_XB_X)$ (рис. 25).

Ясно, что прямая AB — одна из двойных прямых подобия, причем точки A_x и B_1 — образы точек A и B при гомотетии с центром

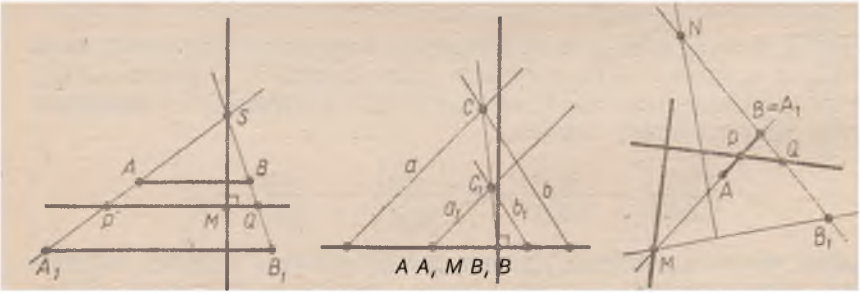
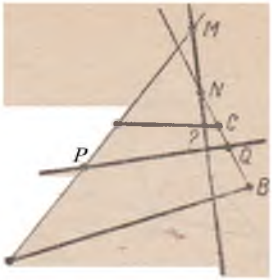


Рис. 24 **Рис. 25** **Рис. 26**

в центре заданного подобия (см. рис. 22). Двойные прямые проходят через центр подобия. Поэтому строим центр M гомотетии, отображающей точки A и B на $A_=$ и B_x соответственно (см. задачу после свойства 9 гомотетии). Точка M есть центр заданного подобия. Через точку M строим прямую, перпендикулярную прямой AB. Она и является второй двойной прямой подобия второго рода, заданного парами точек (Л; $Л_2$) и $(B;\ B_2)$,



Заметим, что подобие первого рода в случаях а) и б) есть гомотетия с центром 5 (в случае а)) и с центром M (в случае б)).

З а д а ч а 2. Построить двойные прямые подобия второго рода, заданного парами точек (Л; Л*) и $(B;\ B_1)$, если $A_x = B$ (рис. 26).

Р е ш е н и е. Строим точки P и Q, делящие отрезки A_2A и B_2B в отношении $k = |A_xB_1| : |AB|$ внутренним образом. Точки M и N делят отрезки $Л_XЛ$ и B_2B внешним образом (считая от точек A_x и $B]$). Прямые PQ и MN искомые.

З а д а ч а 3. Дан четырехугольник $A\ BCD$. Его стороны DA и CB разделены точками P и Q в отношении $|DC|\ '.|AB|$ внутренним образом, а точками M и N в том же отношении (считая от точек D и С) внешним образом. Доказать, что прямые MN и PQ перпендикулярны.

Р е ш е н и е. Пары точек (Л; D) и $(B;\ C)$ задают единственное подобие первого рода и единственное подобие второго рода. Построенные прямые PQ й MN — двойные прямые подобия второго рода, отображающего точки Л и B на D и C соответственно. Но двойные прямые подобия второго рода перпендикулярны. Следовательно, прямые PQ и MN перпендикулярны (рис. 27).

11. Пусть преобразование подобия П задано двумя парами соответственных точек. Чтобы представить его композицией гомотетии и перемещения, нужно выполнить гомотетию с произвольным центром, а затем соответствующее перемещение. Так как выбор центра гомотетии произволен, то преобразование подобия представляется композицией гомотетии и перемещения неоднозначно. Существование единственной неподвижной точки преобразования подобия дает возможность представить его композицией гомотетии и поворота, если это преобразование первого рода, или гомотетии и осевой симметрии, если это преобразование второго рода, так, что центр гомотетии и центр поворота совпадают или центр гомотетии принадлежит оси симметрии.

Т е о р е м а 1. *Преобразование подобия первого рода, не являющееся перемещением, есть либо гомотетия с положительным коэффициентом, либо представимо единственным образом такой композицией гомотетии с положительным коэффициентом и поворота, что центры гомотетии и поворота совпадают с центром подобия.*

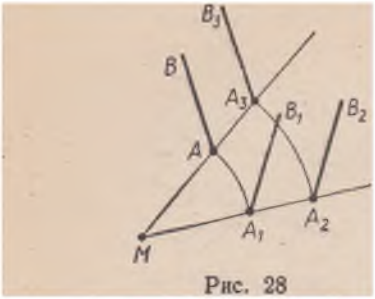


Рис. 28

Доказательство. Пусть задано преобразование подобия $1\backslash^{\kappa}{}_{m}$ первого рода, отличное от перемещения, и M—его центр. Композиция П* о Ям есть перемещение первого рода с неподвижной точкой М. Следовательно, либо

L L

П* о $H^{k}M = E$ и rt =ЕоЯ?и,т. е. $\Gamma t_{M} = H^{k}{}_{M}$,

либо П.м о $H^{\kappa}{}_{M} = Rl$ и ° $н\%$. В частном случае, когда ср = 180°, подобие есть гомотетия с отрицательным коэффициентом (—k), так как $Z_{M} = Hм^{l}$ и — Z_{M} о $Hм$ — $= H_{M} \circ H_{M} = Hм$.

Единственность представления следует и из того, что преобразование подобия, отличное от перемещения, имеет единственный центр.

Такое преобразование подобия называется подобием с углом поворота ф или центрально-подобным поворотом с углом ср. Оно характеризуется центром, коэффициентом и углом поворота — Пд}ф.

При центрально-подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота.

Теорема 2. *Гомотетия и поворот с общим центром в представлении подобия первого рода перестановочны.*

Доказательство. Подобие Пмф при k Φ 1 равно композиции Rm ° $Hм$ (см. теорему 1). Композиция Пм^{4}* ° $Rm^{4'}$ есть подобие с центром M и коэффициентом k. Кроме того, при этом подобии любой луч отображается на сонаправленный с ним луч (рис. 28). Следовательно, п£}ф ° $R7?$ = $H^{\kappa}{}_{M}$ и П&ф = Нм о $R\%$, т. е. $UloH^{k}M = H^{k}{}_{M}$ о RV

Теорема 3. *Преобразование подобия второго рода, не являющееся перемещением, представимо единственным образом композицией гомотетии с положительным коэффициентом и симметрии с осью, проходящей через центр гомотетии, причем центр гомотетии совпадает с центром подобия.*

Доказательство. Пусть задано преобразование подобия второго рода $Пм$ с центром M, k ϕ 1.

L

Композиция $Пм$ о $Нм$ есть перемещение второго рода с неподвижной точкой М. Следовательно, П$м$ $о$ $Нм$ = S_{m} причем M £ m. Тогда П$м$ = S_{m} о $Нм$, где М

Так как преобразование подобия, отличное от перемещения, имеет единственную неподвижную точку, то представление П $м$= $= S_{m}$ $о$ $Нм$ единственное.

Такое подобие называют еще центрально-подобной симметрией. Оно характеризуется центром, коэффициентом и осью симметрии —П%%m.

Теорема 4. *Гомотетия и симметрия с осью, проходящей через центр гомотетии, в представлении подобия второго рода перестановочны.*

Доказательство. ПустьП^.т = = S_m *о Нм, k ф* 1. **композиция** П*м,m* о о S_m есть преобразование подобия второго рода с центром *M* и коэффициентом *k*. При этом подобии любой луч отображается на сонаправленный с ним луч (рис. 29). Следовательно, Пм>т о S_m = = *Нм* или Пм,т=#л1°5т> т. е. S_m*о Нм*= = *HMoS*$_m$ если *M £ m*.

Подводя итог, отметим следующее. Существует пять видов преобразований подобия первого рода: тождественное преобразование, параллельный перенос, поворот вокруг точки (в том числе и центральная симметрия), гомотетия и центрально-подобный поворот. Преобразований подобия второго рода три вида: осевая симметрия , переносная симметрия и центрально-подобная симметрия. В некоторых случаях (например, при выяснении вопросов теоретико-группового характера) тождественное преобразование рассматривается как частный случай переноса, поворота, гомотетии или центрально-подобного поворота, поворот — как частный случай центрально-подобного поворота, осевая симметрия — как частный случай переносной или центрально-подобной симметрии.

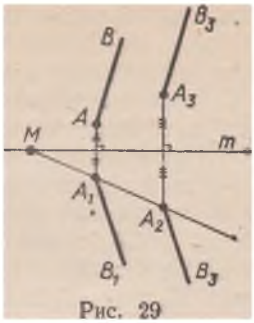


Рис. 29

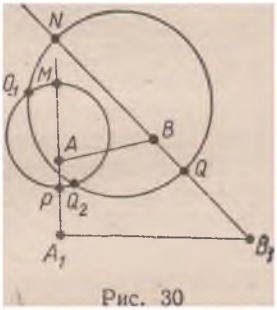


Рис. 30

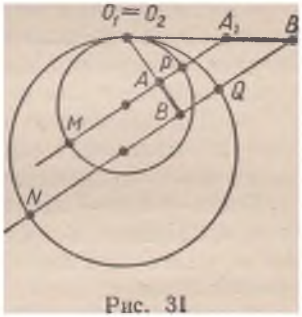


Рис. 31

§ 5. Построение центра преобразования подобия

Для представления подобия композицией гомотетии и перемещения так, чтобы центры гомотетии и поворота совпадали или чтобы центр гомотетии принадлежал оси симметрии, необходимо

Рис. 32

уметь строить центр подобия, заданного двумя парами соответственных точек. Знание способов построения центра, знание его свойств находит эффективное применение и при решении задач.

Способы построения центра очень разнообразны. Мы рассмотрим лишь некоторые из них.

1. Принадлежность центра подобия окружности Аполлония.

Пусть преобразование подобия задано двумя парами точек (Л; $Л_x$) и $(B\backslash$ B_x). Если M — центр подобия, то выполняется равенство $\backslash MA_1\backslash'.\backslash MA\backslash=\backslash MB_1\backslash$: $\backslash MB\backslash$-k, т. е. M принадлежит множествам точек, отношение расстояний которых до двух данных точек ($Л_x$ и Л, и $B)$ — величина постоянная. Центр преобразования подобия есть точка пересечения двух окружностей Аполлония, построенных для отрезков A_XA и $B_гB$ и отношения k. Если окружности пересекутся (рис. 30), то одна из точек пересечения —• центр преобразования подобия первого рода, другая — центр преобразования подобия второго рода. Если окружности касаются (что возможно тогда и только тогда, когда $(AA_г)$ || $(BB^{\wedge}))$, то центры подобий первого и второго рода совпадают (рис. 31). Если отрезки AAx и BB_1 параллельны и конгруэнтны, то пары точек (Л; $Л_x$) и $(B;\ B_г)$ задают перенос и переносную симметрию. Точки, делящие отрезки $Л_XЛ$ и B_XB в отношении, равном 1, внешним образом, не существуют. Поэтому не существуют соответствующие окружности Аполлония, а значит, не существуют и центры (рис. 32).

2. Принадлежность центра преобразования подобия множеству точек пересечения прямых пучка параллельных со своими образами при подобии.

При доказательстве существования центра у любого подобия, отличного от перемещения, было выяснено, что центр принадлежит прямой, которая является множеством точек пересечения прямых пучка параллельных со своими образами при преобразовании подобия. На основании этого свойства центра можно указать два способа его построения. Один из них уже рассмотрен в процессе доказательства существования центра. Рассмотрим второй способ.

Пусть a и b — прямые одного пучка параллельных, а c и d — другого. Прямые a и b пересекаются со своими образами в точках A и B, $acnd$ — в точках C и D. Точка S = (AB) f) (CD) есть центр преобразования подобия.

Рассмотренное свойство центра дает следующий простой способ его построения.

Если преобразование подобия задано парами точек (Л; $A_x)$ и $(B;\ B_г)$, то строим квадраты $ABCD$ и $Л_1B_1C_10_1$ (одинаково или противоположно ориентированные в зависимости от рода подобия, центр которого находим). Прямые ЛВ и CD принадлежат одному пучку параллельных, а прямые AD и BC — другому. Образы этих прямых — соответственно (Л^) и (CjDi), (Л^О и $\{B_XC_X)$. Если (AB) П (AA) = M, (CD) П (№) = N, (AD) П $(A^{\wedge})=P$, (BC) П $(BjCx)$ = Q, то (MN) П (PQ) — $ — центр преобразования подобия (рис. 33).

Построение центра в данном случае не зависит от рода подобия. Оно использует только аффинные свойства подобий и применимо для построения неподвижной точки любого аффинного преобразования.

3. Принадлежность центра преобразования подобия множеству точек пересечения прямых центрального пучка со своими образами.

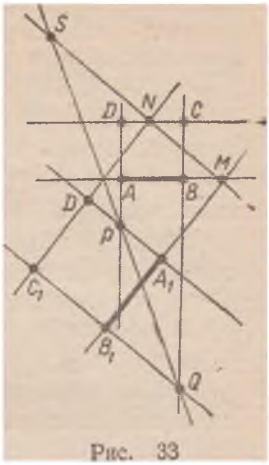


Рис. 33

При отыскании множеств точек пересечения прямых центрального пучка со своими образами при подобии используются метрические свойства преобразований подобия — угол между любым лучом и его образом при преобразовании подобия первого рода — величина постоянная, прямая и ее образ при подобии второго рода равнонаклонены к каждой из двойных прямых. Предварительно докажем следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. *Множество точек пересечения прямых центрального пучка со своими образами при преобразовании подобия первого рода есть окружность, проходящая через центр пучка, образ центра пучка и центр подобия.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано преобразование подобия первого рода, точка *M* — его центр, ср — угол поворота. Рассмотрим пучок прямых с центром в точке S, $ПМ^{Ф}$ *(S)* = S_x (рис. 34). Если *a* — произвольная прямая пучка с центром S, a_x — ее образ

при заданном подобии, то *(a^a^* = ф, если |ф| ^90°, и (а, a_x) = = 180° — ф, если 90° < | Ф | < 180°. Следовательно, точка *A* = = *a* П % принадлежит окружности *SS*= М.

Обратно, если точка *B* принадлежит окружности SSxM, то

$_{sl}$ ((55), *(S. B))* =$_{Ф}$, если |ф|<90°, и ((SB), *(S_XB))* = 180° — ф, если 90° < |ф| ^ 180° (теорема об измерении вписанных углов).

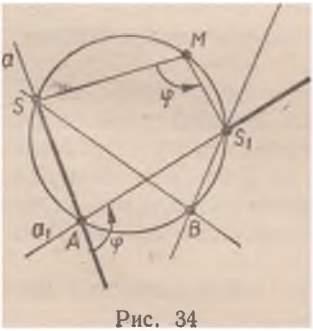


Рис. 34

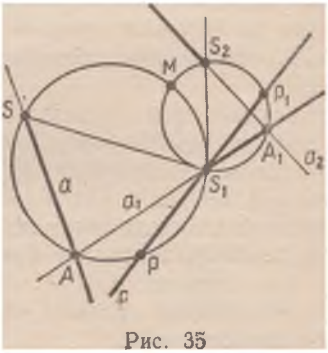
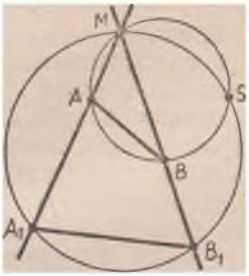


Рис. 35



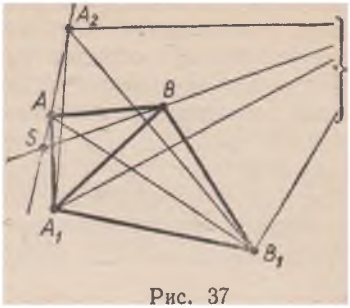


Рис. 37

1) Построение центра преобразования подобия второго рода, вообще говоря, не является самостоятельной задачей, так как может быть сведено к построению центра гомотетии. В самом деле, если 5 — центр преобразования подобия П = $H\%$ ° Sa, где S 6 a, то имеем:

$$п^2 = (Я^* \circ S_a r = Я^* \circ S_a \circ Я^* \circ S_a = Я| \circ 5_a \circ \circ Я^* = Я^{**}.$$

Поэтому для построения центра подобия П, заданного парами точек (Л; Л,) и $(B;\ B_x)$, достаточно построить $Л_2$ = П ($Л_x$) и B_2=П (B_t). Точка пересечения прямых $ЛЛ_2$ и SS_2 искомая (рис. 37).

2) В отличие от преобразования подобия первого рода подобие второго рода имеет две взаимно перпендикулярные двойные прямые, пересекающиеся в центре подобия. Поэтому построение центра может быть сведено к построению двойных прямых.

Пусть преобразование подобия второго рода задано парами точек (Л; A_c) и $(B;\ B_c)$. В § 4, п. 10 было отмечено, что одна из двойных прямых делит отрезок $Л_X$Л и $[B_X B\backslash$ в отношении k внутренним образом, другая — в отношении k внешним образом. Построив двойные прямые, найдем точку их пересечения. Она и будет искомой (рис. 39).

Построение образов точек при преобразовании подобия

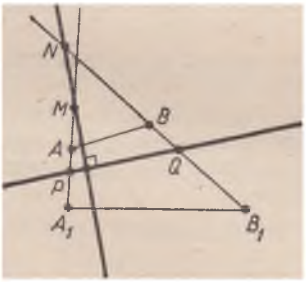


Рис. 38

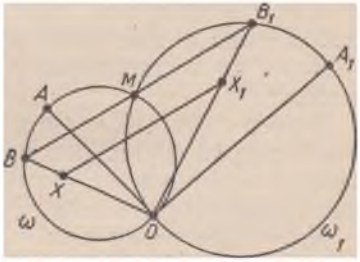


Рис. 39

В процессе отыскания способов построения центров преобразований подобия первого и второго рода получены такие свойства подобия и его центра, которые позволяют указать конструктивный прием построения образов точек при преобразовании подобия.

Пусть преобразование подобия первого рода задано центром О и парой соответственных точек (Л; $Л_x$), а X — произвольная точка плоскости (рис. 40). На отрезках OA и $OA_г$, как на диаметрах, строим окружности со и $со_{lt}$ М — вторая точка их пересечения.

Прямая OX пересекает ю в точке B. Точка $B_г$ £ (BM) П ®i есть образ точки B при заданном подобии. Через точку X строим прямую, параллельную (BB_x). Она пересекает (05_x) в искомой точке X_x.

С преобразованием подобия второго рода связаны пары гипербол. Если одна пара таких гипербол построена, то построение образов точек при подобии второго рода выполняется совершенно аналогично соответствующим построениям для подобий первого рода.

Свойства подобий в объеме, достаточном для решения широкого круга задач, рассмотрены. Далее мы остановимся еще на одном понятии, связанном с преобразованиями, и покажем (позднее), как оно применяется при решении задач.

§ 6. Общие пары соответственных точек двух преобразований

Для двух обратимых отображений одного множества на другое (или на себя), как для двух Множеств пар, может быть поставлен вопрос о нахождении общих пар. Пара (Л; $Л_x$) называется общей парой двух обратимых отображений / и <р одного множества на другое или на себя, если f (Л) = $A_г$ и ф (Л) = $Л_x$.

Множество общих пар двух обратимых отображений может быть пустым. Оно может содержать один элемент (отображения имеют единственную общую пару соответственных элементов). Возможен случай, когда обратимые отображения имеют две и даже бесконечное множество общих пар.

Как же выяснить, сколько общих пар имеют два обратимых отображения и как найти эти пары?

Ответ на поставленные вопросы можно получить из следующей теоремы.

Теорема. *Если f и ф — два обратимых отображения одного множества на другое (или на себя), то каждому неподвижному элементу композиции* $ф^{-1}$ о / *соответствует общая пара соответственных элементов данных отображений, и обратно.*

Доказательство. Пусть Л — неподвижный элемент композиции $ф^{-1}$ о /. Это значит, что

$$Ф^{-1} о / (Л) = Л.$$

Если /(Л) = В, то'из последнего равенства получим, что qr[1] *(В)* = Л, или ф (Л) = *В.* Таким образом, (Л; *В)* — общая пара отображений *f* и ф.

Доказательство обратного утверждения также очевидно.

Пусть / и ф — два обратимых отображения одного и того же множества *М* на себя или на другое множество *и N cz М.* Если / (АО = *Ni* и ф (АО == N_{l9} то *(N;* N_x*)* — общая пара соответственных подмножеств двух обратимых отображений одного множества *М* на другое или на себя.

Вопрос об общих парах соответственных подмножеств двух обратимых отображений решается с помощью теоремы, аналогичной предыдущей: *если f и* ф — *два обратимых отображения одного множества на другое (или на себя), то каждому двойному подмножеству композиции* $ф^{-1}$ *of соответствует общая пара соответственных подмножеств данных отображений, и обратно.*

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от предыдущего.

В частном случае, если / и ф — подобия плоскости, то каждой двойной прямой (или любой другой двойной фигуре) композиции $Ф^{-1}$ • / соответствует общая пара прямых (других фигур), соответственных при подобиях / и ф, и обратно.

Решение задач методом геометрических преобразований

Методика решения задач посредством геометрических преобразований находится в стадии становления. Общепризнанно, например, что методом преобразований можно решать не только задачи на построение, как считалось по традиции прежде, но и задачи ка доказательство, на нахождение множеств точек, а иногда и на вычисление. Не вызывает сомнений и то, что применение композиций преобразований-является мощным средством, повышающим эффективность и результативность рассматриваемого метода. Знакомство с общими свойствами обратимых отображений и специфическими свойствами отдельных видов преобразований в немалой степени обеспечивает успешность применения метода геометрических преобразований.

Однако приведенные выше методические приемы и выводы далеко не исчерпывают всей проблемы. Ведь важно также знать, какие задачи по содержанию целесообразно решать методом преобразований и какие нет; какие именно преобразования могут обеспечить решение той или иной-задачи; в какой мере желательно решать задачи путем сочетания метода геометрических ^преобразований и других методов (вычислений, дополнительных построений, координат и т. д.); наконец, какие теоретические сведения (в дополнение к тем, которые известны учащимся) могут содействовать более успешному поиску и обнаружению решения.

Более детальное проведение анализа содержания задачи, например выяснение, относится ли она к числу аффинных или метрических, выявление возможности решить успешно более общую задачу, а решение данной рассмотреть как специализацию обобщен-

ной задачи, целесообразность замены данной задачи обратной ей, с тем чтобы, обнаружив обратимые связи между взаимно-обратными задачами, найти сначала решение обратной задачи, а затем получить решение для исходной, — это те дополнительные методические рекомендации и мотивы, которые призваны обогатить арсенал поисковых средств в ходе решения задач.

Нельзя не сказать, что крайне важно увидеть преобразования **в** геометрических фигурах, уметь перевести задачу на язык геометрических преобразований, затем применить известные свойства преобразований и их композиций и, наконец, полученные выводы истолковать с точки зрения содержания поставленной задачи и получения искомого ответа на вопрос задачи.

Из сказанного видно, что, прежде чем приступить к решению содержательных геометрических задач методом геометрических преобразований, необходимо решать задачи специальные, задачи, тематика которых относится к самой теории преобразований, важно овладеть техникой прямых вычислений с композициями различных преобразований: осевых и центральных симметрий, поворотов, переносов, гомотетий, преобразований подобия первого и второго рода.

После того как действия с преобразованиями усвоены, целесообразно решать смешанные задачи, в условии которых содержится геометрический факт в сочетании с конкретным преобразованием. И уже на базе этих умений можно надеяться, что решающий задачу, в условии которой не содержится геометрического преобразования в явной форме, найдет верный план ее решения, основанный на использовании как теоретических сведений, так и выработанных практических навыков в обращении с конкретными преобразованиями.

Нет надобности особо останавливаться на необходимости решать задачи на применение геометрических преобразований в определенной системе— с постепенным нарастанием трудности, разнообразия применяемых теоретических средств, общности содержания задачи. Однако ниже мы не будем строго придерживаться этих общепринятых методических требований, так как такая система и последовательность потребовали бы слишком много места и, главное, подготовленный читатель эти известные дидактические требования учтет при практическом использовании материала статьи. Мы приведем решения лишь некоторых из наиболее характерных задач. При этом будем предварительно указывать применяемое теоретическое положение.

1. Точка и ее образ при гомотетии лежат на одной прямой с центром гомотетии.

Задача 1. *Доказать, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, и середины оснований принадлежат одной прямой.*

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$, точки P и Q — середины оснований AB и CD соответственно, (AD) |") (BC) — M, $IBD]$ П $[AC\ = N$ (рис. 40).

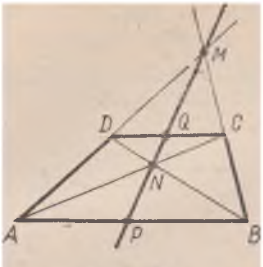
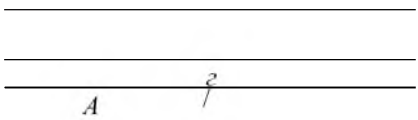


Рис. 40



Так как отрезки AB и CD параллельны и не конгруэнтны, то существует гомотетия H_{ν}, при которой точки Л и В отображаются на D и C соответственно, а значит, $[AB\backslash$ отображается на $\backslash DC\backslash$. Точка P, середина отрезка AB, отображается при гомотетии Ям на середину отрезка DC, т. е. на точку Q. Но тогда M £ (PQ).

Аналогично существует гомотетия $Hы$, отображающая точки Л и B на C и D соответственно. При гомотетии HN точка P также отображается на Q. Следовательно, и точка N принадлежит прямой PQ, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 2. *Через вершины трапеции проведены прямые, параллельные ее диагоналям. Доказать, что одна из диагоналей образовавшегося параллелограмма параллельна основаниям трапеции, а вторая диагональ проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.*

Р е ш е н и е. Дана трапеция $ABCD$, [ЛС] и [BD] — ее диагонали, $MNPQ$ — образовавшийся в результате построений параллелограмм (рис. 41).

Так как отрезки $A\ B$ и CD параллельны, то существует гомотетия $H\backslash$, отображающая $[AB]$ на $[CD]$, $K = \backslash AC]$ f) [B£>], CD — = а AB. При гомотетии Я к прямая MN, проходящая через точку Л, отображается на прямую, проходящую через точку C и параллельную прямой MN, т. е. на прямую PQ- Аналогично прямая NP отображается при Я$*на QM. Тогда Я“- $(N) = Q$, откуда следует, что K € IjVQ].

Имеем:

$$H\%\,(Л) = C,\ H\%\,(B) = D,\ H\%\ (AO = Q,$$

или

$$|\,QC\,|:|\,AN\,| = |\,QD\,|:|\,BN\,|.$$

Учитывая, что |ЛЯ| = $\backslash CP\backslash$ и |£W| = $\backslash DM\backslash$, находим:

$$|\,QC\,|:|\,CP\,| = |\,QD\,|:|\,DM\,|.$$

Последнее означает, что прямая MP параллельна прямой CD.

2. Точка касания двух окружностей есть центр гомотетии, отображающей одну окружность на другую.

Рис. 42 **Рис. 43**

З а д а ч а 3. *Доказать, что если через точку касания двух окружностей провести произвольную прямую, то она пересекает окружности вторично в таких точках, что радиусы, проведенные в эти точки у параллельны.*

Р е ш е н и е. Пусть M — точка касания окружностей со (О; *г)* и $со_х$ *(0 г; /*)*, а — секущая, пересекающая окружности вторично в точках A и $A_г$ (рис. 42). Требуется доказать, что $[0_X Л_г] \parallel [0A\backslash$.

Рассмотрим гомотетию $H^{(0'м^{x})}$. При этой гомотетии прямая *а* отображается на себя, так как проходит через центр, а окружность со — на сох. Тогда точка *А,* принадлежащая пересечению *а* и со, отображается на точку, принадлежащую пересечению *а* и со!, но отличную от *М,* значит, на точку A_x.

Так как $[O_г A\hat{}\backslash$ — образ отрезка $O\ A$ при гомотетии, то эти отрезки параллельны.

З а д а ч а 4. *Две окружности касаются внутренним образом в точке А. Секущая а пересекает окружности в точках М, N, Р, Q, расположенных последовательно. Доказать, что MAN = PAQ* (рис. 43).

Р е ш е н и е. Рассмотрим гомотетию H_A, отображающую окружность со на окружность Точки N *и* P отобразятся при этой гомотетии на точки $N_{\pm}$ и Pi, N_t £ со fl (AN), P_x £ со П (ЛР). Тогда прямая Л^Рх как образ прямой NP при гомотетии параллельна ей. В силу параллельности прямых MQ и $N_x Pi$ дуги MN_X и QP_X конгруэнтны, а значит, конгруэнтны соответствующие нм вписанные углы MAN_X и QAP_U т. е. MAN = ф4Р.

3. Если композиция двух гомотетий есть гомотетия, то центры всех трех гомотетий принадлежат одной прямой.

З а д а ч а 5. *Даны три параллельных, попарно не конгруэнтных отрезка MN, PQ и RS, причем лучи MN,* PQ *и RS сонаправлены. Доказать, что три точки пересечения пар прямых MP и NQ, MR и NS,* Pi? и *QS принадлежат одной прямой; точки пересечения пар прямых MQ и NP,* Qi? & PS, M/? « iVS *также принадлежат одной прямой* (рисг 44).

Р е ш е н и е. Обозначим точки пересечения*: X = (MP)* П *(NQ), Y ^ (MR)* П *(NS), Z = (PR)* П (QS).

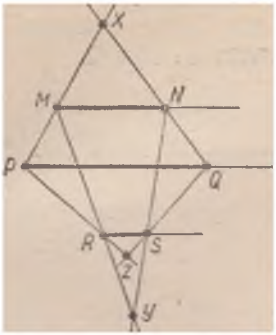


Рис. 44

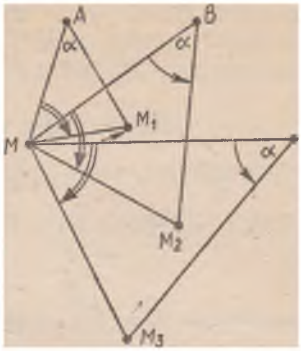


Рис. 45

Нетрудно заметить, что композиция гомотетий $H^{(M}x^{P)}$ и $H^{(P,}z^{R)}$ есть гомотетия $H^{(X}y^{R)}$. Но если композиция двух гомотетий есть гомотетия, то центры всех трех гомотетий принадлежат одной прямой, т. е. $Y \in (ZX)$.

Аналогично решается и вторая часть задачи.

4. Композиция гомотетии и перемещения есть преобразование подобия.

З а д а ч а 6. *Точка М отображается при поворотах R R ^ , R% вокруг трех различных центров А, В и С на угол* а:

$$M_c = /\text{tf}(\text{M}),\ M_2 = R\%\ Щ_9\ M_3 = R\%\ (M).$$

Доказать, что точки M_{1Y} M_2, M_3 *принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда точки* Л, В, С *принадлежат одной прямой.*

Р е ш е н и е . Точка M_c есть образ точки M при повороте/?®.

В то же время — образ точки Л при композиции поворота $R_M^{-90°}$ и гомотетии $H_M^{2\sin\cdot 2}$, т. е. при преобразовании подобия с центром M, углом поворота —— 90° и коэффициентом k = 2зт~(рис. 45).

Аналогично и точки M_2 и /$И_3$ являются образами точек B и C соответственно при том же преобразовании. Но образы точек при подобии принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда точки принадлежат одной прямой.

З а д а ч а 7. *В окружность с центром О вписан четырехугольник А BCD] поворот* /?g, ср *ф* 180°, *отображает его на четырехугольник* $Л_1B_1C_10_1$. *Доказать, что пары прямых АВ и* A_cB_{19} *ВС и* B_cC_b *CD и* C_xD_{1y} *DA и* D_XA_X *пересекаются в вершинах параллелограмма.*

Р е ш е н и е . Пусть *(АВ)* f| (^А) = М, *(ВС)* П (^i^i) = *N*, *(CD)* П *(CiDJ* = Р, *(DA)* П 0iJIi) = *Q* (рис. 46). Ортогональные

проекции E, G, H, F точки O на прямые, содержащие стороны четырехугольника $ABCD$, являются вершинами параллелограмма. При повороте точка E отображается на точку S. Имеем:

$$|OE| = |OS|, OEM = OSM = 90°, £OS=ср,$$

откуда следует, что в прямоугольном треугольнике EOM EOM— ~

и $\backslash OM| = \backslash OE|$ Тогда точка M есть образ точки E при

композиции Ho^{k} ⊽ ^{2} R о» где k

cos:

Аналогично можно показать, что точки N, P и Q являются образами точек G, H и F соответственно при той же композиции, т. е. при преобразовании подобия. Отсюда следует, что четырехугольник $MNPQ$ — образ параллелограмма при преобразовании подобия и, следовательно, также является параллелограммом.

5. Угол между любым лучом и его образом при преобразовании подобия первого рода — величина постоянная.

З а д а ч а 8. *Дан треугольник ABC, C = 90°, $[CD]$ — высота. Доказать, что медианы AM и CN в треугольниках ADC и DBC перпендикулярны.*

Р е ш е н и е . Треугольник CD B отображается на треугольник ADC при композиции поворота $R^{9}£°$ и гомотетии H^{k}_{D}, где k = $\frac{|ЛС|}{CB|}$ т. е. при преобразовании подобия первого рода с углом поворота 90° (рис. 47). При этом подобии точки C и N отображаются на точки A и M, а значит, [C7V] — на отрезок AM Поэтому отрезки CN и AM перпендикулярны.

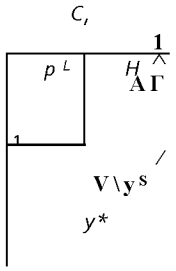


Рис. 46

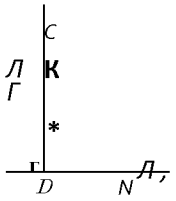


Рис. 47

З а д а ч а 9 . *Даны два одинаково ориентированных квадрата O A BC и OA_xB_xCi. Найти угол между лучами AA_X и BB_X.*

Р е ш е н и е . Луч AA_X отображается на луч BB_X при композиции поворота $^{r)45°}$ o и гомотетии H ^{rrViT} о » т. е. при преобразовании подобия первого рода с углом поворота 45° (рис. 48). А значит, угол между лучами AA_X и BB_X равен углу поворота преобразования подобия, т. е. 45°.

6. Связь подобия первого рода с двумя пересекающимися окружностями.

Пользуясь теоремами 1 и 2, доказанными в § 5, легко установить следующий факт. Если даны две пересекающиеся окружно-

Рис. 48 **Рис. 49**

сти, то одну из точек пересечения можно принять за центр преобразования подобия первого рода, отображающего одну окружность на другую. Тогда прямые, проходящие через вторую точку, пересекают данные окружности в парах соответственных при этом подобии точек.

Задача 10. *Окружности* со *и* $со_x$ *пересекаются в двух точках. Прямая, проходящая через одну из точек пересечения, пересекает окружности вторично в точках* A *и* A_x. *Доказать, что величина угла между касательными, проведенными к окружностям в точках* A *и* A_x *соответственно, не зависит от выбора секущей.*

Решение. Пусть со П $со_г$ = {S; M} (рис. 49). Рассмотрим преобразование подобия первого рода с центром S, отображающее со на *щ*. Тогда любая прямая *а*, проходящая через точку M, пересекает окружности в парах соответственных точек A и A_x. Касательная, проведенная к окружности $со_x$ в точке $Л_г$, есть образ касательной, проведенной к окружности со в точке A. Но угол между лучом и его образом при подобии первого рода — величина

постоянная. В данном случае она равна OSO_x, где O *и* O_x — центры окружностей со и $со_x$. Следовательно, угол между касательными

равен OSO_x или 180° — OSO_x.

Задача 11. *Даны два одинаково ориентированных квадрата* $OABC$ *и* $OA_xB_xC_x$. *Доказать, что прямые* AA_X, BB_X *и* CC_X *пересекаются в одной точке.*

Решение. Так как квадраты $OABC$ и $OA_xB_xC_x$ одинаково ориентированы, то существует преобразование подобия первого рода, отображающее квадрат $OABC$ на квадрат ОЛ^С^ При этом окружность, описанная около квадрата $OABC$, отображается на окружность, описанную около квадрата $OA_xB_xC_x$ (рис. 50). Центр O подобия совпадает с одной из точек пересечения окружностей. Тогда прямые, проходящие через пары соответственных точек Л и A_x, B и B_b C и Сх, проходят через вторую точку пересечения окружностей. Если квадраты $OABC$ и $ОЛ_1В_1С_1$ гомотетичны, то окружности касаются и искомая точка совпадает с точкой O.

Рис. 50 **Рис. 51**

З а д а ч а 1 2 . *Даны две различные точки A и B. Точка M принадлежит прямой AB. На отрезках AM и MB построены квадраты в одной полуплоскости с границей (AB). Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся вторично в точке N. Найти множество точек N при различном выборе точек M на прямой AB.*

Р е ш е н и е . Точка M либо принадлежит отрезку AB, либо не принадлежит ему. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) а) Пусть -M $ $[AB]$, $AMCD$ и $MBPQ$ — квадраты,около которых описаны окружности со и <»х> о П — {М, N} (рис. 51). Любая из точек M н N может быть принята за центр преобразования подобия первого рода, отображающего окружность со на сох-

Рассмотрим преобразование Пд,. При нем A-+B, M-+P, C -+Q, D -»■ M, т. е. (AM) -> (BP). Так как по условию прямые AM и BP перпендикулярны, то угол поворота рассматриваемого подобия

равен 90° и ANB = 90°. Значит, точка N принадлежит окружности 6 с диаметром AB.

б) Пусть N_x € б. Тогда AN_XB = 90°. Построим на отрезке AB точку M_x так, что |AM_X \: | MxB|= |AN_X|: | |. Квадрат AM^D^ отображается на квадрат BPxQi^i при преобразовании подобия с центром N_{lt} углом 90° и коэффициентом k =| M_VB \ : \MxA\. Значит, окружности, описанные около этих квадратов, пройдут через точку N_x — центр преобразования подобия.

2) Если M £ (AB), но M i $[AB]$, то окружности о и сох касаются, т. е. N — M (рис. 52).

Таким образом, искомое множество точек есть объединение окружности с диаметром A B и дополнения отрезка A B до прямой, исключая точки A и B.

, 7. Два преобразования подобия первого рода с общим центром.

Пусть при преобразовании подобия первого рода с центром M точки A и C отображаются на точки B и D соответственно, тогда

$$MB = CMD \text{ и } \backslash MB\backslash\text{-}.\ \backslash MA\ \backslash \text{ — } |\text{АШ}|:|\text{Л1С}|,$$

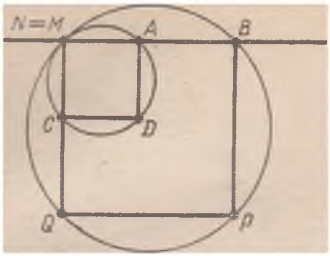


Рис. 52

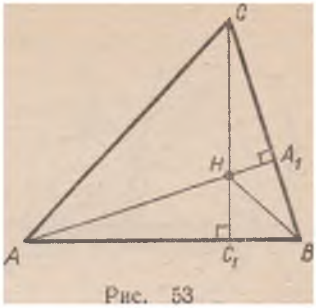


Рис. 53

а следовательно, справедливы равенства

$$ШС = ВШ) = ф \text{ и } |MC|:|MA| = |MD|:|MS| = k.$$

Но они означают, что точки *С* и *D* есть образы точек *А и В* соответственно при композиции поворота *Rm* и гомотетии *Нм*, т. е. при преобразовании подобия первого рода с центром М, углом поворота ф и коэффициентом *k*.

Покажем применение этого свойства при решении задач.

З а д а ч а 1 3 . *Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

Р е ш е н и е . Дан треугольник *ABC*, (AA_c) и (CC_X) — прямые, содержащие его высоты, (AA_c) f] (CCi) — *H* (рис. 53).

Треугольники CHA_c и ABA_c подобны (по двум углам) и одинаково ориентированы. Поэтому существует преобразование подобия первого рода, при котором A_c -»- A_c, *H* -> *B*, *С А*. Тогда существует и преобразование подобия, при котором A_1-^A_1, *С, В* -»> *А*. При этом подобии лучи A_cH и //В отображаются на лучи A_cC и *С А* соответственно. Но прямые A_cH и A_XC перпендикулярны. Значит, и прямые *НВ* и *С А* перпендикулярны, т. е. третья высота треугольника проходит через точку Я.

З а д а ч а 1 4 . *На плоскости даны четыре прямые, пересекающиеся попарно в шести различных точках.Доказать, что четыре окружности, каждая из которых проходит через три из полученных точек, пересекаются в одной точке.*

Р е ш е н и е . Пусть *А, В, С, D, М и N* — точки пересечения данных прямых (рис. 54). Существует единственное преобразование подобия первого рода, при котором точки *А и В* отображаются соответственно на точки D и^; центр *О* этого подобия есть вторая точка пересечения окружностей *ABN* и *DCN*. Имеем: О -> О, *А*-+*D*, *В* *->• *С*. Тогда существует и преобразование подобия первого рода, при котором О -> *О*, *А* -*■ *В*, *D* -> С. Центр О этого преобразования есть вторая точка пересечения окружностей *ADM* и *BCM*. Таким образом, все четыре окружности проходят через центр *О* рассматриваемых преобразований подобия.

Рис. 54 **Рис. 55**

8. Преобразование подобия второго рода имеет две взаимно перпендикулярные двойные прямые, проходящие через центр подобия. 4 .

Если (Л; $Л_x$) —пара точек, соответственных при преобразовании подобия второго рода П*о.т,* то одна из двойных прямых делит отрезок A_XA (считая от точки $Л_x$) в отношении k внутренним образом, а другая — в том же отношении внешним образом.

Одна задача на применение этого свойства'была решена в § 4 (см. п. 10, задача 3).

З а д а ч з 1 5 . *В треугольнике ABC величина угла C равна 6 0 ° и $[AA_X]$, $[BB_X]$ — высоты. Биссектриса угла C пересекает отрезки AB и A_XB_X в точках D и D_x. Найти отношение k—$\backslash CD_x$ | : : $\backslash CD$ |.*

Р е ш е н и е . В треугольниках ACA_X и BCB_X имеем: $\backslash A_XC$ | = = 1 $\backslash AC\backslash$, |ВД =$\backslash\backslash BC\backslash$ (рис. 55).

Рассмотрим преобразование подобия второго рода с центром С, двойной прямой CD и коэффициентом у. При этом преобразовании A -> A_x, B B_x, $[AB\backslash$ -> $[A_XB_X]$, (CD)-> (CD_X). Следовательно, точка $D = (CD)$ f| $[AB]$ отображается на точку D_x — (CD_X) f) f) $[A_XB_X\backslash$. А значит, $\backslash CD_X\backslash$: $\backslash CD\backslash$ = .

З а д а ч а 1 6 . *Даны два равносторонних противоположно ориентированных треугольника ABC и $A_XB_XC_X$. Отрезки AA_X, BB_X и $CC_X\backslash$ AB_X, BC_X, CA_X, AC_X, BA_X, CB_X разделены в отношении k = $\backslash AB\backslash$: $\backslash A_XB_X$| внутренним образом (считая от первых точек). Доказать, что полученные тройки точек деления принадлежат соответственно трем прямым, которые пересекаются в одной точке.*

Р е ш е н и е . Поскольку данные треугольники равносторонние и противоположно ориентированы, то существуют /ри преобразования подобия второго рода, при которых треугольник $A_XB_XC_X$ отображается на треугольник ABC. Точки A_x, B_x, C_x отображаются при одном преобразовании соответственно на Л,

B, C, при другом — на B, C, A, при третьем — на C, A, B. Коэффициенты этих подобий равны k. При каждом из подобий тройки точек деления принадлежат одной из двойных прямых подобия. Каждой из этих прямых принадлежит и точка M, которая делит в отношении k внутренним образом отрезок OO_x, где O и O_x — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $AxBxC_x$ соответственно. Таким образом, тройки точек принадлежат прямым, проходящим через точку M.

9. Композиция преобразований подобия есть преобразование подобия.

Композиция двух преобразований подобия первого рода есть преобразование подобия первого рода; его коэффициент равен произведению коэффициентов данных подобий, а угол поворота — сумме углов поворота данных подобий, т. е. П*^ о П'ф= Пйф+*.

Задача 17. *На сторонах треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP так, что AMB* — 150°, $\backslash AM\backslash = \backslash MB\backslash$, $CAP = CBN = 30°$ и ACP - $BOJ = 45°$. *Доказать, что треугольник MNP равносторонний* (рис. 56).

Решение. Рассмотрим композицию / = Пд^ о $_0$ *Rfa,*

где ф = 150°, ф = 105°, k = ~=, n — У2. Коэффициенты и углы поворота преобразований подобия в композиции определены

подобием треугольников PAC и NBC: APC — CNB = 105°,

$\backslash PC\backslash : \backslash PA\backslash$ — sin 30°: sin 45° = -,L, |tfB|: |iVC| = |/2.
$\sqrt{2}$

Складывая углы поворота и перемножая коэффициенты этих подобий, находим, что f — перемещение первого рода с углом поворота 360° (0°), т. е. перенос. Но $f(B)$ — B, и поэтому / — тождественное преобразование.

Построим образ точки M при композиции / (рис. 57):

$Rl(M) = M$, (M) = D, $TUf^*(D) = M$

(так как / — тождественное преобразование, то / (Л1) = M).

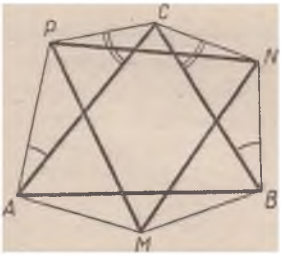


Рис. 56

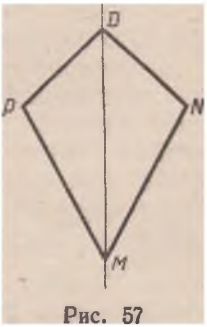


Рис. 57

Если $\backslash PD\backslash$ — m, а $\backslash DN\backslash = I$, то $\backslash PM\backslash = mУ2$, $\backslash MN\backslash = /\ У\ 2$. Треугольники DPM и DNM подобны друг другу и треугольнику

CPA. Тогда $PDM = NDM = 45°$ и $PMD = NMD = 30°$, $PMN = 60°$. При симметрии с осью (DM) лучи MP и DP отображаются соответственно на лучи MN и DN, и поэтому точка P отображается на точку N. Следовательно, $\backslash MP\backslash$ — $\backslash MN\backslash$ и треугольник MNP равносторонний.

Решение показывает, что величины 150°, 30°, 45° не столь существенны. Важно выполнение следующих условий:

а) треугольник ABM равнобедренный; ‘ -

б) треугольники ACP и BCN подобны;

в) сумма величин углов при вершинах M, P и N в построенных треугольниках равна 360°.

При этих условиях в результате приведенного решения найдем, что $\backslash MP\backslash = \backslash MN\backslash$ и $PMN = 2\ PAC$.

10. Общие пары соответственных точек двух преобразований подобия.

Понятие общих пар соответственных точек двух преобразований (см. § 6) часто применяется в задачах на построение. Метод общих пар по своей идее аналогичен методу множеств точек в решении задач на построение.

* З а д а ч а 18. *Даны прямая I и точки A, B, C, D вне ее, причем (AB)* П *I = M, (CD)* f] *I — N и M Ф N. Построить на прямой I точки P и Q так, что (AP)* ‖ *(BQ) и (CP)* П *(DQ).*

А н а л и з. Пусть точки P и Q построены (рис. 58). Точка Q есть образ точки P при гомотетии $Hм\ ''^{B)}$ (имеющей центр в точке M и отображающей точку Л на В). В то же время Q — образ точки P при гомотетии $H(n'^{D)}$. Следовательно, $(P\backslash Q)$ — общая пара точек гомотетий $Hм^{B)}$ и ЯдГ °\ т. е. $H(м^{B)}(P) = Q$ и $Hn'^{D)}(P) = Q$. Но тогда P — неподвижная точка композиции я!у:°Ht- ^B> (так как $(H\&$ $= HT$ °>).,

П о с т р о е н и е. 1. Строим образ точки'S при гомотетии $Htf^{;C)}$: $^{C)}$ (5) $= B_г$ (рис. 59).

, 2. Строим точку $P = 1[\backslash(AB_г)$.

3. Через точку B проводим прямую, параллельную прямой AP. Она пересекает I в точке Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о и и с с л е д о в а н и е. Композиция двух гомотетий с различными центрами есть либо гомотетия, либо перенос, отличные от тождественного преобразования. В первом случае существует единственная неподвижная точка — центр. Она является точкой пересечения двойных прямых. П р я м а я I отображается на себя при каждой из гомотетий $Hit'^{B)}$ и HN' °\ следовательно, и при их композиции. По построению $B_г = {}^{C)}°H(м^{B)}(A)$. Значит, (Л5^ также двойная п р я м а я рассматриваемой композиции. Поскольку прямые I и $AB_г$ пересе-

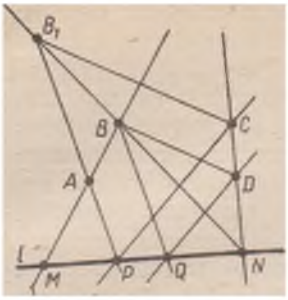


Рис. 58

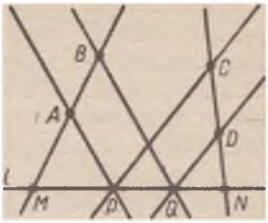


Рис. 59

каются, то композиция $H^{(M;\ C)} \circ H^{(M;\ B)}$ есть гомотетия, Р — ее центр, т. е. $H^{(P;\ C)} \circ H^{(M;\ B)}(P) = P$. В этом случае задача имеет единственное решение.

Если прямые l и AB_2 параллельны, т. е. композиция $H^{(M;\ C)} \circ H^{(M;\ B)}$ — перенос, то задача не имеет решения.

Замечания. 1. Если $M = N$, то композиция $H^{(M;\ C)} \circ H^{(M;\ B)}$ может быть и тождественным преобразованием $(B_1 \sim A)$. В этом случае задача имеет бесконечное множество решений.

2. Если только одна из прямых AB и CD параллельна l, то Р — неподвижная точка композиции гомотетии и переноса. Но эта композиция есть гомотетия. Следовательно, задача имеет единственное решение.

3. Если обе прямые параллельны l, то Р -г- неподвижная точка композиции двух переносов, т. е. либо не существует, либо таких точек, бесконечное множество.

Как видно, решение задач с применением понятия общей пары соответственных точек двух преобразований основано на умении выяснять, что представляет собой композиция двух частных видов преобразований подобия, на умении строить неподвижную точку конкретного преобразования подобия.

Изложенные выше элементы теории преобразования подобия плоскости предназначены для учителя независимо от его опыта работы в школе. Ряд вопросов названной теории практически не освещен в известной или доступной учебной и методической литературе на том уровне, на каком это требуется в современных условиях учителю для повышения своего научно-методического уровня, для получения ответа на интересующие его вопросы по преобразованиям подобия плоскости.

Рассмотренные выше понятия аксиоматического характера, детальные доказательства отдельных «очевидных» теорем, приведенные нестандартные задачи с их подробным решением могут служить лишь отправным пунктом для всесторонней методической разработки всей темы в целом. Но такую разработку можно

начинать лишь тогда, когда определена теоретическая база изучаемого вопроса, намечены важнейшие направления его изучения с учетом запросов учителя и поставленных целей преподавания.

Как видно, теория преобразований подобия предполагает глубокие знания теории перемещений, владение аксиоматическим методом в пределах школьного курса геометрии, умение оперировать не только с отдельными преобразованиями, но и с их композициями, применять при решении задач признаки отдельных видов подобий.

Можно рекомендовать учителю использовать материал статьи для постановки факультативного курса по теории геометрических преобразований, для проведения отдельных внеклассных занятий по темам: 1) «Гомотетия, ее свойства и признаки», 2) «Неподвижная точка преобразования подобия и ее построение», 3) «Преобразование подобия второго рода и его применение при решении задач», 4) «Композиции преобразований подобия в задачах» и др.

По каждому из названных выше направлений желательно проводить дополнительные методические исследования, проверять возможность использования введенных понятий в школьных условиях, разрабатывать специальные циклы учебных задач в определенной системе.

Полноценные методические исследования можно проводить, на наш взгляд, на основе очерченной и достаточно полной (в пределах действующих программ) математической теории. В этих исследованиях, по-видимому, особое внимание следует уделить разработке методики применения теории к решению задач.

Дополнительные сведения о преобразованиях подобия и их * применении заинтересованный читатель найдет в учебно-методической литературе, список которой приложен ниже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. М., Учпедгиз, 1957, ч. I.
2. Болтянский В, Г., Яглом И. М. Преобразования. Векторы. М., Просвещение, 1964.
3. Гусев В. А., Маслова Г. Г., Скопец З. А., Черкасов Р. С. Сборник задач и упражнений по геометрии для 6—8 классов. Пособие для учителей. М., Педагогика, 1976.
4. Кокстер Г. С. Введение в геометрию. М., Наука, 1966.
5. Кузнецова Л. И., Скопец З. А. Метод подобия при решении планиметрических задач. — Математика в школе, 1977, № 6.
6. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. Изд-во МГУ, 1961.
7. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. М. — Л., ГИТТЛ, 1948, ч. 1.
8. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1973.
9. Скопец З. А. Построение неподвижных точек аффинного преобразования. — Математика в школе, 1972, № 3.
10. Яглом И. М. Геометрические преобразования. М., ГИТТЛ, 1955, т. 1.
11. Яглом И. М., Атанасян Л. С. Геометрические преобразования. Энциклопедия элементарной математики, М., Физматгиз, 1963, кн. IV.