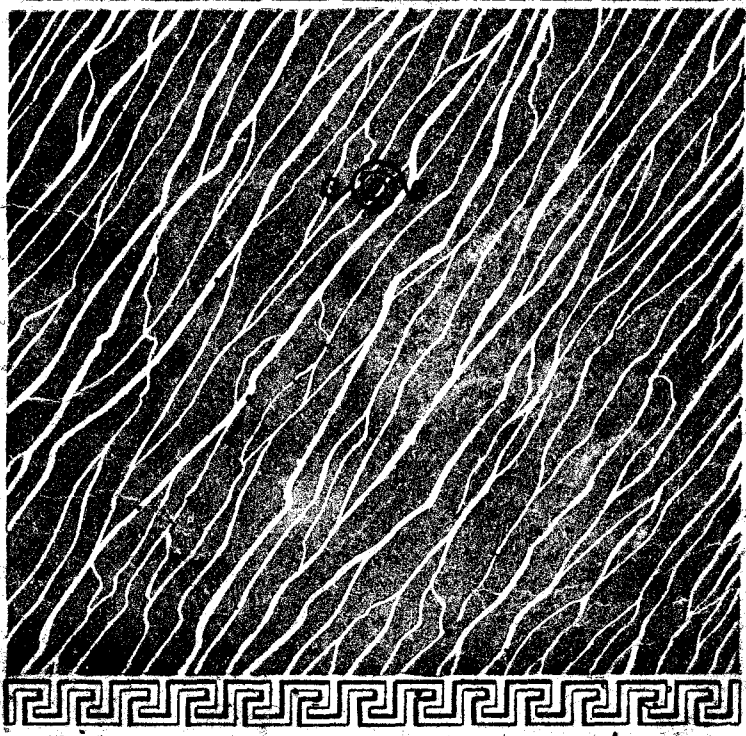
АРХИМЕД



В. Ф. КАГАН

АРХИМЕД

КРАТКИЙ ОЧЕРК
О ЖИЗНИ
И ТВОРЧЕСТВЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1949 · ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несколько лет тому назад я предполагал прочесть публичную лекцию об Архимеде и его эпохе. Хотя я составил текст предполагаемой лекции, она по случайным причинам не состоялась. Мне кажется, однако, полезным теперь её в некоторой обработке опубликовать.

Имя Архимеда давно употребляется как синоним великого математика; но мало кто имеет более или менее ясное представление о том, чем это вызвано. Настоящая брошюра имеет целью осведомить об этом широкий круг читателей, имеющих самое общее математическое образование. Она не только не претендует на какое-либо значение, выходящее за эти пределы, но даже далеко не исчерпывает творчества Архимеда. При всём том, я полагаю, она даёт представление о гении человека, являющегося предшественником великих творцов современной математики и механики. Две тысячи лет прошло с тех пор, как он окончил жизнь, пронзённый мечом римского солдата, а его замысел — объединить теоретические исследования в области математики с их практическими приложениями — не только не забыт, но завоёвывает всё большее признание и в наши дни имеет руководящее значение для творчества всех передовых учёных.

В. Каган

«Дай мне, где стать, и я сдвину Землю».

Так, по преданию, характеризовал Архимед свои открытия в области механики.

В 75 г. до н. э. Марк Туллий Цицерон — известный римский политический деятель, оратор и писатель-философ — был сенатом назначен квестором в Сицилию. Должность эта в ту пору требовала много внимания и труда, как по политическим, так и по экономическим причинам; время было беспокойное. При всём том, среди сложных забот Цицерон вскоре после прибытия в Сиракузы занялся разысканием могилы Архимеда. Вот как он сам об этом рассказывает в своих «Тускуланских беседах» (кн. V, рубр. 23).

«Мне, квестору, удалось разыскать эту могилу, заросшую сорными травами и репейниками; сиракузяне не только её не знали, но даже отрицали её существование. Мне помнились некоторые стихи, о которых я знал, что они написаны на его памятнике; мне было также известно, что вверху его гробницы были выгравированы шар и цилиндр. Внимательно всматриваясь — у Ахродийских ворот находится большое число могил, — я заметил небольшую колонну, немного выступающую из кустов репейника; на ней был виден рисунок шара и цилиндра. Я сказал сиракузянам — меня сопровождали первые лица города, — что это, повидимому, могила, которую я ищу. Туда были посланы люди с серпами, которые очистили и раскрыли это место. Когда доступ стал свободен, мы подошли к подножию памятника. Обнаружилась стихотворная надпись, последняя часть которой — примерно половина — выветрилась. Таким образом, в одном из самых благородных

государств Эллады, некогда наиболее знаменитом по своей культуре, остался бы неизвестным памятник его гражданину, отличавшемуся наиболее глубоким умом, если бы его им не открыл муж из Арпинума» *).

Что же побудило Цицерона в такое трудное время с такой настойчивостью искать эту могилу?

Человек глубокого и разностороннего образования, Цицерон благоговел перед греческими философами и учёными (эти два понятия в ту эпоху были почти равнозначащими). В поисках того, что̀ красит человека, Цицерон делает много сопоставлений: он повествует о мрачных годах сиракузского тирана Дионисия, о его диких жестокостях, о его разнузданной и преступной жизни, которую тиран должен был бдительно охранять из страха справедливого возмездия. Рассказав об этом, Цицерон продолжает: «Я хочу теперь извлечь из забвения мужа из того же города, человека бедного, гораздо более низкого положения, жившего на много лет позже **), — Архимеда. Какой человек на всём свете, находившийся в некотором общении с музами, т. е. обладавший гуманным и благородным образованием, не предпочёл бы быть этим математиком, нежели тем самовластным тираном? Сопоставляя их жизнь и деяния, видим, что один был поглощён изысканиями и исследованиями числовых соотношений, радостями изобретательных устремлений — этим наилучшим наслаждением души, — другой жил среди убийств и собственных злодеяний, днём и ночью в страхе за свою жизнь».

Но в таком тоне пишет об Архимеде не только Цицерон; трудно найти древнего историка, который, упоминая об Архимеде, не выражал бы благоговейного отношения к памяти об этом замечательном человеке. Чем же вызвано такое всеобщее уважение, такое признание, которым не пользовались другие математики древности, даже наиболее выдающиеся из них — Пифагор, Евклид, Аполлоний, Эратосфен и другие? Об Архимеде рассказывают почти все древние историки Греции — Полибий, Плутарх,

---

*) Цицерон родился в поместье отца близ Арпинума в Новом Лациуме.

**) То-есть после Дионисия.

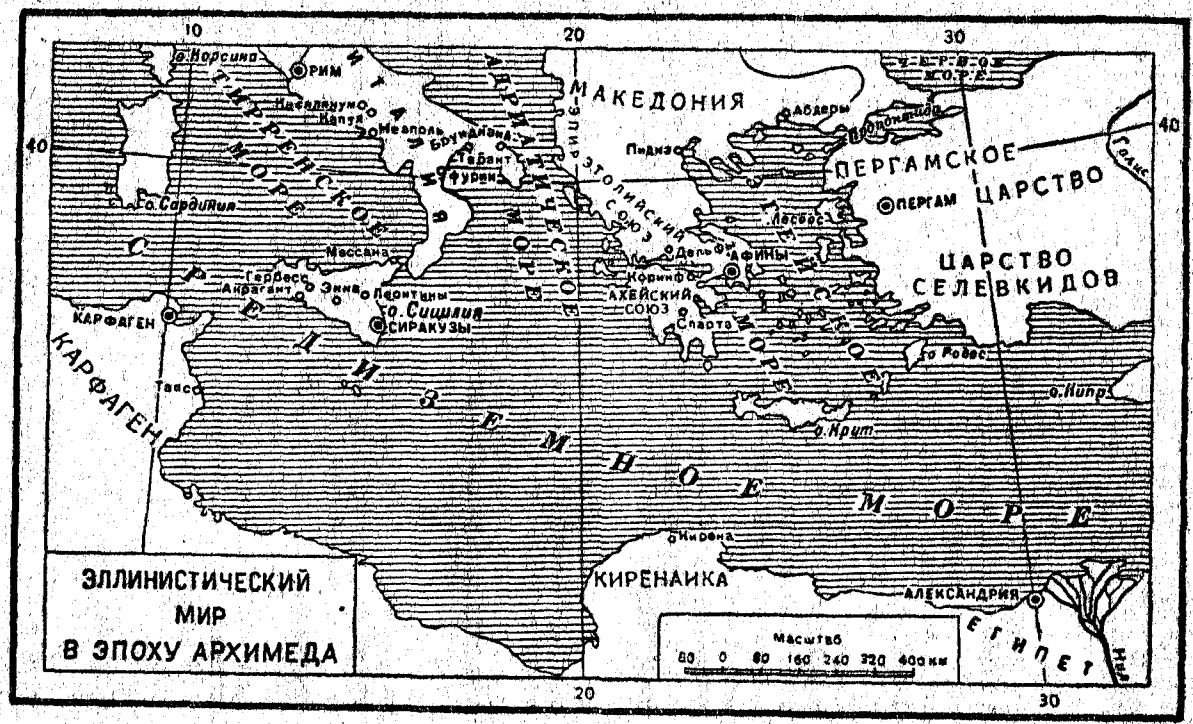
Тит Ливий, историки науки — Диодор, Папп, Прокл, даже в XII веке нашей эры Тцетцес (Tzetzes), но для всех них Архимед — только гениальный защитник Сиракуз.

Культурные государства античного мира были расположены, главным образом, по берегам Средиземного моря (см. карту на стр. 8 *). Господство на Средиземном море означало господство над Европой, Африкой, Малой Азией. Поэтому к такому господству всегда стремились наиболее могущественные государства древнего мира. Такую цель в различное время преследовали греки, карфагеняне, римляне, упорно боровшиеся между собою за преобладание на Средиземном море. Наибольшего напряжения эта борьба достигла в третьем столетии до нашей эры. К этому времени Греция, раздираемая междуусобными войнами, можно сказать, выбыла из строя; так называемая Великая Греция — греческие колонии на юге Италии — была подчинена Риму; борьба шла между Карфагеном и Римом; вокруг этих государств группировались в этой борьбе другие народы. То были так называемые Пунические войны, которые с небольшими промежутками продолжались более ста лет (264—146 гг. до н. э.).

Особенно заманчивым было завоевание Сицилии, этой житницы средиземноморского населения. Остров состоял из ряда небольших государств, одни из которых имели республиканское устройство, другие управлялись сменявшими друг друга тиранами. Наибольшее значение имели Сиракузы, которые в известной мере являлись центром средиземноморской торговли. Карфаген и Рим стремились овладеть той частью Сицилии, где находились Сиракузы; на этой почве и возгорелась первая Пуническая война (264—241 гг. до н. э.), которая шла с переменным успехом. Всё же римляне вышли из этой войны победителями. Сицилия стала римской провинцией. Но не сладка была жизнь под пятою Рима; когда через 20 лет (в 218 г. до н. э.) карфагеняне под предводительством Ганнибала возобновили войну, Сиракузы, руководимые

---

*) Карта заимствована из прекрасной, обстоятельной книги С. Я. Лурье «Архимед» (изд. АН СССР, 1945 г.).


ЭЛЛИНИСТИЧЕСКИЙ МИР В ЭПОХУ АРХИМЕДА
10
20
30
40
о. Корсика
РИМ
ИТАЛИЯ
Тарентское море
Неаполь
Брундизиум
Тарент
Фурии
Адриатическое море
МАКЕДОНИЯ
Пидна
Этолийский союз
Абдеры
Фракия
ПЕРГАМСКОЕ ЦАРСТВО
ПЕРГАМ
Галатия
Лесбос
Дельфы
АФИНЫ
Коринф
Ахейский союз
Спарта
Эгейское море
ЦАРСТВО СЕЛЕВКИДОВ
о. Родос
о. Кипр
о. Крит
о. Сардиния
Мессана
Гиппон
Акрагант
Энна
Леонтины
о. Сицилия
СИРАКУЗЫ
КАРФАГЕН
Тапсо
Средиземное море
Кирена
КИРЕНАИКА
АЛЕКСАНДРИЯ
ЕГИПЕТ
Нил
Масштаб
80 0 80 160 240 320 400 км

полководцем греческого происхождения Гиппократом, к ним присоединились. Римский сенат, придававший очень большое значение завоеванию Сицилии, расположенной между Италией и Карфагеном в центре Средиземного моря, направил туда одного из самых крупных своих военачальников Марка Клавдия Марцелла. Казалось, что этому опытному полководцу будет нетрудно овладеть Сиракузами, которые к тому же ещё не успели получить от Карфагена подкреплений. Но эти надежды не оправдались; в течение более чем двух лет (213—212 гг. до н. э.) Марцеллу не удавалось проникнуть в Сиракузы, и не потому, что так умело вёл защиту Гиппократ: город защищал Архимед. Вот как об этом рассказывает Плутарх (около 46—126 гг. н. э.), посвятивший Марцеллу одно из своих жизнеописаний.

«Марцелл вполне полагался на обилие и блеск своего вооружения и на собственную свою славу. Но всё это оказалось несущественным против Архимеда и его машин.

Архимед был родственником умершего царя Гиерона. В своё время Архимед писал Гиерону, что небольшой силой возможно привести в движение сколь угодно большую тяжесть; более того, вполне полагаясь на убедительность своих доказательств, он утверждал даже, что был бы в состоянии привести в движение самую Землю, если бы существовала другая, на которую он мог бы стать *). Гиерон был этим удивлён и предложил ему показать на деле, как возможно большую тяжесть привести в движение малой силой. Архимед осуществил это над грузовым трёхмачтовым судном, которое, казалось, могло вытащить на берег только большое число людей. Архимед велел посадить на судно множество людей и нагрузить обычным большим грузом. Поместившись затем в некотором отдалении на берегу, он без всякого напряжения, очень спокойно нажимая собственной рукой на конец полиспаста, легко, не нарушая равновесия, придвинул судно. Гиерон был этим в высшей сте-

---

*) «Δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν» — «Дай мне, где стать, и я сдвину Землю», — так передаёт эту фразу греческий математик Папп Александрийский, живший в конце III столетия нашей эры.

пени поражён и, убедившись в высоком значении этого искусства, склонил Архимеда соорудить машины как для обороны, так и для нападения при любой осаде. Правда, Гиерон сам не использовал этих машин, так как бо́льшая часть его правления прошла в мирной обстановке. Но теперь (при наступлении Марцелла) эти машины и соорудивший их Архимед оказались весьма необходимыми.

Когда римляне начали наступление с обеих сторон (с суши и с моря), сиракузяне были в высшей степени поражены и как бы парализованы от страха. Они считали невозможным противостоять такой большой силе и военной мощи. Но тогда Архимед привёл в действие свои машины и орудия разнообразного рода; на сухопутные войска посыпались камни огромной величины и веса, с шумом и невероятной быстротой. Против этих снарядов, казалось, не было больше защиты. Целые подразделения войск валились на землю, и их ряды пришли в полный беспорядок. В то же время и на суда обрушивались из крепости тяжёлые балки, искривлённые в виде рогов; одни из них сильными ударами погружали суда в глубь моря, другие крюками в форме журавлиных клювов, точно железными руками, поднимали корабли высоко в воздух, а затем опускали кормой в воду. В то же время другие машины швыряли суда на скалы возле стен города, и их матросы подвергались страшному уничтожению. Нередко представлялось ужасное зрелище: судно, высоко поднятое над морем, раскачивалось в воздухе до тех пор, пока его экипаж не выбрасывался вон, потом либо отбрасывалось пустым к городской стене, либо, отпущенное, падало в воду. Марцелл устанавливал на своих судах машины для противодействия и нападения, но как только такое судно приближалось к стене города, на него падал камень весом в десять талантов *), за которым следовал второй и третий. . . Эти камни, с громадной силой и шумом уничтожая машины, находившиеся на неприятельских судах, разрушали и самые палубы.

---

*) То-есть около 260 килограммов.

Марцелл оказался в чрезвычайно большом затруднении и должен был со своим флотом отступить. Он велел также отступить и сухопутным войскам. После этого он держал военный совет. Было решено ещё той же ночью по возможности подойти очень близко к городу. Расчёт состоял в том, что метательные машины Архимеда, вследствие присущей им большой силы, перебросят ядра через головы наступающих и на малом расстоянии окажутся совершенно безвредными. Однако на этот случай Архимед ещё задолго до того соорудил машины, приспособленные к действию на любых расстояниях небольшими снарядами. Вдоль стены непрерывным рядом были устроены не очень большие бойницы, а за ними стояли метательные машины, невидимые для врагов; снаряды этих машин были легче, неслись с меньшей скоростью и поражали врагов на небольших расстояниях. Поэтому, когда римляне... приблизились к стенам города в полной уверенности, что их совершенно не заметят, они были тотчас же встречены массой стрел и снарядов. Сверху на их головы посыпались камни и отовсюду со стен неслись снаряды. Они снова вынуждены были отступить. Тогда машины вновь были установлены на дальнее расстояние, снаряды неслись вдаль и настигали отступающих. Потери были велики, велико было смятение на судах. Было совершенно невозможно каким бы то ни было способом справиться с противником. Архимед расположил большинство машин за стеной, и римляне, на которых с невидимых мест валились тысячекратные бедствия, казалось, сражались с богами.

Но Марцелл всё же не пришёл в замешательство. С насмешкой он сказал своим строителям и инженерам: „Что ж, придётся нам прекратить войну против геометра, который подобно сторукому Бриарею уселся у моря, себе на потеху, нам на позор, и поднимает вверх суда с моря; он даже превосходит сказочного сторукого великана, сразу бросая на нас такое множество снарядов". В действительности римляне становились мишенью для орудий Архимеда. Он один был душою обороны, приводил всё в движение и управлял защитой. Всё остальное оружие оставалось в бездействии, и только его машинами город тогда пользовался для обороны. Римляне были так напуганы, что достаточно было показаться над стенами канату или

деревянной палке, как все кричали, что Архимед направил на них машину, и быстро убегали. Видя это, Марцелл прекратил сражения и нападения и предоставил дальнейшую осаду действию времени».

Так рассказывает об этом Плутарх; почти в таком же виде передаёт эти события Полибий, писавший примерно через 30 лет после смерти Архимеда. Другие историки сообщают об этом в несколько иных вариантах. Не может подлежать сомнению, что достижения Архимеда сильно приукрашены. Прокл, греческий геометр и философ, живший в V веке н. э., сообщает даже, что во время осады Архимед соорудил ещё зажигательные стёкла и отражательные зеркала, при помощи которых он сжигал корабли противника. Это предание передаётся и другими авторами, однако явно со слов того же Прокла. Между тем наиболее крупные историки древности, перечисленные выше, об этом нигде не упоминают. По всей вероятности, эта легенда позднейшего происхождения.

При всём том, однако, несомненно, что именно Архимед в течение двух лет при помощи своих машин с успехом защищал Сиракузы от мощной римской армии.

Всё же в конце концов Марцеллу удалось ночью, когда сиракузяне предавались пьянству по случаю годового праздника в честь богини Артемиды, пробраться в город через отдалённые ворота. На утро Марцелл вступил в город со всем своим войском. Несмотря на меры, принятые Марцеллом, занятие города сопровождалось грабежом и убийствами, во время которых погиб и Архимед. Вот как рассказывает об этом дальше Плутарх.

«Больше всего Марцелла огорчила судьба Архимеда. Последний сидел, погружённый в размышление над геометрической фигурой, которую он внимательно созерцал. Он был этим настолько поглощён, что совершенно не заметил вступления римлян и занятия города. Внезапно пред ним появился солдат и потребовал, чтобы Архимед пошёл с ним к Марцеллу. Но Архимед хотел это сделать только после того, как разрешит задачу и закончит доказательство. Солдат пришёл в ярость, выхватил меч и пронзил им Архимеда».

Другие рассказывают, что когда римлянин уже подступил к нему с обнажённым мечом, чтобы убить его,

Архимед настойчиво просил воина предоставить ему короткий срок, чтобы задача не осталась незаконченной и недоказанной; но солдат на это не согласился и тут же заколол его.

Передают и третий рассказ, будто Архимед нёс к Марцеллу математические инструменты, солнечные часы, глобус небесной сферы и угломерный прибор, которым он измерял видимую величину Солнца *). По дороге его встретили солдаты; подозревая, что в своих сосудах он несёт золото, они его убили.

Легенда о гибели Архимеда различными авторами передаётся в очень разукрашенных вариантах. Так, Тцетцес сообщает, что подошедшему к нему римскому солдату Архимед сказал: «Отойди, не трогай моих чертежей» («Noli turbare circulos meos», — как передаёт Плутарх). Рассерженный солдат его убил. Византийский историк Зонарас (XII в.) утверждает, далее, будто Архимед этому солдату сказал: «Бей по голове, но не по чертежу» (Παρὰ κεφαλὰν μὴ παρὰ γραμμάν). Трудно сказать с уверенностью, имеют ли эти предания фактическое основание; но о них определённо можно сказать по известной итальянской поговорке: если и не правдиво, то хорошо придумано (se non è vero, è ben trovato). Они хорошо рисуют представление об Архимеде людей, знавших его, слышавших о нём.

Единодушно рассказывают, что Марцелл глубоко сожалел о гибели Архимеда и изгнал из армии его убийцу как человека, достойного проклятия. Родственникам Архимеда, которые были разысканы по распоряжению Марцелла, были оказаны высокие почести.

Таков образ Архимеда, каким его рисуют древние историки: гениальный военный инженер, который изобретёнными им машинами в течение двух лет успешно защищал свой родной город от римских войск. Вскользь они при этом называют его математиком, геометром, с тем платоническим почтением, с которым часто и в настоящее время относятся к математикам люди, не посвящённые в эту науку. Однако не так смотрел на себя сам Архимед.

*) Несомненно лишь то, что Архимед построил прибор для измерения углового диаметра Солнца и небесный глобус (представлявший собой нечто вроде планетария), который Марцелл увёз в Рим.

Вот как об этом рассказывает тот же Плутарх.

«Архимед был настолько горд наукой, богатствами которой он владел, отличался такой силой духа, что именно о тех своих открытиях, благодаря которым он приобрёл славу, не только доступную человеку, но почти божественную, он не оставил ни одного сочинения. Занятия механикой *) и вообще любым искусством, имеющим целью практическую пользу, он считал неблагородными, низменными **). Рвение мысли он направлял исключительно на такие предметы, которые были великолепны и прекрасны независимо от своей необходимости. В области геометрии нельзя найти более трудных глубокомысленных задач, решённых с такой простотой и ясностью. Одни приписывают это высоким дарованиям этого мужа; другие, напротив того, придерживаются мнения, что благодаря напряжённому труду ему удавалось дать своим открытиям такое выражение, что они каждому становятся легко доступными без труда. Если читатель сам и не находит доказательства, то при изучении сочинения у него создаётся представление, что он и сам мог бы это доказательство найти, — таким лёгким и быстрым путём Архимед приводил к тому, что он хотел доказать. Поэтому не покажется невероятным, что он, как рассказывают, всегда околдованный дружеской ему сиреной, забывал о еде и совершенно пренебрегал заботой о своём теле. Часто его насильно заставляли принимать ванну, натираться благовонной мазью; но и в это время он рисовал на земле геометрические фигуры и пальцем чертил на своём намазанном теле геометрические линии, охваченный большой радостью и действительно одухотворённый музами. Изобретший столь много прекрасного, он, говорят, просил людей и родственников начертить на его могиле только цилиндр и содержащийся в нём шар и указать численное соотношение между объёмами этих тел. Таков был Архимед, который, насколько это зависело от него, охранял город от поражения».

---

*) Очевидно — техникой.

**) Мы постараемся выяснить далее полную несостоятельность такого мнения об Архимеде.

С тех пор прошло свыше двух тысяч лет. Катапульты и другие сооружения Архимеда совершенно забыты. Камни, которые они метали, заменены снарядами, извергаемыми силой взрывчатых веществ; корабли поднимаются в воздух не журавлиными кранами, а минами сложного устройства. Машины и технические изобретения Архимеда сохранились в памяти только как легенды, утратившие практический интерес и значение. Века и войны снесли памятник Архимеду, восстановленный Цицероном; но вознёсся другой, ещё более почётный монумент великому геометру. Почти через две тысячи лет после смерти Архимеда в Оксфорде был выпущен в свет прекрасный фолиант; он носит название:

«Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα» *)

— «Все сохранившиеся сочинения Архимеда», всё, что удалось спасти после истекших веков. И эти творения великого геометра не забыты; они вызывают восхищение всех, кто может их понять, и, несомненно, всегда будут вызывать такое восхищение.

Лейбниц писал о нём: «Кто овладел творениями Архимеда и Аполлония, будет меньше удивляться открытиям самых великих людей нашего времени» (qui Archimedem et Apollonium intelligit recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur). Не раз говорили, что Архимед и Ньютон знаменуют основные эпохи в истории математики.

Кто же собственно был Архимед, в какую эпоху он творил, что он создал, чем заслужил свою бессмертную славу?

В 332 г. до н. эры Александр Македонский, стремившийся к созданию мировой монархии, основал в Египте город, в который он предполагал перенести столицу своей державы, и назвал его Александрией. При таком назначении город тотчас же начал привлекать наиболее предприимчивые элементы как Греции, так и Востока; купцы,

*) См. библиографию на стр. 52. В начале нашей книги воспроизведено изображение Архимеда, помещённое на титульном листе этого знаменитого издания.

ремесленники, вольноотпущенники стали в большом числе стекаться в Александрию и очень быстро развернули в ней торговлю и различного рода производства. После смерти Александра (323 г.) и распада его монархии Александрия сделалась столицей греко-египетского государства, которое досталось одному из полководцев Александра, Птолемею, сыну Лага. Провозгласив себя вскоре царём, Птолемей Лага стал родоначальником династии, правившей Египтом до 30 г. нашей эры.

Желая возвысить свою столицу, Птолемеи покровительствовали развитию наук и искусств, ассигнуя на это значительные средства и всячески поддерживая выдающихся учёных и художников. Эти меры, которые широко применял уже первый Птолемей, очень быстро привлекли в Александрию большое число известных греческих философов и их учеников, — тем более, что в Афинах прежней свободе мысли уже давно не было места. К концу IV столетия до н. э. Александрия становится центром интеллектуальной жизни Греции. Здесь возникла первая школа неоплатоников, здесь образовалась и геометрическая школа, развернулся золотой век греческой геометрии *).

К эпохе расцвета геометрии александрийской школы относятся два геометра, различные по своему значению, по силе своего творчества, но приобретшие наибольшую известность; это были Евклид и Архимед. О личности Евклида мы имеем очень мало сведений; они сводятся к нескольким дошедшим до нас указаниям Паппа Александрийского и, главным образом, к следующим строкам из предисловия Прокла к его комментариям к первой книге «Начал» Евклида.

«Немногим моложе их (Гермотима из Колофана и Филиппа из Медеи) был Евклид, который составил „Начала“, собрал в одно целое многие предложения, принадлежавшие Евдоксу, усовершенствовал многое, принадлежавшее Теэтету, и дал неоспоримые доказательства тому, что было слабо доказано его предшественниками. Этот муж жил во времена первого Птолемея, ибо Архимед, который жил непосредственно после первого (Птолемея), упоми-

*) G. Loria, Il periodo aureo della geometria greca, Modena, 1895; — G. Kowalewski, Grosse Mathematiker, Berlin, 1939.

нает об Евклиде. Рассказывают также, что Птолемей однажды спросил его (Евклида), есть ли к геометрии путь короче того, который проложен в „Началах“, на что тот ответил, что к геометрии нет особенного пути для царей».

От прежних крупных греческих геометров — Фалеса Милетского (VII столетие до н. э.), Пифагора (VI столетие), Гиппократа Хиосского (V столетие), Евдокса (IV столетие) — Евклид получил в наследие обширный геометрический материал. Но для него может быть большее значение имели общие требования Платона и Аристотеля по отношению ко всякой области знания — привести в порядок имеющийся материал, в частности, претворить геометрию в строго выдержанную синтетическую систему, дать ей твёрдое логическое основание. И эту задачу он выполнил со всем тем совершенством, какое было в то время доступно. Созданные им «Начала» сделались учебником, по которому в течение двух тысяч лет учились геометрии юноши и взрослые. Не нужно думать, однако, что Евклид был просто компилятором дошедшего до него геометрического материала. Он внёс в своё произведение много усовершенствований и, повидимому, немало дополнений. «Очень трудно, — пишет тот же его комментатор Прокл, — в каждой науке отобрать и расположить в надлежащем порядке элементы, из которых всё дальнейшее следует, в которые всё дальнейшее разрешается». «И во всём этом система элементов Евклида превосходит всё остальное, ибо польза её сказывается в том, что она ведёт к исследованию наиболее совершенных фигур; её ясность и совершенство обеспечиваются тем, что она восходит от более простого к более сложному, — тем, что она основывает всё исследование на аксиомах; общность же доказательства обеспечивается тем, что оно переходит от начальных теорем, носящих характер принципов, к (сложным) объектам мышления».

Так характеризовали древние назначение и достоинства «Начал». Книга Евклида на тысячелетия установила то, что по настоящее время считается началами, элементами геометрии — установила рамки элементарной геометрии.

Верный Платону, к посмертной школе которого он принадлежал, Евклид был человеком исключительно

абстрактной мысли; приложения геометрии его не интересовали. Известно дошедшее до нас предание, будто юноша, пришедший к нему учиться, спросил его, какую, собственно, пользу он получит от изучения геометрии. В ответ на это Евклид повернулся к рабу и сказал ему: «Дай этому человеку три обола, он ищет от геометрии пользу».

Трудно сказать, сколько правды в этой легенде; но она выявляет целое мировоззрение; и это мировоззрение для Евклида действительно характерно.

Евклид завершил эпоху создания элементарной геометрии и приведения её в логическую систему. Следующей эпохе положил начало Архимед. Это был человек не только неизмеримо более высокой творческой силы, но и существенно другого миросозерцания, другого взгляда на науку и на её задачи.

Хотя об Архимеде, как мы видели, пишут почти все древние историки, наши сведения об его жизни по существу также очень незначительны. Некто Гераклид в древности написал его биографию, но она до нас не дошла; проскользнули только краткие отрывки из неё, вкраплённые в сочинения других авторов. Мы знаем уже, что Архимед погиб при взятии Сиракуз Марцеллом, следовательно, в 212 г. до н. э. По рассказу Тцетцеса ему было тогда 75 лет; таким образом, он родился, вероятно, около 287 г. до н. э. Происходил он из культурной семьи; его отец Фидий был астроном; Архимед упоминает о нём в своём сочинении «Исчисление песка». Есть основания думать, что это была знатная, но небогатая семья. Архимед находился в родственных отношениях к сиракузскому царю (тирану) Гиерону и его сыну Гелону. По рассказу древнегреческого историка Диодора, он провёл продолжительное время в Александрии, где, повидимому, учился у последователей Евклида. К Евклиду, как это следует из собственных высказываний Архимеда, он относился с большим почтением. В Александрии он сблизился с рядом математиков, с которыми поддерживал дружбу всю свою жизнь. Старшим из них был Конон, который, повидимому, имел влияние на развитие геометрических идей Архимеда, но рано умер; другим — Досифею, Эратосфену,

Даейксиппу — Архимед посылал свои работы, сопровождая каждую соответствующим письмом, так что сочинения Архимеда до некоторой степени производят впечатление посланий друзьям.

Возвратившись в Сиракузы, Архимед посвятил себя исключительно математическим исследованиям, которые привели его также к открытиям в области механики (статики, гидростатики) и техники. Относился ли Архимед действительно с пренебрежением к приложениям математики? Можно с уверенностью сказать, что это не так. Известный отпечаток научных традиций платоновской Академии на нём, конечно, лежит; он проявляется, между прочим, и в той строгой точности, с какой Архимед доказывает каждую свою теорему, в той осторожности, с какой он публикует свои замечательные открытия. Но вряд ли можно допустить, чтобы человек, с таким увлечением и с таким успехом сооружавший многочисленные машины, основываясь при этом на своих теоретических исследованиях, мог презирать этот род своей деятельности. Плутарх подкрепляет свои утверждения об отношении Архимеда к его техническим открытиям тем, что он ни одного из этих открытий не опубликовал, но причиной этого, вероятнее всего, была «засекреченность» этих открытий. Во всяком случае работы Архимеда в области механики, и в особенности гидростатики, задачи, которые он себе при этом ставил, обстоятельства, которые его к этому привели, свидетельствуют, что это был человек с совершенно иными умонастроениями, нежели Евклид и его ближайшие ученики. Он несомненно имел живой и глубокий интерес к прикладным дисциплинам: без такого интереса не было бы возможно и то творчество, которое он в этих дисциплинах проявил. Как мы увидим ниже, он именно в механике черпал даже средства для доказательства чисто геометрических предложений.

Более трудные, более специальные по своему содержанию, нежели «Начала» Евклида, сочинения Архимеда были гораздо менее распространены; в то время как поздние издания Евклида считаются сотнями, если не тысячами, издания Архимеда считаются лишь немногими единицами. Имеются три основные рукописи, по которым эти сочинения воспроизводятся, но и у них один общий источник — ма-

гиперболоида и параболоида вращения, он углубил этот приём настолько, что в основном предвосхитил методы Лейбница и Ньютона, можно сказать, заложил первые начала интегрального исчисления.

Архимед установил основы теоретической механики (статики) и начала гидростатики, не только не утратившие значения до сих пор, но по настоящее время составляющие первые исходные основания этих дисциплин.

Архимед дал способы вычисления площадей и объёмов геометрических тел, основанные на применении начал механики.

Архимед открыл так называемую винтовую линию и дал её применение к построению винтового двигателя, хотя и примитивного, но всё же служащего элементарным прототипом всех винтовых движителей в воде и в воздухе, которыми мы теперь пользуемся. Эти открытия составили эпоху, позже служили точкой отправления для работ Леонардо да Винчи, Галилея и Ньютона. Методы Архимеда составляют античную предоснову новой математики, её первого расцвета в XVII столетии.

Чтобы эту роль Архимеда выяснить, необходимо войти в рассмотрение важнейших его произведений. Мы не будем при этом придерживаться их хронологического порядка, который к тому же нельзя считать строго установленным, но будем следовать пути, на котором, на наш взгляд, наиболее выясняется сущность и развитие идей Архимеда.

Архимеда прежде всего считают геометром. Так его называют и древние историки, повествующие о его технических изобретениях. Тем не менее мы начнём обзор его творчества с идей, которые правильнее всего отнести к арифметике.

Учению о счислении и счёте Архимед посвятил особое сочинение «Ἀρχαί» — «Начала», которое, повидимому, принадлежало к самым ранним его произведениям и, к сожалению, до нас не дошло. Мы располагаем только отрывками из него, сообщёнными различными авторами, отчасти и самим Архимедом, в дошедшем до нас сочинении «Псаммит» («Исчисление песка»).

К началу золотого века своей культуры (III ст. до н. э.) греки были очень сильны в геометрии. Сочетание

наглядных представлений (интуиции) и логики привело их к открытию и обоснованию далеко идущих геометрических соотношений. По вопросу, например, о конических сечениях современные руководства по аналитической геометрии, предназначенные для наших студентов, содержат значительно меньше сведений, чем мы находим в трактате Аполлония. Однако при этом богатстве геометрического материала в греческой математике искусство счёта находилось в убогом состоянии, что проявлялось, в частности, в весьма тяжеловесном письменном счислении, непригодном для сколько-нибудь сложного счёта. Греки обозначали числа буквами (или сочетанием букв) своего алфавита, отличая числовые записи от обычного словесного текста либо посредством штриха, поставленного сверху справа от буквенной записи чисел, либо с помощью горизонтальной черты над нею, либо другим способом, однако, лишённым единого принципа. При этом первые девять букв греческого алфавита означали числа от единицы до девяти. Следующие девять букв означали десятки от десяти до девяноста. Следующие девять — сотни от ста до девятисот.

Так как для обозначения всех указанных чисел требовалось 27 букв, а основной греческий алфавит содержал только 25 (если учесть отдельно ς), то пришлось использовать в качестве «цифр» две архаические буквы ϙ (коппа) и ϡ (сампи), которыми обозначили соответственно 90 и 900. Получилась, таким образом, следующая таблица обозначений:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

А дальше шли тысячи, для обозначения которых к знаку, выражающему число тысяч, присоединялся штрих с левой стороны внизу. Так, обозначение ͵δ′ выражало четыре тысячи, верхний штрих справа отмечал, что это — число, нижний слева отмечал тысячи. Чтобы написать число, составленное из тысяч, сотен, десятков и единиц, соответственные буквенные знаки писались рядом один за другим, так что, например, число 4327 записывалось в виде ͵δ′τ′κ′ζ′.

Некоторые авторы употребляли и другие, но не более простые обозначения. Ясно, что на основе такой записи чисел построить сколько-нибудь разумный, удобный общий алгоритм (правило) счёта было невозможно. Даже сравнительно простое арифметическое вычисление представляло для древних греков очень большие трудности, а при некотором осложнении оно становилось невыполнимым или же требовало специальных приёмов и исключительного таланта. Так, в одном сочинении («Измерение круга»), о котором будет речь ниже, Архимеду приходится приближённо вычислять $\sqrt{3}$. Архимед действительно даёт приближённо меньшее и приближённо большее значения этого числа; именно, он указывает, что (в наших обозначениях)

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Но ни единым словом Архимед не разъясняет, ка́к он это замечательное приближение получил. Имеется целая литература, содержащая попытки разгадать этот способ, но следует признать, что все высказанные соображения мало надёжны.

В своём сочинении «Псаммит» («Исчисление песка») Архимед прежде всего пытается дать способ обозначения очень больших чисел в словах и в знаках. К этому приводит Архимеда следующая своеобразная задача. Он хочет вычислить, сколько песка, точнее, — сколько песчинок содержалось бы в массе песка, если бы таковая заполняла «всю вселенную», т. е. сферу, имеющую центром Землю и охватывающую все неподвижные звёзды. Вот что он об этом говорит во вступлении, обращённом к царю Гелону.

«Есть люди, царь Гелон, которые придерживаются того мнения, что число песчинок бесконечно велико; я же имею в виду не только тот песок, который находится у нас вблизи Сиракуз и во всей Сицилии, но и во всех населённых местах. Другие люди, если и не считают этого числа бесконечным, то всё же утверждают, что мы не в состоянии указать числа, которое превосходит его... Но я хочу тебе представить геометрические доказательства, которые ты можешь проследить, что между теми числами, которые я поименовал в сочинении, посланном Дзейксиппу, имеются такие, которые не только превышают это коли-

изводство счёта по разрядам и порядкам (классам) — уже заложена в этом произведении.

Указав этот способ счёта и опираясь затем на сообщения Аристарха о размерах вселенной, а также на свои собственные соображения по этому вопросу и по вопросу о размерах песчинки, Архимед приходит к заключению, что число песчинок, которые могли бы заполнить вселенную, не превышает тысячи мириад «восьмых» чисел, т. е. числа́ $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8} = 10^{63}$.

Эту свою работу Архимед заканчивает следующими словами: «Я предполагаю, царь Гелон, что эти вещи множеству людей, не занимавшихся математикой, покажутся невероятными; но тем, кто в этом кое-что понимает и кто проследит изложенные соображения о расстояниях и величинах Земли, Солнца, Луны и всей вселенной, в силу доказательства убедятся в справедливости этого».

Работа Архимеда об исчислении песка при всём принципиальном её значении не получила широкого применения, потому что позже, к тому времени, когда задачи сложного счёта стали насущными, в математику, в частности, в арифметику, проникли способы арабско-индусского счисления, которым пользуются с шестнадцатого столетия; оно имеет несомненное преимущество, особенно в письменном счёте. Но чётко выраженный замысел двойного счёта принадлежит Архимеду и, вероятно, был им глубже разработан в недошедшем до нас произведении «Ἀρχαί». Вычислительная математика, которой Евклид совершенно пренебрегал, становится для Архимеда, можно сказать, главным предметом разработки, и в виде ряда частных, глубоких и трудных задач разрешается им при помощи методов, которые сохранили руководящее значение до настоящего времени. Ближайшее применение эти вычисления получили в замечательной работе Архимеда «Измерение круга».

В XII книге «Начал» Евклид устанавливает (предложение 2), что площади кругов относятся между собой как квадраты их диаметров *). Это эквивалентно тому, что отношение площади круга к квадрату диаметра есть число по-

*) По терминологии Евклида — как квадраты, построенные на их диаметрах.

стоянное. Уже задолго до Евклида было известно, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен длине окружности, а другой — радиусу круга. В связи с этим было ясно, что отношение длины окружности к диаметру имеет тоже постоянное отношение; его теперь обозначают греческой буквой π. Любопытно, что Евклид, заканчивая в VI книге планиметрию, ничего о длине окружности и площади круга не говорит. Это настолько странно, что некоторые авторы высказывали даже предположение, будто утеряна часть «Начал», которая была посвящена учению о длине окружности и площади круга. Между тем, располагать значением числа, выражающего отношение длины окружности к длине диаметра, было совершенно необходимо в элементарной практике при изготовлении различных круглых предметов — диска, круглого блюда, при сооружении круглых колонн, которые так часто встречаются в греческой архитектуре, и т. д. Значение этого отношения пытались приближённо установить ещё в глубокой древности, повидимому, исключительно эмпирически; чаще всего его принимали равным трём. Сведения об этом мы находим в знаменитом папирусе Ринда (учебник Ахмеса), в библии, в древнеиндийских и древнекитайских памятниках. Примерно с V столетия до н. э. возникают попытки установить это число на основании теоретических соображений. Вопрос этот сплетается со знаменитой задачей о квадратуре круга. Как рассказывает Плутарх, математик и философ Анаксагор занимался этим во время тюремного заключения. Знаменитый греческий писатель Аристофан в конце V столетия в одной из своих комедий уже подтрунивает над людьми, занимающимися этими задачами.

Архимед первый поставил задачу об измерении длины окружности с полной точностью. Он задаётся целью не только найти приближённое значение отношения окружности к диаметру, но и установить пределы допускаемой при этом ошибки. Этому и посвящена небольшая, но очень важная работа «Измерение круга», о которой мы упоминали ранее.

Не приходится долго останавливаться на методе, которым Архимед пользуется для решения этой задачи: его знают

все, кто учился геометрии в школе. Длина окружности содержится между периметрами вписанного и описанного многоугольников с одинаковым числом сторон *). Удваивая число сторон этих многоугольников, мы неограниченно приближаемся к длине окружности. Начиная с шестиугольников, Архимед с необычайным искусством доводит вычисление до 96-угольников; пользуясь указанным выше (стр. 23) приближённым значением числа $\sqrt{3}$, он обнаруживает, что периметр правильного 96-угольника, вписанного в окружность диаметра 1, больше, чем $3\frac{10}{71}$, а периметр правильного описанного 96-угольника меньше, чем $3\frac{1}{7}$. Принимая верхнюю из этих границ в качестве приближённого значения длины окружности, получим так называемое архимедово значение $\pi = \frac{22}{7}$, которое, будучи выражено десятичной дробью, даёт приближение с точностью до 0,01 (3,14).

Мы обычно недооцениваем того, к чему привыкли, что хорошо усвоено, — недооцениваем трудности задачи, гения изобретателя. Но если учесть, что и в настоящее время, через две тысячи лет после Архимеда его метод излагается в школьных учебниках, что до позднего периода эпохи Возрождения не существовало приближённого значения π, которое существенно бы отличалось от архимедова числа, что и в настоящее время в подавляющем большинстве случаев на практике пользуются архимедовым числом для вычисления длины окружности, площади круга, объёма шара, то огромное значение этого великого открытия станет совершенно ясным.

Но ценность и значение метода, которым пользуется Архимед в этой работе, уяснится ещё лучше, если примем во внимание, что в указанной работе («Измерение круга») он получает применение только в простейшем виде, что здесь осуществляется только первая, наиболее простая форма так называемого **метода исчерпывания**, который служит прообразом интегрального исчисления.

---

*) Архимед установил специальную аксиому, из которой это вытекает.

Вообще в истории науки очень трудно указать идеи или методы большого значения, широкого применения, открытие и провозглашение которых можно было бы приписать только одному человеку. Такие идеи развёртываются постепенно, возникая из небольшого ядра и разрастаясь в своих приложениях. Метод исчерпывания в простейших, но важных случаях получил применение ещё до Архимеда; по существу, им пользовался уже Евклид в XI—XII книгах «Начал», и то рассуждение, которое изложено выше, служащее в работе «Измерение круга» средством для приближённого вычисления отношения длины окружности к диаметру, составляет в исследованиях Архимеда только первый шаг. Этот метод Архимед широко развил, дал ему разнообразные, очень углублённые приложения, получил при помощи его столь же замечательные, сколь и ценные результаты, в которых, как уже сказано, с полным основанием видят предвосхищение интегрального исчисления — важнейшего метода современной математики.

Чем было вызвано появление метода исчерпывания, каковы геометрические приёмы его приложения, каковы специфические формы его применения, к которым прибегает Архимед, каково развитие, которое он получил после Архимеда — в средние века, в наше время? Дать хотя бы краткие ответы на эти вопросы, — значит действительно выяснить главное значение творчества Архимеда в области геометрии; постараемся это сделать.

Чтобы ввести читателя в круг этих идей, остановимся на вычислении площадей и объёмов. Учение о площадях и объёмах развёртывается в геометрии следующим образом. На основании учения о пропорциональности доказывается, что отношение площадей двух прямоугольников, даже вообще двух параллелограммов, равно произведению отношения оснований на отношение высот (эллинские геометры говорили: равно сложному отношению, составленному из отношения оснований и отношения высот). Благодаря этому при надлежащем выборе единицы площади (если для измерения площадей за единицу принять площадь квадрата, сторона которого равна единице длины) число, выражающее площадь параллелограмма, равно

произведению чисел, выражающих длину основания и длину высоты. Древние избегали этой арифметической формулировки, но по существу приведённая выше формулировка в геометрических отношениях ей эквивалентна, и они практически ею действительно пользовались. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, имеющего то же основание и ту же высоту; многоугольник разбивается на треугольники, и его площадь равна сумме площадей составляющих треугольников; в различных частных случаях результат получает более простое выражение. К этому, по существу, сводится всё учение об измерении площадей прямолинейных фигур; элементарная простота этого учения, таким образом, имеет свой источник в том, что всякий многоугольник может быть составлен из треугольников — из конечного числа частей, отсекаемых от квадрата прямыми линиями *). Но это исходное положение отказывается служить, когда требуется разыскать площадь фигуры, ограниченной криволинейным контуром, и прежде всего — площадь круга. Круг нельзя составить из конечного числа прямолинейных фигур (треугольников, квадратов и т. п.). Для определения площади криволинейной фигуры нужно найти иной путь, и древние этот путь нашли. Точно установить, кому собственно принадлежит изобретение этого метода, невозможно; сам Архимед приписывает его Евдоксу. Сущность его мы выясним на задаче об определении площади круга. Это тем удобнее, что приём, который для этого применяется, несущественно отличается от того, которым Архимед воспользовался для приближённого вычисления отношения длины окружности к её диаметру.

В круг вписывается правильный многоугольник, например — как у Архимеда — шестиугольник. Он занимает часть круга; но остаются шесть сегментов, ограничиваемых дугами круга и сторонами многоугольника. После этого в круг вписывается правильный двенадцатиугольник путём надстройки равнобедренного треугольника на каждой

*) Заметим, что это рассуждение имеет дефект: нужно доказать, что сумма площадей треугольников, на которые разбит многоугольник, не зависит от способа разбиения. (См. брошюру: В. Ф. Каган, О преобразовании многоугольников, Москва, 1933.)

стороне шестиугольника; этот двенадцатиугольник охватывает уже бо́льшую часть круга — площадь остающихся сегментов уменьшается. После этого вписывается двадцатичетырёхугольник. Повторяя достаточное число раз этот приём, можно достигнуть того, что любая заданная точка круга окажется внутри вписанного многоугольника. В этом смысле вписываемые многоугольники как бы «исчерпывают» круг. Отсюда и название, возникшее в средние века, — «метод исчерпывания». Выражаясь современным языком, можно сказать, что площадь круга представляет собой предел площадей вписанных многоугольников, когда число их сторон бесконечно возрастает; но эта терминология древним, конечно, ещё чужда.

Схема, по которой Архимед устанавливает площадь круга, заключается в следующем. Он формулирует основное предложение: площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один катет которого равен окружности, а другой — радиусу круга. Это и даёт для площади круга значение πr^2, которое всегда приводится в наших учебниках; но Архимед, как и все античные геометры, даёт этому не арифметическое, а геометрическое выражение. Его доказательство распадается на три части. Пользуясь не только вписанными, но и одноимёнными описанными правильными многоугольниками, Архимед показывает, во-первых, что площадь круга больше площади каждого вписанного и меньше площади каждого описанного многоугольника; во-вторых, что разность между площадью описанного и площадью вписанного многоугольников может быть сделана меньше любой заданной величины *); и, наконец, после этого он устанавливает, что площадь круга равна площади треугольника, о котором идёт речь; он выполняет это рассуждением от противного, т. е. доказывает, что площадь круга не может быть ни больше ни меньше площади указанного треугольника.

---

*) Если примем во внимание, что площадь вписанного таким образом многоугольника с увеличением числа сторон постоянно возрастает, а площадь описанного многоугольника постоянно убывает, то станет совершенно ясно, что та и другая площади имеют общий предел.

Таков замысел метода исчерпывания. Как уже указано, Архимед чрезвычайно углубил и расширил применение этого метода. В работе «О шаре и цилиндре», которую считают самым ранним из дошедших до нас сочинений Архимеда, он доказывает, что поверхность шара равна четырём площадям большого круга, устанавливает объём шара и шарового сектора, давая этому такое выражение: объём шара в четыре раза превышает объём конуса, основание которого равно площади большого круга этого шара, а высота равна его радиусу; он устанавливает также объём и боковую поверхность цилиндра и прямого круглого конуса, а в других сочинениях, о которых речь будет ниже, далеко расширяет эти результаты.

Таким образом, размер применения метода исчерпывания у Архимеда оставляет далеко позади результаты, полученные до него Евдоксом и, быть может, другими авторами; то были только первые шаги по этому пути, которые Архимед расширил и углубил. Метод исчерпывания становится орудием, посредством которого Архимед вычисляет площади и объёмы, ограниченные различными кривыми линиями и поверхностями.

Трудность задачи, очевидно, заключается в том, чтобы, выражаясь нашим языком, найти предел последовательных приближений искомой величины. В своих работах о шаре и цилиндре, о сфероидах и коноидах, о спиралях Архимед идёт к этой цели чисто геометрическим путём, специфическими средствами в каждом частном случае. Но Архимед хочет найти для этого общий приём; это ему, конечно, не удалось. Задача эта постепенно была выполнена средневековыми геометрами — Кавальери, Валлисом и другими — и получила первое завершение в трудах Лейбница и Ньютона. Только в XVII веке были установлены методы дифференциального и интегрального исчислений, которые Архимед частично несомненно предвосхитил. Но именно изыскание общих средств для установления тех предельных значений, которыми выражаются устанавливаемые им величины, явно составляет основную задачу, которую Архимед себе ставил. Не разрешив этой задачи полностью, Архимед всё же нашёл приём, приводящий его к цели в очень большом числе случаев, и притом таких случаев, в которых выполнить требуемое вычисление было особенно трудно,

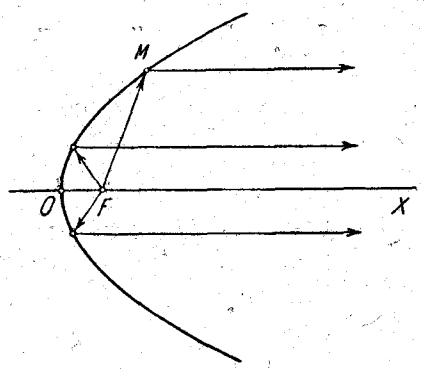
за которые никто из его предшественников даже не решался приняться. И наиболее замечательно то, что основной замысел Архимеда заключается в применении к этим геометрическим вычислениям средств механики (статики).

В наиболее простом виде этот замысел осуществляется в работе «Квадратура параболы». Попытаемся изложить здесь эту работу, проследить ход рассуждений Архимеда. По существу она нетрудна. Познакомившись с основным её замыслом, с ходом рассуждений, читатель не только уяснит себе самый метод исчерпывания, но и поймёт приём Архимеда, основанный на механических соображениях. Но именно по этой причине нам нужно предварительно в немногих словах остановиться на другой работе Архимеда: «О равновесии плоских фигур».

Это было первое исследование Архимеда, посвящённое началам механики, вернее — элементам статики. Оно состоит из двух частей, которые посвящены разысканию центров тяжести плоских фигур: в первой части Архимед устанавливает центры тяжести простейших прямолинейных фигур — параллелограмма, треугольника, трапеции, во второй — центры тяжести различных сегментов параболы. Таким образом, в первой части Архимед доказывает, что центр тяжести параллелограмма лежит в пересечении диагоналей, центр тяжести треугольника — в пересечении его медиан. Эти результаты не были вполне новыми, этими вопросами занимались до Архимеда, в частности, Аристотель. Но соображения Аристотеля далеко не вполне убедительны. Архимед первый установил относящиеся сюда предложения с безукоризненной точностью (он дал необходимую для их вывода аксиоматику), а главное, он дал им замечательные приложения. Одним из таких столь же простых, как и блестящих приложений, и является работа «Квадратура параболы».

Парабола — хорошо известная плоская кривая. Она имеет единственную ось симметрии OX (черт. 1), называемую главной осью или главным диаметром. Основное свойство параболы, которым она определяется и благо-

даря которому она пользуется такой известностью, заключается в следующем. Между ветвями параболы на главной оси есть такая точка F, называемая фокусом, что все лучи FM, выходящие из этой точки и падающие на параболу, отражаются (если, конечно, вообразить, что кривая обладает зеркальными свойствами) в одном направлении — параллельно главной оси, и обратно: все лучи, падающие на параболу параллельно её оси, после отражения проходят через фокус *). Это свойство влечёт за собой различные другие соотношения между элементами параболы; одним из таких соотношений и воспользовался Архимед для так называемой квадратуры параболы, иначе говоря, — для разыскания площади сегмента параболы, т. е. площади, содержащейся между кривой и какой-либо её хордой. Чтобы несколько упростить изложение, мы здесь ограничимся тем случаем, когда хорда перпендикулярна к оси, хотя по существу это мало меняет дело.



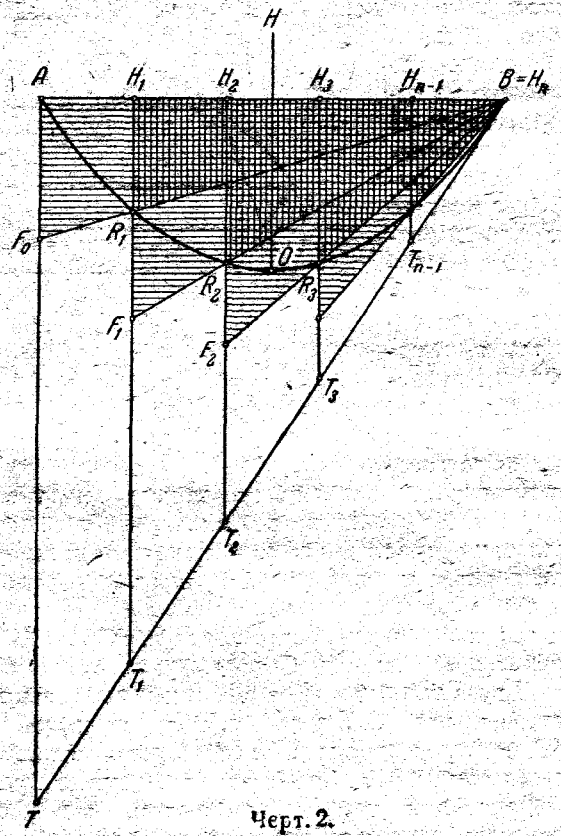
Черт. 1.

Итак, положим (черт. 2), что хорда параболы AB перпендикулярна к её оси OH. Следуя Архимеду, в конечной точке B дуги параболы проведём к ней касательную BT до встречи с прямой AT, проходящей через другой конец хорды AB параллельно оси OH; образуется прямоугольный треугольник ABT. Замечательная теорема, установленная Архимедом, заключается в том, что площадь параболического сегмента, ограниченного хордой AB и дугой AOB, составляет ровно одну треть площади треугольника ABT.

*) Указанное свойство параболы находит себе практическое применение при устройстве параболического зеркала, поверхность которого образуется вращением параболы вокруг её главной оси.

Рассуждения, которыми Архимед это устанавливает и в которых, как уже сказано, ясно проявляются два основных его метода, заключаются в следующем.

Хорду AB разделим на n равных частей (на черт. 2 $n=5$) в точках $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ ($\equiv B$) и через них



Черт. 2.

проведём прямые H_1T_1, H_2T_2, $H_3T_3, \ldots$, параллельные главной оси, — побочные оси кривой, как говорят проще. Они встречают параболу в точках $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$, а касательную в точках $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{n-1}$ и разбивают треугольник ABT на полосы — трапеции ATT_1H_1, $H_1T_1T_2H_2$, $H_2T_2T_3H_3, \ldots$, которые для краткости обозначим че-

рез $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$*); теми же буквами будем обозначать их площади. Если теперь соединим точку B с точками $R_1, R_2, R_3, \ldots$ прямыми $BR_1, BR_2, BR_3, \ldots$, то они с осями тоже образуют два ряда меньших трапеций: (F_0H_1), (F_1H_2), $(F_2H_3), \ldots$, выходящих за пределы сегмента (обозначим их через $f_1, f_2, f_3, \ldots$, они на черт. 2 заштрихованы горизонтально), — и трапеции (R_1H_2), (R_2H_3), $(R_3H_4), \ldots$, входящие целиком внутрь сегмента (они на черт. 2 заштрихованы вертикально; обозначим их через $r_1, r_2, r_3, \ldots$). Совершенно ясно, что искомая площадь S сегмента $AOBA$ параболы содержится между суммами площадей входящих и выходящих трапеций:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} < S < f_1 + f_2 + \ldots + f_n. \quad (1)$$

Когда число n частей, на которые мы делим хорду AB, неограниченно возрастает, эти две суммы неограниченно сближаются; очевидно, площадь сегмента S служит общим пределом суммы входящих и суммы выходящих трапеций. Эта терминология, как мы уже знаем, Архимеду чужда; но он доказывает, что разность между суммой выходящих и суммой входящих трапеций становится меньше любого заданного значения, а это и приводит к тому, что площадь параболы является указанным пределом. Читателю будет легче усвоить рассуждения Архимеда, если мы будем пользоваться современной терминологией и скажем, что для разыскания площади рассматриваемого сегмента нужно было разыскать значение этого общего предела.

Все предыдущие рассуждения по существу, конечно, ещё вовсе не предполагают, что дуга, ограничивающая сегмент, принадлежит параболе; они остались бы справедливыми и в том случае, если бы эта дуга принадлежала любой из многих кривых, идущих от точки A к точке B. Существенно то, что Архимед здесь, как и во многих других случаях, пользуется методом исчерпывания, т. е. постепенного заполнения площади, ограниченной криволинейным контуром, площадями прямолинейных фигур, сумма которых в пределе даёт площадь искомой криволинейной фигуры. Но для разыскания этого предела, конечно, нужно воспользоваться специфическими свойствами

*) Последняя из них представляет собой треугольник.

рассматриваемой граничной кривой, в данном случае — параболы, и изыскать метод, которым находится это предельное значение.

Как мы уже упомянули выше, парабола допускает различные определения; она может быть охарактеризована различными соотношениями между теми или другими её элементами. Архимед уже имел в своём распоряжении несколько соотношений такого рода, найденных его предшественниками: уже Евклид составил сочинение о конических сечениях, к числу которых принадлежит и парабола; занимался этим ещё в начале IV столетия до н. э. Аристей; но эти их труды до нас не дошли. Опираясь на полученные ими результаты, Архимед устанавливает новое соотношение, приспособленное к его построению (черт. 2). Именно, он доказывает, что в случае параболы каждая точка R_i делит отрезок H_iT_i, на котором она лежит, в том же отношении, в каком соответствующая точка H_i делит хорду AB *):

$$H_iR_i : R_iT_i = AH_i : H_iB. \qquad (2)$$

После этого он переходит к главной задаче — к разысканию площади сегмента, т. е. общего предела сумм входящих и выходящих трапеций; для решения этой задачи он прибегает к средствам механики.

Хорду AB он представляет себе горизонтальной, продолжает её в другую сторону на расстояние $AC = AB$ (черт. 3) и рассматривает CAB как равноплечий рычаг с опорой в точке A. Трапеции $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ он представляет себе тонкими однородными пластинками, веса которых пропорциональны их площадям и, следовательно, в вопросах статики могут быть заменены их площадями; сообразно этому он говорит о площади треугольника, трапеции, как о соответствующем весе или грузе.

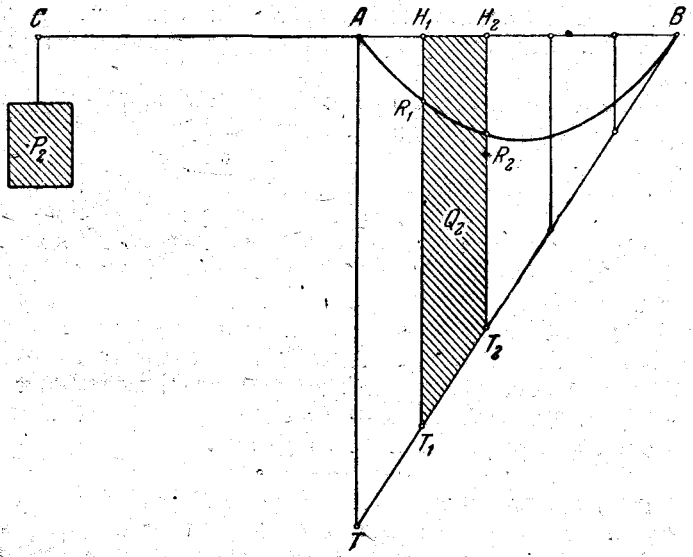
Теперь Архимед ставит себе задачей разыскать грузы $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, которые, будучи приложены на другом конце рычага, в точке C, могут уравновесить соответствующие веса (трапеции) $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$. Опираясь на соотношение (2), характеризующее параболу,

*) Мы приводим доказательство этого основного соотношения в виде приложения I к тексту (стр. 48).

Архимед показывает, что каждый груз P_i содержится между r_i и f_i *):

$$r_i < P_i < f_i. \tag{3}$$

Если поэтому сумму всех весов $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ обозначим через P, сумму площадей (весов) входящих трапеций $(r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1})$ обозначим через R, а сумму



Черт. 3.

площадей всех выходящих трапеций $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$ — через F, то получим

$$R < P < F. \tag{4}$$

Но, с другой стороны, грузом P уравновешивается весь треугольник ABT; так как центр тяжести этого треугольника отстоит от AT на расстоянии трети стороны AB, то уравновешивающий его груз P равен $\frac{\Delta}{3}$, где Δ — площадь

*) Доказательство этого неравенства приводится в приложении II к тексту (стр. 50).

(соответствующий вес) треугольника ABT:

$$R < \frac{\Delta}{3} < F.$$

А так как между теми же пределами содержится и площадь S сегмента, сколько бы ни сближались R и F, то отсюда следует, что $S = \frac{\Delta}{3}$. Архимед это доказывает, как обыкновенно, от противного. Он приходит таким образом к следующему предложению (о котором мы уже упоминали):

Площадь сегмента параболы в точности равна одной трети площади треугольника, ограниченного его хордой, осью параболы, проходящей через один конец хорды, и касательной, проходящей через другой её конец.

Любопытно, что теорема остаётся справедливой и в том случае, когда хорда не перпендикулярна к оси; Архимед и устанавливает её в этом более общем виде, что, по существу, не требует значительных усложнений.

Механический приём Архимеда заключается, таким образом, в том, что слагаемые площади он взвешивает и суммирует в общей точке — в точке приложения надлежащим образом установленного рычага.

Тщательным изучением античных математических текстов много занимался датский филолог и математик И. Гейберг (I. Heiberg). Под его редакцией были выпущены наиболее проверенные издания сочинений Евклида, Архимеда, Аполлония. Ещё в 1879 г. он выпустил исследование, посвящённое различным вопросам творчества Архимеда *). В начале текущего столетия Гейберг нашёл в каталоге Иерусалимской библиотеки небольшую выдержку из одного древнего манускрипта математического содержания. Эта выдержка была приведена приват-доцентом Петербургского университета Пападопуло-Керамевс из не вполне смытого древнегреческого текста, который он обнаружил на интересовавшем его пергаменте под текстом более позднего происхождения **). Не будучи математи-

*) I. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae, Kopenhagen, 1879.

**) С. Я. Лурье, Архимед. Изд. АН СССР, 1945, стр. 143.

ком, Пападопуло-Керамевс не придал своему открытию большого значения, но в его краткой выдержке Гейберг узнал ex ungue leonem («по когтям льва») произведение Архимеда. Ему удалось разыскать эту рукопись в Константинополе, и он обнаружил в ней греческие тексты некоторых сочинений Архимеда. Манускрипт был составлен в X столетии; между XII и XIV столетиями, как это часто бывало, тот же пергамент был использован вновь для богословского текста. Старый текст при этом старались смыть, но, к счастью, не с полным успехом: в значительной части его удалось восстановить. Кроме уже известных сочинений Архимеда, в нём оказались три «новых» его произведения, из которых два имеют очень важное значение, так как содержат его гидростатику (две работы «О плавающих телах») и так называемый «Эфодик».

Последнее из этих произведений («Эфодик») есть наиболее обширное и, может быть, по геометрическому своему значению наиболее важное из сочинений Архимеда. Оно не имеет названия, исходящего от самого Архимеда; все называют его «Метод обработки механических предложений». Это замечательное произведение содержит развитие того метода — мы сказали бы — интегрирования, которым Архимед пользовался в работе «Квадратура параболы». Обширный мемуар начинается письмом к Эратосфену Родосскому, при котором он был последнему отослан. Перечислив те предложения, которые он считает наиболее важными, Архимед далее пишет:

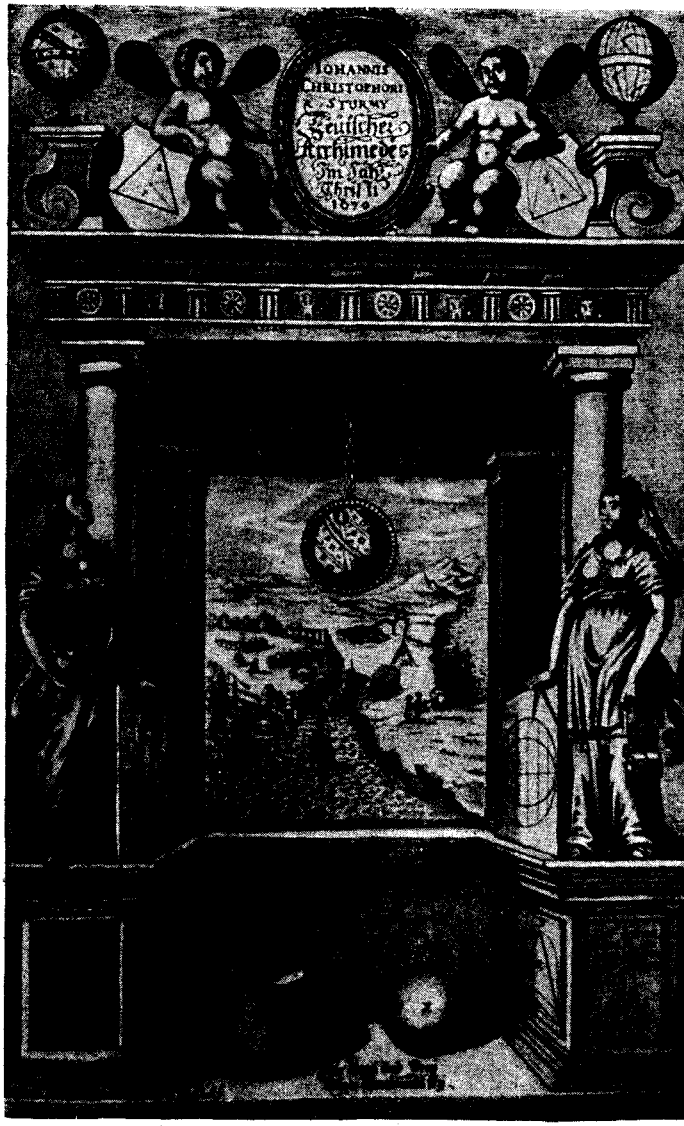
«Так как, однако, я в твоём лице ... ценю очень серьёзного учёного, философа выдающегося значения, а также и любителя математического исследования, то я считаю целесообразным изложить в этой книге своеобразный метод и в такой мере его выяснить, чтобы эта работа послужила и для тебя стимулом к исследованию некоторых математических вопросов при помощи механики. Но этот приём, по моему убеждению, не менее полезен также и для доказательства геометрических предложений, ибо некоторые вещи я себе первоначально уяснил именно механическим методом. Однако, потом эти предложения было необходимо доказать чисто геометрически, потому что обработка их вышеупомянутым методом, строго го-

воря, не даёт действительного доказательства. Очевидно, если мы при помощи этого метода предварительно получим некоторые сведения об исследуемых вопросах, то найти доказательство будет легче, чем это можно было бы сделать без предварительных сведений».

И действительно, Архимед этим новым механическим способом даёт здесь новые доказательства ряда предложений, которые им уже были доказаны в других сочинениях. Так, он этим способом вновь доказывает, что поверхность шара равняется учетверённой площади большого круга, что объём цилиндра, высота которого равна диаметру основания, в полтора раза превышает объём вписанного в него шара. Это последнее предложение Архимед особенно ценил; именно к этому предложению относится тот чертёж, который он завещал выгравировать на своей гробнице. В этом сочинении Архимед даёт новое доказательство теоремы о площади параболы, а затем обращается к задачам гораздо более трудным. Так, он находит поверхности и объёмы сегментов эллипсоида вращения, параболоида вращения, определяет центры тяжести этих тел и поверхностей, в частности, центр тяжести полушара и сегмента эллипсоида вращения, отсечённого плоскостью, перпендикулярной к оси вращения.

Все эти вычисления, по существу выполняемые интегрированием, действительно произведены единым методом. Таким образом, Архимед несомненно пришёл к довольно общему методу интегрирования, к которому приводится разыскание поверхностей, объёмов и центров тяжести тел вращения, ограничиваемых поверхностями второго порядка. Можно чётко формулировать, в какой мере он с этими задачами справился: он осуществил вычисление во всех тех случаях, когда задача не приводит к эллиптическим интегралам.

Таким образом, совершенно ясно, что Архимед в этой работе заложил начала интегрального исчисления, что самая задача интегрирования была ему совершенно ясна, что он с нею справился в довольно сложных случаях. Но понадобилось около двух тысяч лет для того, чтобы были созданы общие методы интегрирования, к простейшим применениям которых приводили задачи Архимеда. Если «отцами» современного интегрального исчисления



Фронтиспис нюрнбергского издания (1670 г.) сочинений Архимеда.

были Лейбниц и Ньютон, то родным «прадедом» их несомненно был Архимед.

Обращаясь ко второму сочинению Архимеда, обнаруженному Гейбергом в открытой им рукописи — Гидростатике, или, воспроизводя название точнее, «О плавающих телах», отметим, что это — одно из самых важных, некоторые считают — самое важное из сочинений Архимеда. Нужно, однако, сказать, что эту работу знали и раньше, до её открытия Гейбергом, правда, в латинском переводе, сделанном доминиканским монахом Мёрбеке (W. Mörbeke). Но так как этого сочинения не было в рукописи Валла (см. стр. 20), то царило сомнение, принадлежит ли оно действительно Архимеду. Когда Гейбергом был обнаружен его греческий текст в манускрипте, содержавшем и другие сочинения Архимеда, эти сомнения исчезли. Более того, оно и по сей день вызывает особенно глубокое удивление, потому что содержит важные открытия, в которых Архимед действительно не имел себе предшественников.

Наибольшее значение имеют предложения, на которых была построена гидростатика, а в настоящее время и аэростатика. Приведём эти предложения фундаментального значения.

Предложение 3. Тела, которые при равном объёме имеют тот же вес, что и некоторая жидкость, будучи помещены в эту жидкость, погружаются в неё таким образом, что не выступают над её поверхностью, но и не спускаются ниже.

Предложение 4. Тело, более лёгкое, чем жидкость, будучи в ней помещено, не погружается в жидкость целиком, — некоторая часть его выступает над поверхностью.

Предложение 5. Тело, более лёгкое, чем жидкость, будучи в ней помещено, погружается настолько, что вес вытесненной жидкости равен весу тела.

Предложение 6. Если тело, более лёгкое, чем жидкость, насильно погрузим внутрь этой жидкости, то оно выталкивается вверх с силой, равной разности между весом вытесненной жидкости и весом тела.

Предложение 7. Тело, которое тяжелее жидкости, будучи погружено в эту жидкость, идёт ко дну и, будучи взвешено в самой жидкости, теряет в своём весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость.

Совокупность этих теорем, в частности 5 и 7, сохраняет по настоящее время название закона Архимеда.

Для построения современной гидростатики оказалось по существу необходимым только прибавить закон, открытый Паскалем, который однако, нужно сказать, потенциально содержится уже в предложениях Архимеда.

Большой известностью пользуется легенда, рассказанная Витрувием о том, при каких обстоятельствах эти законы были открыты. Сиракузский царь Гиерон заказал себе корону из чистого золота. Когда корона была изготовлена, возникло сомнение, не содержит ли она в себе некоторого количества серебра. Гиерон потребовал от Архимеда, чтобы он указал способ выяснить эти сомнения. Архимед долго размышлял об этой задаче; однажды, находясь в ванне и почувствовав, как вес его тела уменьшается при погружении, он уяснил себе основной закон, носящий в настоящее время его имя. В восторге он выскочил из ванны и с криком «εὕρηκα» («эврика» — нашёл) нагой побежал по улицам. Весьма вероятно, что открытие действительно произошло при купании. Так как закон Архимеда даёт возможность, как известно, определять удельный вес тела, то ключ к ответу на вопрос Гиерона был найден; но вместе с тем был найден один из основных законов, на котором в настоящее время строится гидродинамика и аэродинамика.

Повидимому, в тесной связи с этими размышлениями Архимеда находится и открытый им гидравлический винт. Конечно, винты, которые теперь приводят в движение корабли, морские и воздушные, представляют собой далеко идущее усовершенствование винта Архимеда; но замысел этого основного движителя современных плавательных и летательных сооружений принадлежит Архимеду.

Мы не будем останавливаться на третьей работе, обнаруженной Гейбергом; это — так называемый «Стомахион» (Στομάχιον) — нечто среднее между геометрической задачей о делении фигуры на части и забавой. Она к тому же до-

шла до нас только в отрывках и не имеет научного значения, как и приписываемая Архимеду «задача о быках».

Мы остановимся теперь ещё на одном вопросе, именно — рассмотрим логическую базу, на которой Архимед строит свои выводы, аксиоматику Архимеда.

Сочинение о шаре и цилиндре начинается, как обыкновенно (см. стр. 19), письмом к Досифею. Письмо заканчивается пятью аксиомами, которые Архимед предпосылает этой основной своей работе; он явно считает необходимым дополнить ими аксиомы и постулаты Евклида. Приведём здесь перевод этих аксиом.

1) Из всех линий, которые имеют те же концы, прямая есть самая короткая.

2) Из других линий, расположенных в одной плоскости и имеющих общие концы, две не равны, если обе они обращены выпуклостями в одну и ту же сторону и если одна из них либо вполне объемлется другой, либо же частью объемлется, а в других частях совпадает с ней; и в этом случае объемлющая больше объемлемой.

3) Точно так же из поверхностей, которые имеют общую границу, лежащую в одной плоскости, плоская поверхность меньше всех остальных.

4) Из других поверхностей, имеющих общую плоскую границу, две не равны, если обе они обращены выпуклостями в одну и ту же сторону, и одна объемлет другую; при этом объемлющая поверхность больше объемлемой.

5) Из неравных линий, неравных поверхностей или неравных тел меньшее, будучи повторенным достаточное число раз, превзойдёт большее.

Эти постулаты Архимеду действительно необходимы уже в первом предложении; утверждая, что периметр многоугольника, описанного около круга, больше длины окружности, Архимед опирается на первый из этих постулатов. Точно так же, утверждая дальше, что поверх-

ность призмы, описанной около цилиндра, больше боковой поверхности цилиндра, а боковая поверхность призмы, вписанной в цилиндр, меньше поверхности цилиндра, Архимед ссылается на 3-й и 4-й постулаты.

Однако первые четыре постулата Архимеду нужны потому, что он не даёт точного определения того, что̀ надлежит разуметь под длиной кривой или под величиной поверхности. В настоящее время эти определения точно оформляются, и тогда все четыре первые аксиомы Архимеда становятся излишними: их можно доказать. Так, например, длина дуги кривой определяется следующим образом: в эту дугу вписывается ломаная линия и около той же дуги (между теми же концами) ломаная линия описывается. Когда число сторон каждой ломаной неограниченно увеличивается, а самые стороны неограниченно уменьшаются, то обычно (т. е. для значительного большинства кривых, которые нам приходится изучать), периметры обеих ломаных стремятся к общему пределу. Этот предел и принимается за длину дуги рассматриваемой кривой.

При таком определении длины дуги первые две аксиомы становятся излишними; содержащиеся в них утверждения легко доказываются. Таким же образом, при надлежащем определении величины поверхности допускают доказательства третья и четвёртая аксиомы.

Совершенно иначе обстоит дело с пятой аксиомой. Читателю прежде всего нужно отчётливо уяснить себе содержание этого постулата. Хорошо известен приём, служащий для нахождения общей меры двух отрезков, если таковая существует, или для установления точного или приближённого отношения двух отрезков. Этот приём, который теперь обыкновенно называют последовательным делением или алгоритмом Евклида, имеется уже в «Началах» Евклида (книга VII, предложение 2) *).

Приём этот заключается в том, что меньший отрезок откладывается на большем столько раз, сколько он там поместится. Иначе говоря, если a — больший, а b — меньший отрезок, то находится такое число n, что nb равно или меньше a, и в то же время $(n+1)b$ больше a.

---

*) Евклид применяет его, собственно, к числам, но иллюстрирует их отрезком.

Вопрос заключается, однако, в том, существует ли такое число n. Другими словами, повторяя меньший отрезок достаточное число раз, достигнем ли мы того, что превзойдём больший отрезок?

Пятая аксиома Архимеда именно утверждает, что мы этого всегда достигнем: повторяя достаточное число раз меньший отрезок, мы превзойдём больший.

Нужна ли эта аксиома? Нельзя ли обойтись без нее, нельзя ли доказать содержащееся в ней утверждение? Этот вопрос был подвергнут в текущем столетии тщательному обсуждению.

Веронезе и Гильберт показали, что введение такой аксиомы безусловно необходимо. Было показано, что возможны как арифметика, так и геометрия, в которых эта аксиома не оправдывается (трансфинитная арифметика и трансфинитная геометрия).

Мы не имеем возможности входить здесь в такие подробности, которые бы это вполне выяснили. Мы только отметим удивительную прозорливость Архимеда, который усмотрел необходимость аксиомы, не только получившей признание в современной математике, но и играющей в ней чрезвычайно важную роль.

Здесь будет уместно сказать об общем методе, которому Архимед следовал при изложении своих работ. Верный заветам своих предшественников — Евдокса, Аристотеля, Евклида, — Архимед признавал только выводы строго доказанные, т. е. основанные на исходной аксиоматике — на аксиомах Евклида, к которым он присоединил свои собственные, перечисленные выше. Даже свой трактат по гидростатике он основывает на двух постулатах, изложенных в первой книге работы «О плавающих телах». Здесь не место входить в обсуждение того, в какой мере постулаты, на которых Архимед строил свои выводы, действительно достаточны для логического обоснования этих выводов, — скажем только, что они в полной мере стояли на высоте требований того времени. В письме к Эратосфену, о котором мы говорили выше, Архимед указывает, что некоторые из излагаемых им предложений уже были указаны ранее Демокритом; но наглядные механические соображения Демокрита его не удовлетворяют, он

считает необходимым дать точные (т. е. логически выполненные) их доказательства.

Три гениальных геометра характеризуют направление эллинской математики. Евклид, верный ученик Платона, не интересуется вовсе практическим значением геометрии. Как мы видели, он над этим даже трунил; его интересовала только строгая абстрактная дедукция; в этом стиле построены его «Начала». В противоположность этому Демокрит, человек ярко выраженного материалистического мировоззрения, больше всего интересовался самыми фактами, содержавшимися в геометрии его времени, их практическими приложениями; точность логического вывода его, повидимому, интересовала гораздо меньше *). Архимед несомненно ценил практические приложения математики и механики; каковы бы ни были соображения его биографов, об этом свидетельствует вся его деятельность. Но он в то же время требовал точных доказательств, строго логического вывода каждого математического утверждения. Эта точка зрения наиболее близка к нашим современным установкам.

Из дошедших до нас сочинений Архимеда совершенно ясно, какое значение для науки имело его гениальное творчество. Но целый ряд его сочинений до нас не дошёл. Мы посвятим ещё немного места тем из них, содержание которых может быть более или менее установлено благодаря указаниям самого Архимеда или других авторов.

Мы уже упоминали выше о его работе «Ἀρχαί», посвящённой основам счёта. О нём упоминает как сам Архимед, так и различные другие авторы.

Несомненно, большой интерес представляло сочинение, посвящённое учению о многогранниках. Как рассказывает Папп Александрийский, Архимед в этом сочинении, кроме известных пяти правильных многогранников (обыкновенно называемых «платоновыми телами»), указал ещё тринадцать многогранников, которые можно назвать полуправильными. Эти тела также ограничены правильными многоугольниками, образующими равные двугранные углы, но между

*) См. И. Л. Гейберг, Естествознание и математика в классической древности. ОНТИ, М. — Л., 1936; С. Я. Лурье, Архимед, Изд. АН СССР, М. — Л., 1945 (гл. VI).

ними имеются неодноимённые (например, треугольники и пятиугольники).

Однако, наиболее важное значение из утраченных сочинений Архимеда имела книга, а может быть и несколько книг, посвящённых механике. Об одном из этих сочинений, которое, повидимому, называлось «О весах» или «О рычагах», упоминают Папп и Симплиций. Есть основания предполагать, что в этом сочинении Архимед впервые точно установил понятие о центре тяжести данного тела, как такой его точке, в которой достаточно подпереть тело, чтобы оно оставалось в равновесии в любом своём положении.

Меньше сведений мы имеем о содержании его сочинений, посвящённых оптике и астрономии. В одном из этих сочинений «Κατοπτρικά» Архимед делает указания относительно преломления света. Другое сочинение посвящено описанию изготовленной самим Архимедом механической модели небесной сферы, на которой можно было наблюдать движения светил. Цицерон рассказывает, что он видел эту модель собственными глазами. К числу не дошедших до нас произведений Архимеда принадлежат его рассуждения о календаре.

Нам нет нужды здесь в заключение вновь перечислять замечательные открытия Архимеда. Каждое из его сочинений прибавляло нечто новое к совокупности знаний, которыми владели его предшественники в арифметике, в геометрии, в механике, в астрономии, — во все отрасли точного знания он сделал вклады, не только сохранившие своё значение до настоящего времени, но часто служащие основой современных дисциплин, теоретических и прикладных. Чрезвычайной оригинальностью, глубиною мысли и свежестью замысла отличается каждая из его работ. История науки знает очень мало произведений такого яркого творчества, такой гениальной мысли.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Современное доказательство основного соотношения, характеризующего параболу

Так как соотношение (2), приведённое на стр. 36, играет основную роль в решении рассматриваемой задачи, то мы приведём его вывод, доступный для лиц, владеющих началами высшей математики (вывод Архимеда, хотя и элементарен, но значительно сложнее).

Если мы отнесём параболу, как обычно, к её главному диаметру OX и касательной OY в вершине, как к осям координат (черт. 4), то её уравнение будет иметь вид:

$$pX = Y^2, \qquad \text{(I)}$$

где p есть коэффициент, характеризующий данную параболу. Из произвольной точки $M(a, b)$ параболы проведём прямую MH, параллельную главной оси, хорду MN, перпендикулярную к той же оси, и касательную ME к параболе; наконец, из произвольной точки E этой касательной проведём прямую EG, параллельную главной оси, которая пересечёт параболу и хорду соответственно в точках J и G. Теперь перенесём начало координат в точку M, направив координатные оси в обратные стороны, т. е. за ось x-ов примем $\overrightarrow{MH}$, за ось y-ов примем $\overrightarrow{MN}$; тогда первоначальные координаты (X, Y) в новых координатах (x, y) выразятся разностями $X = a - x$, $Y = b - y$. Если подставим эти выражения в уравнение параболы (I) и примем во внимание, что $pa = b^2$, то приведём его к виду

$$px = y(2b - y). \qquad \text{(II)}$$

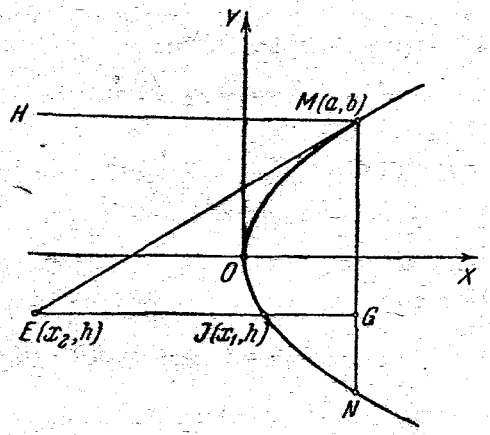
Дифференцируя последнее равенство по x, получим

$$p = 2y'(b - y).$$

Уравнение касательной ME, проходящей через новое начало ($x = 0$, $y = 0$), имеет вид:

$$2by = px. \qquad \text{(III)}$$

Если поэтому обозначим MG (общую ординату точек параллели EG) через h, то абсцисса x_1 точки J на пара-



Черт. 4.

боле и абсцисса x_2 точки E на касательной из уравнений (II) и (III) получат значения

$$x_1 = \frac{h(2b - h)}{p}, \qquad x_2 = \frac{2bh}{p},$$

так что $\frac{x_2}{x_1} = \frac{2b}{2b - h}$ и, следовательно,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{h}{2b - h}.$$

Последняя пропорция, очевидно, и выражает равенство Архимеда (2), приведённое в тексте, так как $x_1 = JG$, $x_2 - x_1 = EJ$, $h = MG$, $2b - h = GN$.

Строго говоря, теорема Архимеда шире; она остаётся в силе, когда MN — произвольная хорда параболы; в общем случае доказательство проводится совершенно так же в косоугольных координатах.

II. Доказательство неравенства (3), приведённого на стр. 37

Рассмотрим для определённости трапецию Q_2 (черт. 3). Если бы груз Q_2 был приложен в точке H_2, то для его уравновешивания в точке C понадобился бы вес P_2, определяемый пропорцией

$$P_2 : Q_2 = AH_2 : AC, \text{ или } P_2 : Q_2 = AH_2 : AB.$$

С другой стороны, из свойства параболы, выражаемого пропорцией (2) (стр. 36), вытекает:

$$AH_2 : AB = H_2R_2 : H_2T_2.$$

Если обозначим это отношение через μ, то с одной стороны, $P_2 = \mu Q_2$; с другой стороны (см. черт. 2 на стр. 34),

$$H_1F_1 : H_1T_1 = H_2R_2 : H_2T_2 = \mu,$$

т. е. верхнее и нижнее основания трапеции F_1H_2 (f_2) имеют одно и то же отношение μ соответственно к верхнему и нижнему основаниям трапеции T_1H_2 (Q_2), а так как обе трапеции имеют общую высоту H_1H_2, то $f_2 = \mu Q_2$. Это значит, что сила P_2 выражается весом (или площадью) трапеции f_2. Повторим подробнее: если бы вес трапеции Q_2 действовал в точке H_2, то сила P_2, уравновешивающая его на другом конце рычага (в точке C), выразилась бы площадью f_2. Но центр тяжести трапеции Q_2, в котором можно действительно считать приложенной силу, равную её весу, отстоит от прямой AT на расстояние, меньшее AH_2. Поэтому сила P_2, действительно уравновешивающая в точке C рычага трапецию Q_2, меньше f_2 (т. е. $P_2 < f_2$). Таким же образом докажем, что $P_2 > r_2$. Совершенно аналогично этому установим общее неравенство (3), а вследствие этого и неравенство (4).

КРАТКИЕ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

I. Перечень сочинений Архимеда

а) Сочинения, дошедшие до нас:

1. Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α′, β′ — Две книги о шаре и цилиндре.
2. Κύκλου μέτρησις — Измерение круга.
3. Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων — О коноидах и сфероидах.
4. Περὶ ἑλίκων — О спиралях.
5. Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α′, β′ — Две книги о равновесии плоскостей.
6. Ψαμμίτης — Исчисление песка.
7. Τετραγωνισμος παραβολῆς — Квадратура параболы.
8. Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος — Послание Эратосфену о методе обработки механических предложений.
9. Περὶ τῶν ὀχουμένων α′, β′ — Две книги о плавающих телах.
10. Отрывки из Στομαχιον (игра).

б) Сочинения, до нас не дошедшие:

1. Сочинение о многогранниках.
2. Книга арифметического содержания, называвшаяся, повидимому, Ἀρχαὶ (принципы, начала).
3. Сочинения по механике; одно из них, повидимому, называлось Περὶ ζυγῶν — «О весах» или «О рычагах».
4. Κατοπτρικά (сочинение, посвящённое отражению и преломлению световых лучей).
5. Περὶ σφαιροποιΐας — Об изготовлении шаров.

II. Важнейшие издания сочинений Архимеда

а) Издания на греческом и латинском языках:

1. Базельское издание 1544 (так называемое editio princeps — главное издание) — Archimedis opera quae quidem exstant omnia nunc primum graece et latine in lucem edita. Adiecta quoque sunt Eutocii Ascalonitae commentaria item graece et latine nunquam autea excusa. Basel, 1544.
2. Парижское издание — Archimedis opera quae exstant graece et latine novis demonstrata et commentariis illustrata. Paris, 1615.

3. Оксфордское издание — Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα μετὰ τῶν Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπομνημάτων; Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis. Ex recensione J. Torelli, Veronensis cum nova versione latine. Oxford, 1792.

4. Лейпцигские издания — Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustrauit I. L. Heiberg. Leipzig, 1880—1881. Второе издание 1910—1913 гг.

б) Издания сочинений Архимеда на русском языке:

Архимед, Две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы. Перевод с греческого Ф. Петрушевского. СПБ, 1823.

Архимед, Псаммит или исчисление песка в пространстве, равном шару неподвижных звёзд. Перевод с греческого Ф. Петрушевского. СПБ, 1824.

Архимед, Исчисление песчинок (Псаммит). Перевод, краткий обзор работ Архимеда и примечания Г. Н. Попова. М. — Л., 1932.

И. Гейберг, Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики. С предисловием И. Ю. Тимченко. Одесса, 1909.

Архимед, Измерение круга. В книге «О квадратуре круга» (Ф. Рудио). 3-е изд. М. — Л., 1936.

Архимед, О плавающих телах. В сборнике «Начала гидростатики» (Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль), М. — Л., 1932 (2-е изд., 1933).

в) Издания в переводах на новые языки.

1. Нюрнбергское издание — Des unvergleichlichen Archimedis Kunst-Bücher, übersetzt und erläutert von J. C. Sturmio. Nürnberg, 1670.

2. Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement avec un commentaire par F. Peyrard. Paris, 1807.

3. The works of Archimedes. Edited by T. L. Heath. Cambridge, 1897. Имеется немецкий перевод: Archimedes Werke, Übersetzung von F. Klein. Berlin, 1914.